ГЕОДЕЗІЯ ТА ЗЕМЛЕВПОРЯДКУВАННЯ

DOI: 10.32347/2786-7269.2022.1.80-93
УДК 528.482

канд. техн. наук, доцент **Гладілін В.М.**,
vgladilin.55@gmail.com ORCID: 0000-0002-0492-3510,
канд. екон. наук, доцент **Сіроштан Т.М.**,
tanya3031@i.ua ORCID: 0000-0001-6791-7081,
Свідерська Т.О., tsv245@gmail.com ORCID: 0000-0001-7623-6958,
Білоцерківський національний аграрний університет,
Шудра Н.С., shudranatasha1984@gmail.com ORCID: 0000-0001-5416-7680,
Чуланов П.О., chulanov.po@knuba.edu.ua ORCID: 0000-0002-6735-3770,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ПОСЛІДОВНИЙ АНАЛІЗ КОНТРОЛЬНО - ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ В ТОПОГРАФО -ГЕОДЕЗИЧНОМУ ВИРОБНИЦТВІ

При виконанні топографічної зйомки, при виконанні планувальних, будівельно – монтажних та інших робіт, необхідно виконувати контрольно – геодезичні вимірювання якості їх виконання. До теперішнього часу контрольно – геодезичні вимірювання встановлювались з різних міркувань, які не мали цілком конкретного науково – виробничого підходу.

Ключові слова: послідовний аналіз; якість вимірювань; контрольно-геодезичні вимірювання.

Вступ. Найбільш правильним буде виконання контрольно – геодезичних вимірювань по методу ймовірнісно – статистичного послідовного аналізу, основи якого були розроблені Вальдом [1]. Для оптимального визначення прийомів кутових вимірювань в тріангуляції послідовний аналіз вже використовувався [4]. Але необхідно відмітити, що розрахункове число вимірювань в тріангуляції (полігонометрії, трилатерації, *GPS*) заздалегідь відоме, воно дається в інструкції [6].

При використанні контрольно – геодезичних вимірювань, кількість їх заздалегідь невідома [13], для цього виконано доопрацювання теорії послідовного аналізу з використанням марковських випадкових процесів [8].

Основна частина. Для кожної кількості вимірів заздалегідь обчислюємо приймальні та бракувальні числа за формулами [1].

$$\begin{cases} a_\nu = \frac{\sigma_1^2 \times \sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\left[2 \times ln\frac{\beta}{1-\alpha} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2\right] \\ r_\nu = \frac{\sigma_1^2 \times \sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\left[2 \times ln\frac{1-\beta}{\alpha} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2\right] \end{cases} \quad (1)$$

В цих формулах: σ_1, σ_2 – стандартні середні квадратичні відхилення вимірів, відповідно до сприятливих та несприятливих умов, які в подальшому будуть граничними стандартами; α – ймовірність забракувати роботи, коли в дійсності вони доброякісні; β – ймовірність прийняти роботи доброякісними, коли в дійсності вони підлягають бракуванню; ν – число степенів вільності, якщо відоме дійсне значення величини (вимірюваної), яка контролюється , то $\nu = n$, де n – кількість вимірів (якщо дійсне значення невідоме, то $\nu = n - 1$).

Після кожного виміру обчислюється накопичена сума квадратів відхилень $[\delta^2]$ контрольних вимірів x_i від їх дійсного значення $M(x)$ або від середнього арифметичного значення x_{cp}, після чого ця сума зрівнюється з приймальним і бракувальним числами, при відповідній кількості вимірів.

Розглянемо деякі типові приклади по контролю якості топографо-геодезичних робіт, які виконуються.

Обчислимо за формулами (1) значення приймальних і бракувальних чисел при різних α і β для довірчої ймовірності $p = 0.95$ [7] і одиничного стандарту $\sigma(x)$=1, які наведені в таблиці 1.

Таблиця 1.

