ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Працьовитий Микола Вікторович
доктор фіз.-мат. наук, професор, відділ фрактального аналізу
Інститут математики НАН України
Дрозденко Віталій Олександрович
кандидат фіз.-мат. наук, асистент каф. вищої математики та фізики
Білоцерківський національний аграрний університет

Працевитый Николай Викторович
доктор физ.-мат. наук, профессо, отдел фрактального анализа
Институт математики НАН Украины
Дрозденко Виталий Александрович
кандидат физ.-мат. наук, ассистент каф. высшей математики и физики
Белоцерковский национальный аграрный университет

Mykola V. Pratsiovytyi
doctor of physical and mathematical sciences, professor,
department of fractal analysis
Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Ukraine
Vitaliy O. Drozdenko
candidate of physical and mathematical sciences,
assistant of the department of higher mathematics and physics
Bila Tserkva National Agrarian University

СТОХАСТИЧНА ВПОРЯДКОВАНІСТЬ ТА МЕТРИКА ПОРОДЖЕНІ ПРИНЦИПАМИ БАР'ЄРНОГО ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

СТОХАСТИЧЕСКАЯ УПОРЯДОЧЕННОСТЬ И МЕТРИКА ПОРОЖДЕННЫЕ ПРИНЦИПАМИ БАРЪЕРНОГО ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ

STOCHASTIC ORDERING AND METRIC GENERATED BY PRINCIPLES OF STOP-LOSS REINSURANCE

Анотація. В роботі представлені базові концепції формування стохастичної впорядкованості та метрики породжених принципами бар'єрного перестрахування. Крім іншого, в статті представлений достатній критерій впорядкованості, продемонстрована монотонність впорядкованості випадкових величин/розподілів як функції масштабного параметра, продемонстрована інваріантність впорядкованості відносно змішування та згортання, а також доведено декілька ключових властивостей метрики.

Аннотация. В работе представлены базовые базовые концепции формирования стохастической упорядоченности и метрики порожденные принципами барьерного перестрахования. Помимо прочего, в статье представлен достаточный критерий упорядоченности, продемонстрирована монотонность упорядоченности случайных величин/распределений как функции параметра масштабирования, продемонстрирована инвариантность упорядоченности относительно смешивания и сворачивания, а так же доказано несколько ключевых свойств метрики.

Abstract. Some basic concepts of forming of stochastic ordering and metric generated by the principles of stop-loss reinsurance are presented in the article. Among other notions, we present a sufficiency criterium for the stochastic ordering, demonstrate monotonicity of stochastic ordering as a function of scaling parameter, demonstrate invariantness of the ordering with respect to mixing and convoluting as well as prove several key properties of the metric.

Ключові слова: бар'єрне перестрахування, нетто премія, премія середнього значення, стохастична впорядкованість, метрика, критерій достатності, монотонність, суміш, згортка.
Ключевые слова: барьерное перестрахование, нетто премия, премия среднего значения, стохастическая упорядоченность, метрика, критерий достаточности, монотонность, смеь свертка.
Key words: stop-loss reinsurance, net premium, mean value premium, stochastic ordering, metric, sufficiency criterium, monotonicity, mixture, convolution.

Нехай випадкова величина X, з функцією розподілу $F_X(x)$, відображає грошовий еквівалент збитків пов'язаних з певною страховою угодою. Страхову премію, тобто суму, яку клієнт при укладанні угоди платить обраній страховій компанії за захист від ризику X, позначатимемо $\pi[X]$.

Здебільшого величина X вважаєтьмся невід'ємною, проте, від'ємні значення величини X інколи допускаються та трактуються як штрафні санкції, що надходять від застрахованого до страхової компанії за не виконання умов страхової угоди.

Нагадаємо, що нетто премія для ризику X означається як математичне сподівання розміру збитків асоційованих з ризиком X, тобто, $\pi_{\text{í åòòî}}[X] := \mathrm{E}[X]$.

Нагадаємо також, що премія середнього значення для ризику X, яку позначатимемо $\pi_{\text{ñ.ç.}}[X]$, означена за допомогою функції $v(x) \in C^2(\mathrm{R})$ такої, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \ge 0$ для $x \in \mathrm{R}$, означається як розв'язок рівняння $v(\pi_{\text{ñ.ç.}}[X]) = \mathrm{E}[v(X)]$. Аргументація для приципу середнього значення підрахунку вартості страхових контрактів трохи прихована в нерівності Єнсена $v(\mathrm{E}[X]) \le \mathrm{E}[v(X)]$, тобто, отримана в такий спосіб премія буде не меншою за математичне сподівання розміру грошових збитків.

