ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.24:62-50

Дрозденко Віталій Олександрович
кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри інформаційних систем і технологій, Білоцерківський національний аграрний університет
Дрозденко Виталий Александрович
кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры информ. систем и технологий, Белоцерковский национальный аграрный университет
Drozdenko V.O.
assistant of the department of information systems and technologies
Bila Tserkva National Agrarian University

МІНІМІЗАЦІЯ ВАРТОСТІ СТРАХОВИХ КОНТРАКТІВ ШЛЯХОМ ЗАЛУЧЕННЯ ДЕКІЛЬКОХ СТРАХОВИХ КОМПАНІЙ
МИНИМИЗАЦИЯ СТОИМОСТИ СТРАХОВЫХ КОНТРАКТОВ ПУТЕМ ЗАДЕЙСТВОВАНИЯ НЕСКОЛЬКИХ СТРАХОВЫХ КОМПАНИЙ
MINIMIZATION OF THE INSURANCE CONTRACT PRICES VIA INVOLVING OF SEVERAL INSURANCE COMPANIES

Анотація: В роботі, на прикладі експоненційного принципу страхового оцінювання, який є частковим випадком декількох методів підрахунку вартості контрактів означених з використанням гладких допоміжних функцій, продемонстрована методика оптимального поділу платіжних зобов'язань між декількома страховими компаніями з метою мінімізації вартості страхових контрактів.
Ключові слова: страхова премія, експоненційний принцип, принцип середнього значення, принципи корисності, перестрахування, нерівності Гельдера.

Аннотация: В работе, на примере экспоненциального принципа страхового оценивания, который является частным случаем нескольких методов подсчёта стоимости страховых контрактов определённых с использованием гладких вспомогательных функций, продемонстрирована методика оптимального деления платёжных обязательств между несколькими страховыми компаниями с целью уменьшения стоимости страховых контрактов.
Ключевые слова: страховая премия, экспоненциальный принцип, принцип сред- него значения, концепции полезности, перестрахование, неравенства Гельдера.

Summary: In the article, using the exponential approach to the insurance pricing, which is a special case of several quite widely used methods of the insurance pricings defined with the use of the smooth auxiliary functions, we demonstrate the techniques of optimal shearing of the financial responsibilities between several insurance companies with the purpose of minimization of the insurance contract prices
Key words: insurance pricing, insurance premiums, exponential principle, mean value principle, utility principles, optimal shearing, reinsurance, Holder inequalities.

1. Вступ

Нехай X це випадкова величина, з функцією розподілу $F(x)$, яка відображає розмір страхової компенсації пов'язаної з певною страховою угодою. Страхову премію, яку слід заплатити при укладанні угоди за покриття ризику X, позначатимемо $\pi[X]$.

Здебільшого, випадкова величина X вважається невід'ємною, проте, від'ємні значення величини X інколи допускаються та трактуються, скажімо, як штрафні санкції за невиконання умов страхової угоди, що надходять від застрахованого до страхової компанії.

Премія середнього значення для ризику X, задана за допомогою двічі неперервно-диференційованої функції $v(x) \in C^2(R)$, такої, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для $x \in R$, означається як розв'язок рівняння

$$v(\pi_{\tilde{\text{n}}.\text{ç}.}[X]) = \mathsf{E}[v(X)].$$

Аргументація для принципу середнього значення трохи прихована в нерівності Єнсена

$$v(\mathsf{E}[X]) \leq \mathsf{E}[v(X)],$$

тобто, отримана в такий спосіб премія буде не меншою за математичне сподівання розміру страхової компенсації.

Часто-вживаним частковим випадком премії середнього значення, якщо обрати $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, є експоненційна премія означена наступним чином

$$\pi_{\text{åêñï}.(\beta)}[X] := \frac{1}{\beta}\log\left(\mathsf{E}[e^{\beta X}]\right), \quad \text{äëÿ} \quad \beta > 0.$$

Експоненційна премія виникає також як частковий випадок методів страхового оцінювання основаних на концепціях корисності (страховика чи клієнта) та виділяється в окремий випадок, бо вона володіє рядом бажаних властивостей, якими методи індивідуального страхового оцінювання означені з використанням гладких допоміжних функцій взагалі кажучи не володіють, як то властивістю адитивності, а також властивостями консистентності та ітеративності.

Більш детально з методами індивідуального страхового оцінювання та властивостями, якими може володіти або не володіти окремо обраний метод підрахунку вартості страхових контрактів можна почитати, наприклад, в роботах Bühlmann (1970), Dickson (2005), Kaas та інші (2008), Kremer (1999), Rolski та інші (1998), Straub (1988).

2. Оптимальний поділ

В цьому розділі ми розглядаємо питання оптимального поділу $X_1,\cdots,X_n$ ризику X між n страховими компаніями кожна з яких користується експоненційним принципом підрахунку вартості страхових контрактів з параметрами інтенсивності $\beta_1,\cdots,\beta_n$ відповідно, такого, що

$$X_1+\ldots+X_n=X$$

який би мінімізував страхову вартість ризику X.

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 1. Оптимальним, у сенсі мінімізації страхової вартості, поділом ризику X між n страховими компаніями, кожна з яких користується експоненційним принципом є наступний поділ

$$X_i=\frac{\bar\beta}{\beta_i}X, \text{ де } \bar\beta:=\Big(\sum_{i=1}^{n}1\big/\beta_i\Big)^{-1},$$

при цьому мінімально-оптимальна страхова вартість ризику X становитиме

$$\pi_{\text{optimal}}[X]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}\log\left(\mathsf{E}[e^{\beta_i X_i}]\right).$$

Зауваження. Звернемо увагу на те, що представлена в Теоремі 1 мінімально-оптимальна вартість ризику X при поділі його між кількома страховими компаніями співпадає з вартістю ризику X застрахованого однією страховою компанією, яка користується експоненційним принципом з параметром інтенсивності $\bar\beta$.