Обчислення приймальних a_ν та бракувальних r_ν чисел

ν	$P = 0.95$; α=0.05; β=0.05		$P = 0.95$; α=0.10; β=0.05		$P = 0.95$; α=0.10; β=0.10	
	a_ν	r_ν	a_ν	r_ν	a_ν	r_ν
1	2	3	4	5	6	7
1	0.52780	2.87251	0.54933	2.59653	0.82531	2.57500
2	1.11212	4.32709	1.14164	3.94867	1.52005	3.91915
3	1.77943	5.64827	1.81495	5.19289	2.27033	5.15737
4	2.49702	6.91703	2.53760	6.39677	3.05786	6.35619
5	3.24790	8.15483	3.29296	7.57726	3.87052	7.53221
6	4.02224	9.37107	4.07135	8.74149	4.70093	8.69238
7	4.81498	10.57093	4.86783	9.89344	5.54533	9.84059
8	5.62214	11.75860	5.67848	11.03632	6.40077	10.97997
9	6.44112	12.93537	6.50075	12.17096	7.26515	12.11134
10	7.26942	14.10276	7.33216	13.29845	8.13647	13.23571
11	8.10614	15.26183	8.17184	14.41957	9.01409	14.35387
12	8.95065	16.41551	9.01919	15.53686	9.89783	15.46833
13	9.80141	17.56302	9.87267	16.64944	10.78624	16.57818
14	10.65732	18.70441	10.73121	17.75724	11.67838	17.68335
15	11.51844	19.84136	11.59485	18.86171	12.57450	18.78530
16	12.38409	20.97385	12.46296	19.96279	13.47401	19.83393

1	2	3	4	5	6	7
17	13.25402	22.10254	13.33526	21.06103	14.37677	20.97979
18	14.12762	23.22799	14.21118	22.15684	15.28233	22.07328
19	15.00474	24.35020	15.09054	23.25020	16.19054	23.16440
20	15.88484	25.46817	15.97283	24.34017	17.10083	24.25218

Цю таблицю зручно використовувати під час розрахунку приймальних та бракувальних чисел для різних стандартів, необхідно знайти добуток табличних значень на квадрат стандарту, відмінного від $\sigma(x)$=1. Крім того, таблиця 1 буде використовуватися для розрахунку перехідних ймовірностей, при знаходженні максимального числа контрольних вимірювань по методу марковського випадкового процесу [8].

Приклад. Контрольовані вимірювання проводяться на забудованій території і порівнюються з відстанями, визначеними на топографічному плані, згідно з [6] розбіжність між точками об'єктів або контурів ситуації та найближчими точками знімальної основи не повинна перевищувати 1 мм. . При зйомці в М 1: 500 1мм на плані відповідає 0,5 м на місцевості.

Для виконання контрольних вимірювань, які не корельовані [10, 12] та їх послідовного аналізу необхідно заздалегідь скласти таблицю приймальних і бракувальних чисел, які можна розрахувати за числами табл. 1 шляхом множення їх на квадрат стандарту.

Значення стандарту буде знайдено за граничним значенням Δ = 1 мм на плані або, Δ = 50 см на місцевості, для довірчої ймовірності p = 0,95 буде

$$\sigma(x) = \frac{\Delta}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ см}. \qquad (2)$$

Встановимо довірчу ймовірність [9] p = 0,95 і значення $\alpha = \beta = 0{,}05$. Обчислюємо приймальні та бракувальні числа, використовуючи перші два стовпці чисел у табл. 1, які помножуються на $\sigma^2(x) = 25^2 = 625$, які наведені в табл. 2.

Таблиця 2.

Числа приймальні та бракувальні

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_v	330	595	1112	1561	2030	2514	3009	3514	4026	4543	5066	5594
r_v	1795	2704	3530	4323	5097	5857	5607	7349	8085	8814	9539	10260

У цьому прикладі контрольні вимірювання вважаються істинними [11], тому кількість вимірювань n буде дорівнювати кількості ступенів свободи v.