Важливим частковим випадком премії середнього значення є експоненційна премія

$$\pi_{\text{åêñï .}(\beta)}[X] := \frac{1}{\beta}\log(E[e^{\beta X}]), \quad \text{äëÿ} \quad \beta > 0,$$

яка отримується з премії середнього значення при виборі $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$.

Експоненційна премія виникає також як частковий випадок методик страхового оцінювання основаних на використанні гладких функцій корисності, і виділяється в окремий випадок, як така, що володіє рядом бажаних властивостей, якими методи страхового оцінювання означені з використанням гладких допоміжних функцій взагалі кажучи не володіють, наприклад властивістю адитивності.

У роботі Дрозденка [1, с. 211–224] крім іншого демонструвалося, що, якщо для ризику X існує $\delta > 0$ таке, що $\mathrm{E}[|Xe^{\delta X}|] < +\infty$, то має місце граничне співвідношення $\pi_{\text{åêñï .}}(\beta)[X] \to \pi_{\text{í åòòî}}[X]$ при $\beta \to 0_+$, яке демонструє певного роду зв'язок між експоненційною та нетто преміями.

Розглянемо тепер контракт надлишкового перестрахування з бар'єрним рівнем t. В даному випадку перестрахова компанія відшкодовує частину ризику $X - t$ у випадку, коли $X > t$, і весь ризик (без виплат з боку перестраховика) відшкодовується страховою компанією, якщо $X < t$.

За таких обставин, премія, що надходить до перестраховика обрахована за експоненційним принципом матиме вигляд

$$\pi_{\text{åêñï .}(\beta)}^{\text{ï åðåñòð.}}[X] = \frac{1}{\beta}\log \mathrm{E}[e^{\beta(X-t)_+}] =: \pi[X,t,\beta], \quad \text{äëÿ} \quad \beta > 0,$$

а нетто премія

$$\pi_{\text{í åòòî}}^{\text{ï åðåñòð.}}[X] = \mathrm{E}[(X-t)_+] =: \pi[X,t,0].$$

В термінах функцій розподілу щойно отримані премії можна представити наступним чином

$$\begin{aligned} \pi[X,t,\beta] &= \frac{1}{\beta}\log\left\{F(t) + \int_t^{+\infty} e^{\beta(x-t)dF(x)}\right\} \\ &= \frac{1}{\beta}\log\left\{1 + \beta\int_t^{+\infty} e^{\beta(x-t)}[1-F(x)]dx\right\}, \quad \text{äëÿ} \quad \beta > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

а також

$$\pi[X,t,0] = \int_t^{+\infty}(x-t)dF(x) = \int_t^{+\infty}[1-F(x)]dx. \tag{2}$$

Більш зручними з точки зору комп'ютериних обчислень, особливо у випадках, коли розподіл $F(\cdot)$ є арифметичним, є наступні два представлення, які еквівалентні представленням (1) та (2)

$$\pi[X,t,\beta] = \frac{1}{\beta}\log\left\{e^{-\beta t}M(\beta) + \int_0^t (1 - e^{-\beta(t-x)})dF(x)\right\}, \quad \text{äëÿ} \quad \beta > 0, \tag{3}$$

та

$$\pi[X,t,0] = \mathrm{E}[X] - t + \int_0^t (t-x)dF(x) \tag{4}$$

де $M(\cdot)$ – це генератриса розподілу $F(\cdot)$. Існує досить багато алгоритмів оснований на заміні розподілу $F(\cdot)$ близьким до нього дискретним розподілом, які використовують представлення (3) та (4) для отримання наближень вартості контрактів перестрахування.

Для $\beta \geq 0$ можна означити односторонню впорядкованість випадкових величин (або їх функцій розподілу) наступним чином. Для величини X з функцією розподілу $F(x)$ та величини Y з функцією розподілу $G(x)$ говоритимемо, що $X <_\beta Y$ (або, що те саме $F(x) <_\beta G(x)$), якщо $\pi[X,t,\beta] \leq \pi[Y,t,\beta]$ для всіх $-\infty < t < +\infty$.