Доведення. Покажемо спочатку, що представлене в Теоремі 1 $\pi_{\text{optimal}}[X]$ є еквівалентною, в ціновому розумінні, страхуванню ризику X лише в одній компанії, яка користується експоненційним принципом з параметром інтенсивності $\bar\beta$. Дійсно, в даному випадку маємо

$$\pi_{\text{optimal}}[X]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}\log\left(\mathsf{E}[e^{\beta_i\cdot\frac{\bar\beta}{\beta_i}X}]\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}\log\left(\mathsf{E}[e^{\bar\beta X}]\right)$$

$$=\frac{1}{\Big(\sum_{i=\overline{1,n}}1\big/\beta_i\Big)^{-1}}\log\left(\mathsf{E}[e^{\bar\beta X}]\right)=\frac{1}{\bar\beta}\log\left(\mathsf{E}[e^{\bar\beta X}]\right)=\pi_{\text{âêñï}.(\bar\beta)}[X].$$

Для демонстрації того, що представлений у формулюванні Теореми 1 поділ ризику X між n страховими компаніями дійсно є оптимальним, достатньо показати, що для будь-якого поділу $X_1,\cdots,X_n$ ризику X такого, що $X_1+\ldots+X_n=X$ має місце нерівність

$$\frac{1}{\bar\beta}\log\mathsf{E}\left[\exp\left(\bar\beta\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right]\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}\log\mathsf{E}\left[e^{\beta_i X_i}\right],$$

яка еквівалентна наступній нерівності

$$\log\mathsf{E}\left[\exp\left(\bar\beta\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right]\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar\beta}{\beta_i}\log\mathsf{E}\left[e^{\beta_i X_i}\right],$$

або, що те саме

$$\log\mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n}e^{\bar\beta X_i}\right]\le\log\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\mathsf{E}\left[e^{\beta_i X_i}\right]\right)^{\bar\beta/\beta_i}\right).$$

З урахуванням монотонності функції $\log(\cdot)$ кожна з попередніх трьох нерівностей є еквівалентною будь-якій з трьох наступних

$$\mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n}e^{\bar\beta X_i}\right]\le\prod_{i=1}^{n}\left(\mathsf{E}\left[e^{\beta_i X_i}\right]\right)^{\bar\beta/\beta_i},$$

$$\mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n}e^{\bar\beta X_i}\right]\le\prod_{i=1}^{n}\left(\mathsf{E}\left[e^{\beta_i/\bar\beta\cdot\bar\beta X_i}\right]\right)^{\bar\beta/\beta_i},$$

та

$$\mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n}e^{\bar\beta X_i}\right]\le\prod_{i=1}^{n}\left(\mathsf{E}\left[\left(e^{\bar\beta X_i}\right)^{\beta_i/\bar\beta}\right]\right)^{\bar\beta/\beta_i}.$$

Здійснивши заміну змінних

$$Y_i := e^{\bar{\beta} X_i} \text{ та } \mu_i := \frac{\bar{\beta}}{\beta_i},$$

остання з вище-представлених нерівностей зведеться до наступної

$$\mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} Y_i\right] \le \prod_{i=1}^{n}\left(\mathsf{E}\left[Y_i^{\mu_i}\right]\right)^{1/\mu_i}.$$

Звернувши увагу на те, що $\mu_i > 0$ для $i = \overline{1, n}$, а також на те, що

$$\sum_{i=1}^{n} 1/\mu_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{\beta}/\beta_i = \left(\sum_{i=1}^{n} 1/\beta_i\right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1/\beta_i = 1,$$

робимо висновок, що нерівність, справедливість якої треба було показати для демонстрації оптимальності представленого у формулюванні Теореми 1 поділу в решті решт звелася до нерівності Гельдера у формі добутку для n невід’ємних випадкових величин, яка дійсно виконується.

Доведення Теореми 1 завершено. □

З урахуванням того, що для будь-якого ризику X, експоненційна премія є неспадною функцією параметра β, певного роду наслідком твердження Теореми 1 можна вважати наступну нерівність

$$\bar{\beta} := \left(\sum_{i=1}^{n} 1/\beta_i\right)^{-1} \le \min\left[\beta_1, \cdots, \beta_n\right]$$

при $\beta_1 > 0, \cdots, \beta_n > 0$ та $n \in N.$

Література

1. Bühlmann H. Mathematical Methods in Risk Theory / Bühlmann H. - Berlin: Springer, 1970. - 210 p.
2. Dickson D.C.M. Insurance Risk and Ruin / Dickson D.C.M. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — 229 p.
3. Modern Actuarial Risk Theory using R / [Kaas R., Goovaerts M., Dliaene J., Denuit M.]. — Berlin: Springer, 2008. — 381 p.
4. Kremer E. Applied Risk Theory / Kremer E. — Aachen: Shaker, 1999. - 218 p.
5. Stochastic Processes for Insurance and Finance / [Rolski T., Schmi- dli H., Schmidt V., Teugels J.]. − Chichester: John Wiley & Sons, 1999. - 654 p.
6. Straub E. Non-Life Insurance Mathematics / Straub E. — Berlin: Springer, 1988. — 136 p.