Виконуємо перший контрольний вимір до контурів місцевості. Різниця між відстанню, виміряною рулеткою, і відстанню, отриманою на плані відповідно до масштабу, вийшла 40 см, піднесемо її до квадрата і порівняємо з приймальним та бракувальним числами для $\nu = 1$, табл. 2, з якого видно, що квадрат різниці $\delta_1^2 = 1600$ знаходиться в інтервалі між приймальним та бракувальним числами, тобто $a_1 = 330 < \delta_1^2 = 1600 < r_1 = 1795$, з цього робимо висновок, що контрольні вимірювання слід продовжити. Після виконання другого контрольного вимірювання різниця між ним і виміряним на плані становить 25 см, квадрат якого $\delta_2^2 = 625$.

Потім додаємо квадрати відхилень (або різниці першого і другого) контрольних вимірювань, отримуємо суму $[\delta^2]_2 = 1600 + 625 = 2225$. Надалі сума квадратів відхилень буде зростати, тому буде накопичуватися. Результати отриманих різниць, їх квадрати та накопичені суми наведені в таблиці 3.

Таблиця 3.

Різниці та накопичені суми їх квадратів

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δ	40	25	15	10	15	30	15	0	5
δ^2	1600	625	225	100	225	900	225	0	25
$[\delta^2]$	1600	2225	2500	2600	2825	3725	3950	3950	3975

Після другого вимірювання порівнюємо суму квадратів відхилень з приймальним та бракувальним числами для $\nu = 2$, табл. 3, отримаємо нерівність $a_2 = 695 < [\delta^2]_2 = 2225 < r_2 = 2704$, і знову приходимо до висновку, що контрольні вимірювання необхідно продовжувати.

При третьому контрольному вимірюванні отримуємо різницю 15 см і накопичену суму $[\delta^2]_3 = \delta_3^2 + [\delta^2]_2 = 225 + 2225 = 2500$, і також порівнюємо її з приймальними та бракувальними числами для $\nu = 3$, і так далі продовжуємо ці визначення, отже після дев'ятого виміру знаходимо, що накопичена сума квадратів відхилень менша ніж приймальне число для $\nu = 9$, тобто $[\delta^2]_9 = \delta_9^2 + [\delta^2]_8 = 25 + 3950 = 3975 < a_9 = 4026$ табл. 3, в наслідок чого контрольні вимірювання зупиняємо і вважаємо виконану топографічну зйомку доброякісною.

В інструкції [6] вказано, що кількість граничних розбіжностей повинна бути не більшою 10% загального числа контрольних вимірів.

В цьому прикладі виконано дев'ять контрольних вимірювань, але в жодному з них різниця не доходила до граничного значення [14] 50 см, якби довелося виконати десяте вимірювання, при якому різниця була б рівній граничній і припустимо, що на восьмому вимірюванні різниця також рівна 50 см, тоді виконану роботу прийшлося забракувати, тобто $[\delta^2]_{10} = \delta_8^2 + \delta_9^2 + \delta_{10}^2 + [\delta^2]_7 = 3950 + 2500 + 25 + 2500 = 8975 > r_{10} = 8814$, в цьому прикладі допущено дві граничні різниці, і приходимо до висновку, що ці роботи потрібно забракувати. Таким чином, на перший погляд здається, що все погоджується з вимогами інструкції, тобто на десять вимірів одне граничне значення допускається, тоді робота, яка наведена у прикладі не буде забракована, а контроль необхідно продовжити. Якщо уважно придивитись на різниці в цьому прикладі, то помітно, що вони здебільшого далекі від граничних значень, а на практиці це буває зрідка. Зазвичай, при виконанні зйомки різниці мають тенденцію прямувати до граничних значень, тому стандарт обчислень за формулою (2) не буде задовольняти, його величина дещо занижена, тобто по точності завищена.