З представлень (1) та (2) з урахуванням того, що $e^{0(x-t)} = 1$ слідує, що для $\beta \geq 0$ умова $X <_\beta Y$ (або $F(x) <_\beta G(x)$) є еквівалентнрою умові

$$\int_t^{+\infty} e^{\beta(x-t)}[F(x)-G(x)]dx \geq 0 \qquad (5)$$

для всіх $t \in \mathrm{R}$.

Більш того, метрика для $\beta \geq 0$ вводиться за допомогою задання наступного співвідношення відстані

$$d_\beta(X,Y) := \sup_{t\in\mathrm{R}} \left| \int_t^{+\infty} e^{\beta(x-t)}[F(x)-G(x)]dx \right|, \quad \text{äëÿ} \quad t \in \mathrm{R}. \qquad (6)$$

З представлень (6), (1) та (2) слідує, що

$$d_0(X,Y) = \sup_{t\in\mathrm{R}} \left| \pi[X,t,0] - \pi[Y,t,0] \right|,$$

та

$$d_\beta(X,Y) = \frac{1}{\beta} \sup_{t\in\mathrm{R}} \left| e^{\beta\pi[X,t,\beta]} - e^{\beta\pi[Y,t,\beta]} \right|, \quad \text{äëÿ} \quad \beta > 0.$$

Тобто, володіючи інформацією про метрику між величинами X та Y можна оцінювати зверху різницю вартості бар'єрного перестрахування між ризиками X та Y.

Представлення (1) та (2) можна обернути. Позначивши $\pi[X,t,\beta] =: p(t)$ для $\beta \geq 0$ з (1) та (2) отримуємо

$$F(x) = e^{\beta p(x)} p'(x) + 1, \quad \text{äëÿ} \quad -\infty < x < +\infty \qquad (7)$$

Користуючись представленням (7) при $\beta = 0$ досить легко бачити, що функцію $p(t)$, для $-\infty < t < +\infty$, можна інтерпретувати як нетто премію бар'єрного перестрахування тоді й лише тоді, коли виконуються наступні дві умови:

(i) функція $p(t)$ неперервна та опукла зверху;

(ii) $p'(t) \to 0$ для $t \to +\infty$ та $p'(t) \to -1$ для $t \to -\infty$.

Більш того, знаючи властивості $p(t)$ можна робити висновки про властивості $F(x)$. Наприклад, знову ж таки у випадку $\beta = 0$, маємо: розривність $p(x)$ в точці x_0 значить, що $F(x)$ має точкову масу величини $p'(x_0+0) - p'(x_0-0)$ в точці x_0; або, функція $F(x)$ є ступінчатою тоді й лише тоді, коли функція $p(\cdot)$ є кусково лінійною, тощо.

Наступна умова демонструє прості, проте досить корисні достатні умови стохастичної впорядкованості.

Теорема 1. *Якщо для ризику* X *з функцією розподілу* $F(x)$ *та ризику* Y *з функцією розподілу* $G(x)$, *а також деякого* $\beta \geq 0$ *виконуються умови:*

$$A_1: \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta x}[F(x)-G(x)]dx \geq 0;$$

A_2: існує $\Delta \in [-\infty, +\infty)$ таке, що $F(x) \leq G(x)$ для $x < \beta$ та $F(x) \geq G(x)$ для $x \geq \beta$

то має місце стохастична впорядкованість $X <_\beta Y$.

Доведення. Для доведення достатньо продемонструвати виконання нерівності (5) для всіх $t \in \mathrm{R}$. У випадку $t \geq \beta$ нерівність (5) виконується завдяки умові A_2, а у випадку $t < \beta$ виконання нерівності (5) слідує з оцінки

$$\int_t^{+\infty} e^{a(x-t)}[F(x)-G(x)]dx \geq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a(x-t)}[F(x)-G(x)]dx \geq 0.$$

↑

Звернемо увагу на те, що у випадку $\beta = 0$ умову A_1 можна представити наступним еквівалентним чином

$$A_1^0: \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} x dG(x),$$

а у випадку $\beta > 0$ – наступним

$$A_1^\beta: \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta x} dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta x} dG(x).$$

Наступна теорема демонструє монотонність стохастичної впорядкованості як функції параметра β.

Теорема 2. *Якщо для функцій розподілу* $F(x)$ *та* $G(x)$ *має місце рерівність* $F(x) <_\beta G(x)$ *для деякого* $\beta \ge 0$, *то для будь-якого* $r > \beta$ *матимемо* $F(x) <_r G(x)$.