Пропонується така методика визначення стандарту по граничному значенню. У відповідності з інструкцією [6] число граничних різниць не повинно перевищувати 10%, тобто допускається одна різниця на десять контрольних вимірів, отже, необхідно підібрати таку довірчу імовірність p і відповідно їй коефіцієнт t_p, щоб добуток цього коефіцієнта на стандарт $\sigma(x)$ був рівний значенню меншому за граничне

$$t_p * \sigma(x) = \Delta - \omega, \tag{3}$$

де ω – невеликий інтервал похибок вимірів або різниць, число яких не перевищує 10% загальної кількості. Виразу (3) будуть задовольняти такі значення t_p =1.5, $\sigma(x)$ = 30 см, ω = 5см (точність визначення відстані по масштабній лінійці у М 1:500). Значенню t_p = 1.5 нормального розподілення відповідає довірча ймовірність p = 0.8664 (або рівню значущості q =0.1336), так як $t_p*\sigma(x)$ = 1.5*30 = 45 см, то при даному рівні похибки або різниці, що перевищують 45 см, а також похибки в 50 см і більше будуть складати 13.36%, самі ж граничні похибки не будуть перевищувати 10%, що відповідає вимогам інструкції.

З прикладу видно, що контроль відстаней виміряних з плану і виміряних в натурі заслуговує уваги, таким чином для контролю якості приймаємо стандарт $\sigma(x)$ = 30 см.

Наприклад, для контролю зйомки рельєфу з висотою перетину 0.5 м і нахилом місцевості до 3^{o} необхідно визначити стандарт вимірювань з обчислення по ньому приймальних і бракувальних чисел. Допустимі розходження між контрольними пікетами і відмітками знайденими на плані шляхом інтерполювання у відповідності з [6] не повинні перевищувати 25 см, як і в попередньому прикладі число різниць, які досягають граничних значень, повинно бути менше 10% загальної кількості контрольних пікетів.

Виходячи з цієї умови, як і в попередньому прикладі і у відповідності з (3) знайдемо $t_p*\sigma(x)$ = 25 – 1, ω = 1 см, так як відмітки в М 1:500 визначаються з точністю до одного сантиметра, для t_p =1.5, стандарт $\sigma(x)$ = 24/1.5 = 16 см.

Число похибок, перевищуючих 24 см, буде складати 13.36% загальної кількості контрольних вимірювань, приймальні та бракувальні числа обчислюються аналогічно як у попередньому прикладі. В тих випадках, коли немає додаткових обмежень, а вказано граничне значення різниць, для визначення стандарту користуємось формулою

$$\sigma(x) = \frac{\Delta}{t_p}, \quad (4)$$

де t_p – аргумент функції нормального розподілу, який вибирається з таблиць цього розподілу по довірчій ймовірності p.

Випадкова величина $[\delta^2]$ – сума квадратів відхилень результатів контрольно – геодезичних вимірювань від їх дійсних значень, або від їх середнього арифметичного, яку порівняємо з приймальними a_v та бракувальними r_v числами, є ніщо інше, як розподіл χ^2 при стандартному відхиленні $\sigma(x) = 1$, відповідно в цьому випадку величини підпорядковані χ^2 – розподіленню.

Випадкова величина

$$\chi^2 = \frac{(n-1)m^2(x)}{\sigma^2(x)} \quad (5)$$

підпорядкована також χ^2 – розподіленню, так як середня квадратична помилка

$$m^2(x) = \frac{[\delta^2]}{n-1}, \quad (6)$$

Підставимо (6) в (5), одержимо

$$\chi^2 = \frac{[\delta^2]}{\sigma^2(x)}, \quad (7)$$

якщо $\sigma(x) = 1$, тоді $[\delta^2] = \chi^2$, важливо знайти ймовірність потрапляння випадкової величини $[\delta^2]$ в інтервали

$$0 \div a_\nu;\ a_\nu \div r_\nu;\ r_\nu \div +\infty, \quad (8)$$

такі ймовірності будемо знаходити вважаючи, що a_v та r_v підпорядковані також χ^2 розподіленню при $\sigma(x) = 1$.

Процес послідовного аналізу контрольних вимірювань може закінчитись прийняттям одного з двох рішень: або вимірювання будуть прийняті як доброякісні, якщо $[\delta^2]_v < a_v$ або вони будуть забраковані, якщо $[\delta^2]_v > r_v$ і цей процес можна розглядати як неоднорідний марковський випадковий процес з дискретними станами, для цього необхідно вірно скласти модель марковського процесу, яка є головною ланкою самого марковського процесу.

Необхідно знайти ймовірності потрапляння випадкової величини $[\delta^2]_v$ в різні інтервали відповідного вимірювання, тобто в інтервал приймання вимірювань $0 \div a_\nu$, в інтервал продовження вимірювань $a_\nu \div r_\nu$ та в інтервал бракування вимірювань $r_\nu \div +\infty$, при чому ці ймовірності необхідно визначити дуже точно, так як ймовірність закінчення процесу аналізу практично повинна дорівнювати одиниці. Для цієї цілі визначені більш точні значення χ^2 (шість значущих цифр (табл. 2), можливо в сучасності такі дослідження проведені, але я користуюсь таблицями [8]), по яким знаходимо a_ν та r_ν, за якими при $\sigma(x) = 1$ обчислюємо ймовірності потрапляння випадкових величин $[\delta^2]_\nu$ в приймальний інтервал, інтервал продовження контрольних вимірювань або бракувальний інтервал (8).

Розглянемо приклади знаходження ймовірності потрапляння випадкової величини $[\delta^2]_\nu$ в інтервали (8), задаємося ймовірністю $p = 0.95$ та $\alpha = \beta = 0.05$ і числом ступенів вільності $\nu = 1$. Визначимо ймовірність потрапляння в інтервал приймання вимірювань (табл. 3) $0 \div a_\nu; 0 \div 0.52780$, таку ймовірність будемо знаходити наступним шляхом. Ймовірність того, що випадкова величина $[\delta^2]_\nu = \chi^2$ перевищить нуль дорівнює одиниці, тобто $P([\delta^2]_\nu > 0) = 1$, а ймовірність того, що $[\delta^2]_\nu$ перевищить $a_1 = 0.52780$ обчислимо за формулою Бесселя:

$$P([\delta^2] > a_1) = 10^{-5}[47950 + 0.556(-2118) - 0.061716(-1974 + 2284)] = 0.46753,$$

за формулою (12) $U = 0.556$, $U(1\text{-}U)/4 = 0.061716$.

Для значень $[\delta^2]_\nu < 1$ виконаємо контроль, тоді

$$\phi(\sqrt{a_1}) = 1 - 0{,}5 * 0.46753 = 0.7662335;\ \sqrt{a_1} = 0.726498,$$

$a_1 = 0.52780$, $\chi_1^2 = 0$, $p_1 = 1.00000$, $\chi_2^2 = 0.52780$, $p_2 = 0.46753$, тоді ймовірність потрапляння в інтервал $0 \div a_\nu; 0 \div 0.52780$ буде $P_{12} = 1\text{-}0.46753 = 0.53247$.

Ймовірність потрапляння випадкової величини $[\delta^2]_\nu$ в інтервал продовження вимірювань (табл. 3) $a_1 \div r_1; 0.52780 \div 2.87251$, обчислюється як різниця ймовірності кінців інтервалу, які визначаються за формулою Бесселя, але для лівого кінця інтервалу ймовірність вже отримана, необхідно обчислити ймовірність для правого кінця інтервалу

$$P([\delta^2] > r_1) = 10^{-5}[9426 - 0.36255 * 1100 - 0.23107(-962 + 1260)/4] = 0.09010,$$

$U = 0.36255$, $U*(1\text{-}U) = 0.231107$, одержали такі дані: $\chi_1^2 = 0.52780$, $p_1 = 0.46753$, $\chi_2^2 = 2.87251$, $p_2 = 0.09010$, відповідно ймовірність потрапляння в інтервал $0 \div a_\nu; 0 \div 0.52780$ буде дорівнювати $P_{11} = 0.46753 - 0.09010 = 0.37743$.