Доведення. Для доведення достатньо продемонструвати невід'ємність наступного виразу. Скористаємось інтегруванням частинами

$$\int_t^{+\infty} e^{r(x-t)}[F(x)-G(x)]dx = -\int_t^{+\infty} e^{(r-\beta)(x-t)} \frac{d}{dx}\int_x^{+\infty} e^{\beta(y-t)}[F(y)-G(y)] =$$

$$= \int_t^{+\infty} e^{\beta(x-t)}[F(x)-G(x)]dx + \tag{8}$$

$$+ (r-\beta)\int_t^{+\infty} e^{(r-\beta)(x-t)}\int_x^{+\infty} e^{\beta(y-t)}[F(y)-G(y)]dydx$$

Так як у випадку $F(x) <_\beta G(x)$ нерівність (5) виконується для всіх $t \in \mathrm{R}$, то при $r > \beta$ обидва доданки в (8) будуть невід'ємними. Що й доводить твердження теореми **2.**↑

Наступна теорема демонструє інваріантність стохастичної впорядкованості відностно скінченного та зліченного змішувань, а також скінченного згортання.

Теорема 3. *Нехай* $F_i(x)$ *та* $G_i(x)$, *для* $i = 1, 2, \cdots$, *скінченні чи зліченні послідовності функцій розподілу такі, що* $F_i(x) <_\beta G_i(x)$ *для деякого* $\beta \ge 0$ *та всіх* i. *Нехай також* p_1, p_2, $\cdots$ *– скінченна чи зліченна послідовність ймовірносних мас. Тоді*

(i) $\sum_i p_i F_i(x) <_\beta \sum_i p_i G_i(x)$;

(ii) $F_1 * \ldots * F_n(x) <_\beta G_1 * \ldots G_n(x)$ для всіх $n \in \mathrm{N}$.

Доведення. В справедливості твердження (і) теореми **3** легко переконатися шляхом безпосередньої перевірки використовуючи при цьому еквівалентність (5).

Для доведення твердження (ii) достатньо розглянути частковий випадок $n = 2$, $F_1(x) = F(x),\ G_1(x) = G(x)$ та $F_2(x) = G_2(x) = H(x).$ Тут треба продемонструвати невід'ємність

$$\int_t^{+\infty} e^{\beta(x-t)}[F * H(X) - G * H(x)]dx =$$

$$= \int_t^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta(x-t)}[F(x-y)-G(x-y)]dH(y)dx = \tag{9}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta y}\int_t^{+\infty} e^{\beta(x-y-t)}[F(x-y)-G(x-y)]d(x-y)dH(y)$$

Так як $F(x) <_\beta G(x),$ то внутрішній інтеграл в (9) невід'ємний. Що й доводить твердження теореми **3.**↑

Наступна теорема демонструє вплив на метрику (6) операцій змішування та згортання.

Теорема 4 *Нехай* $F(x)$, $G(x)$, *H(x) – функції розподілу та* $F_i(x)$, $G_i(x)$, *для* $i = 1, 2, \cdots$, *– скінченні чи зліченні послідовності функцій розподілу. Нехай також* p_1, p_2, $\cdots$, *– скінченна чи зліченна послідовність ймовірносних мас. Тоді, для будь-якого* $\beta \ge 0$:

(i) $d_\beta(\sum_i p_i F_i(x), \sum_i p_i G_i(x)) \le \sum_i p_i d_\beta(F_i(x), G_i(x))$

(ii) $d_\beta(F * H(x), G * H(x)) \le d_\beta(F(x), G(x))$;

(iii) $d_\beta(F^{*n}(x), G^{*n}(x)) \le n \cdot d_\beta(F(x), G(x))$.

Доведення. Доведення твердження (і) здійснюється беспосередньо за означенням метрики (6), використавши при цьому те, що модуль суми не менше суми модулів.

Для доведення пункту (ii) зробимо заміну $z = x - y$ в (9) для отримання наступної оцінки зверху

$$\left|\int_t^{+\infty} e^{\beta(x-t)}[F * H(x) - G * H(x)]dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t-y}^{+\infty} e^{\beta(z+y-t)}[F(z)-G(z)]dzdH(y)\right| \le \tag{10}$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{t-y}^{+\infty} e^{\beta(z+y-t)}[F(z)-G(z)]dz\right| dH(y) \le d_\beta(F(x), G(x)).$$

Перейшовши до супремуму в лівій частині нерівності (10) отримуємо твердження (ii) теореми **4**.

Твердження (iii) слідує з n-кратного використання нерівності трикутника та твердження (ii) наступним чином

$$d_\beta(F^{*n}(x),G^{*n}(x)) \le \sum_{k=0}^{n-1} d_\beta(F^{*(n-k)}(x)*G^k(x),F^{*(n-1-k)(x)*G^{*(k+1)}}) \le n\cdot d_\beta(F(x),G(x)). \qquad (11)$$

↑

Приклад 1. Нехай ризик X має функцію розподілу $F(x)$. Нехай також $q-$ це загальна ймовірносна маса ризику X на інтервалі $[a,b]$. Означимо тепер величину Y, яка співпадає з величиною X за межами інтервалу $[a,b]$, а функція розподілу $G(x)$ величини Y має стрибок розміру q в точці $\xi\in[a,b]$. Якщо обрати ξ так, що

$$q\cdot\xi=\int_a^b xdF(x),\quad \text{ïðè}\quad \beta=0,$$

та

$$q\cdot e^{\beta\xi}=\int_a^b e^{\beta x}dF(x),\quad \text{ïðè}\quad \beta>0,$$

то умова A_1 з рівністю та умова A_2 з $\Delta=\xi$ теореми **1** виконуватимуться між функціями розподілу $F(x)$ та $G(x)$. Тому має місце нерівність $Y<_\beta X$. Таку процедуру часто називають процедурою концентрації маси.

Приклад 2. Нехай ризик X має функцію розподілу $F(x)$, а q це знову ж таки загальна ймовірносна маса ризику X на інтервалі $[a,b]$. Означимо тепер ризик Z, який співпадає з ризиком X за межами інтервалу $[a,b]$, а функція розподілу $H(x)$ ризику Z має точкові маси q_1 та q_2 в точках a та b відповідно, при цьому $q_1+q_2=q$. Якщо обрати маси q_1 та q_2 так, що

$$q_1a+q_2b=\int_a^b xdF(x),\quad \text{ïðè}\quad \beta=0,$$

та

$$q_1e^{\beta a}+q_2e^{\beta b}=\int_a^b e^{\beta x}dF(x),\quad \text{ïðè}\quad \beta>0,$$

умови A_1 та A_2 теореми **1** виконуються між функціями розподілу $F(x)$ та $H(x)$. Тому має місце нерівність $X<_\beta Z$.

Цікаво проаналізувати ці конструкції в термінах бар'єрного перестрахування. Для простоти розглянемо випадок $\beta=0$. Графік $\pi[G(x),t,0]$ на $[a,b]$ утворений перетином двох дотичних до $\pi[F(x),t,0]$ в той час як графік $\pi[H(x),t,0]$ на $[a,b]$ це просто пряма лінія, яка сполучає значення в кінцевих точках відрізка $[a,b]$. Це свого роду геометричне обгрунтування нерівностей $Y<_0 X<_0 Z$.

Із альтернативними аспектами теорії бар'єрного перестрахування можна ознайомитися, наприклад, в роботах: Asmussen and Albrecher [2], Boland [3], Bowers et al [4], Bühlmann[5], Dickson [6], De Vylder et al [7], De Vylder et al [8], Kaas et al [9], Kremer[10], Rolski et al[11], Straub [12].

Література

1. Дрозденко В.О. Гранична поведінка страхових премій, залежних від параметрів. Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2010. – 11. – С. 211–224.
2. S. Asmussen, H. Albrecher, *Ruin Probabilities* (*second edition*), World Sientific, Singapore, 2010.
3. P.J. Boland, *Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science*, Chapman & Hall, Boca Raton, 2007.
4. N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbit, *Actuarial Mathematics* (*second edition*), The Society of Actuaries, Illinoice, 1997.
5. H. Bühlmann, *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer, Berlin, 1970.
6. D.C.M. Dickson, *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
7. F.E. De Vylder, M. Goovaerts, J. Haezendonck (editors), *Premium Calculation in Insurance* (*collection of articles*), Kluwer Academic Publishers, Boston, 1984.
8. F.E. De Vylder, M. Goovaerts, J. Haezendonck (editors), *Insurance and Risk Theory* (*collection of articles*), Kluwer Academic Publishers, Boston, 1986.
9. R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory using R*, Springer, Berlin, 2008.
10. E. Kremer, *Applied Risk Theory*, Shaker, Aachen, 1999.
11. T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. Teugels, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, Chichester, 1999.
12. E. Straub, *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer, Berlin, 1988.