Ймовірність потрапляння випадкової величини $[\delta^2]_\nu$ в інтервал бракування вимірювань $r_\nu \div +\infty;\ 2.87251 \div +\infty$ визначиться як ймовірність того, що випадкова величина $[\delta^2]_\nu$ перевищить r_1, тобто $P_{13} = P([\delta^2]_\nu > r_1) = 0.09010$. Сума всіх трьох ймовірностей повинна дорівнювати одиниці, тобто $P_{11} + P_{12} + P_{13} = 1$, або $0.37743 + 0.53247 + 0.09010 = 1.00000$.

На рис. 1 показані в загальному випадку ймовірності $P([\delta^2]_\nu > 0) = 1$, $P([\delta^2]_\nu > a_\nu)$ та $P([\delta^2]_\nu > r_\nu)$, при відповідному числі ступенів вільності ν.

Ці ймовірності дорівнюють площам під кривою щільності ймовірності χ^2 – розподілення, розташованим праворуч від відповідних ординат, як показано стрілками, і які прямують до нескінченності, сума всіх трьох площ, обмежених по осі абсцис інтервалами $0 \div a_\nu;\ a_\nu \div r_\nu;\ r_\nu \div +\infty$, дорівнює загальній площі, обмеженій зверху загальною кривою, знизу абсцисою χ^2, тобто дорівнює одиниці.

Ймовірності потрапляння випадкової величини $[\delta^2]_\nu$ у вказані інтервали, при відповідному числі ступенів вільності ν, визначаються по запропонованим рівнянням:

$$
\begin{aligned}
P_{12}^{(\nu)} &= 1 - P([\delta^2]_\nu > a_\nu),\\
P_{11}^{(\nu)} &= P([\delta^2]_\nu > a_\nu) - P([\delta^2]_\nu > r_\nu) \qquad (9)\\
P_{13}^{(\nu)} &= P([\delta^2]_\nu > r_\nu).
\end{aligned}
$$

Рис.1. Щільність ймовірності χ^2 – розподілення з вказаними бракувальними інтервалами.

Для довірчої ймовірності p = 0.95, ймовірностей $\alpha = \beta = 0.05$; $\alpha = 0.10$ $\beta = 0.05$ та $\alpha = \beta = 0.10$, обчислені ймовірності потрапляння випадкових величин $[\delta^2]_\nu$ в ці три розглянуті інтервали, для різних ступенів вільності $\nu = 14$, $\nu = 12$ та $\nu = 10$, такі ймовірності обчислені як і в раніше розглянутих прикладах, за формулою Бесселя і за рівняннями (9) наведені в табл. 4.

Таблиця 4.

Ймовірності знаходження випадкової величини в інтервалах (8)

ν	$P_{11}^{(\nu)}$	$P_{12}^{(\nu)}$	$P_{13}^{(\nu)}$
1	**2**	**3**	**4**
$p = 0.95$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.05$			
1	0.37743	0.53247	0.09010
2	0.45854	0.42654	0.11492
3	0.48938	0.38058	0.13004
4	0.50483	0.35483	0.14034
5	0.51398	0.33818	0.14791

1	**2**	**3**	**4**
6	0.51991	0.32633	0.15376
7	0.54206	0.31748	0.15846
8	0.52718	0.31052	0.16230
9	0.52952	0.30492	0.16556
10	0.53143	0.30021	0.16836
11	0.53294	0.29624	0.17082
12	0.53420	0.29286	0.17294
13	0.53526	0.28991	0.17483
14	0.53616	0.28728	0.17656
15	0.53695	0.28495	0.17810
$p = 0.95$, $\alpha = 0.10$, $\beta = 0.05$			
1	0.35150	0.54141	0.10709
2	0.42620	0.43494	0.13886
v	$P_{11}^{(v)}$	$P_{12}^{(v)}$	$P_{13}^{(v)}$
3	0.45348	0.38832	0.15820
4	0.46651	0.36208	0.17141
5	0.47380	0.34508	0.18112
6	0.47837	0.33298	0.18865
7	0.48139	0.32392	0.19469
8	0.48353	0.31682	0.19965
9	0.48509	0.31106	0.20385
10	0.48630	0.30624	0.20746
11	0.48716	0.30217	0.21067
12	0.48791	0.29871	0.21338
$p = 0.95$, $\alpha = 0.10$, $\beta = 0.10$			
1	0.25507	0.63637	0.10856
2	0.32674	0.53234	0.14092
3	0.35760	0.48177	0.16063
4	0.37411	0.45181	0.17408
5	0.38424	0.43179	0.18397
6	0.39107	0.41730	0.19163
7	0.39594	0.40628	0.19778
8	0.39959	0.39757	0.20284
9	0.40243	0.39046	0.20711
10	0.40472	0.38449	0.21079

Ймовірності P_{12} і P_{13} є перехідними, а P_{11} є ймовірністю затримки, для кожного числа ступенів вільності v такі ймовірності обчислюються.

Для визначення максимального числа вимірів, при яких процес аналізу скінчиться, складемо граф станів [8], який наведено на рис. 2, круговими стрілками вказані ймовірності затримки у відповідних станах, а напрями переходу процесу аналізу із стану в стан вказані прямими стрілками.

З рис. 2 видно, що процес аналізу вимірів знаходиться в одному із станів:

S_1 – вимірювання необхідно продовжити;

S_2 – вимірювання приймаються як доброякісні;

S_3 – вимірювання бракуються.

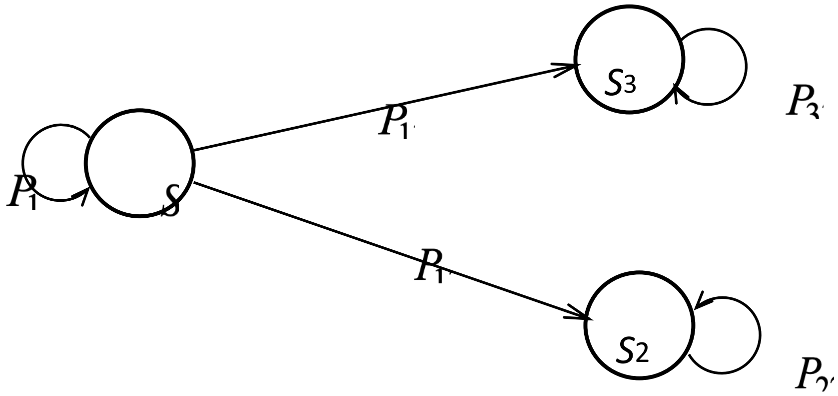

Рис. 2. Граф станів випадкового марковського процесу для визначення максимальної кількості контрольних вимірювань.

Ймовірностей затримки для даного графу станів буде три: P_{11}, P_{22}, P_{33}, для даного графу станів ці ймовірності дорівнюють

$$\begin{gathered} P_{11} = 1 - (P_{12} + P_{13}); \\ P_{22} = 1 \\ P_{33} = 1 \end{gathered} \tag{10}$$

Для кожного числа ступенів вільності складається квадратна матриця перехідних ймовірностей і ймовірностей затримок, причому ймовірності затримок знаходяться на головній діагоналі матриці, тобто

$$\left|P_{ij}^{(\nu)}\right| = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} \tag{11}$$

індекс (ν) вказує на число ступенів вільності, при числі ступенів вільності $\nu = 1$ матриця перехідних ймовірностей (табл. 4) набуде вигляду

$$\left[P_{ij}^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 0.37743 & 0.53247 & 0.09010 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В початковий момент, коли виконано одне контрольне вимірювання, процес аналізу знаходиться в стані S_1, і контрольні вимірювання необхідно продовжити. Ймовірності станів або ймовірності того, що процес аналізу буде знаходиться у відповідних станах перед початком вимірювань при v = 0 будуть рівні $P_1(0)$ = 1, $P_2(0)$ = 0, $P_3(0)$ = 0. Ймовірності станів на етапі v = 1 та наступних знаходяться як добуток матриці – рядка попереднього етапу на квадратну матрицю перехідних ймовірностей поточного етапу, тобто

$$|P_1(\nu), P_2(\nu), P_3(\nu),| = |P_1(\nu-1), P_2(\nu-1), P_3(\nu-1),| * \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} \quad (12)$$

Для числа ступенів вільності v = 1 ймовірності станів будуть дорівнювати $P_1(1)$=1*0.37743 + 0*0+ 0*0 = 0.37743, $P_2(1)$ = 1*0.53247 + 0*1+ 0*0 = 0.53247, $P_3(1)$ = 1*0.09010 + 0*0 + 0*1 = 0.09010. $P_1(1)$ + $P_2(1)$ + $P_3(1)$ = 1.00000.

При числі ступенів вільності v = 2 і матриця перехідних ймовірностей (табл. 4) набуде вигляду

$$\left[P_{ij}^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 0.45854 & 0.42654 & 0.11492 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

За формулою (12) знайдемо ймовірності всіх трьох станів та їх суму:
$P_1(2)$ = 0.37743*0.45854 = 0.17307, $P_2(2)$ = 0.37743*0.42654 + 0.53247 = 0.69346, $P_3(2)$ =0.37743*0.11492 + 0.09010 = 0.13347, $P_1(2)$ + $P_2(2)$ + $P_3(2)$ = 1.00000.

Подальші обчислення для наступного числа ступенів вільності виконувались аналогічно. Для v = 15 та v = 16 ймовірності станів відповідно будуть дорівнювати:
$P_1(15)$=0.00004, $P_2(15)$=0.81849 $P_3(15)$=0.18147, $P_1(15)$+ $P_2(15)$+ $P_3(15)$=1.00000
$P_1(16)$=0.00002, $P_2(16)$=0.81850 $P_3(16)$=0.18148, $P_1(16)$+ $P_2(16)$+ $P_3(16)$=1.00000
Таким чином марковським випадковим процесом встановлено, що процес послідовного аналізу контрольних вимірювань скінчиться для числа ступенів вільності v = 17 з ймовірностями станів, які дорівнюють $P_1(17)$=0.00001, $P_2(17)$=0.81851 $P_3(17)$=0.18148, $P_1(17)$+ $P_2(17)$+ $P_3(17)$=1.00000, при точності обчислення ймовірностей станів 10^{-5} прийняттям одного з двох рішень: вимірювання приймаються у якості доброякісних з ймовірністю 0.81851 або вимірювання бракуються з ймовірністю 0.18148, ймовірність продовження контрольних вимірювань після v = 17 буде малою величиною і дорівнює 0.00001 і надалі буде знижуватись, і аналіз буде закінчуватись для даних p = 0.95, α=β=0.05. Взагалі послідовний аналіз може закінчуватись при значно меншому числі ступенів вільності. Необхідно відмітити, що ймовірність забракувати роботи 0.18148 є досить жорсткою, а це означає, що такі дані

потрібно брати для розрахунку приймальних та бракувальних чисел для контролю якості дуже відповідальних робіт.

Із розрахунку максимального числа контрольних вимірів можемо зробити висновок про правильність вибору ймовірностей p, α, β, також такий розрахунок важливий для планування контрольно – геодезичних вимірювань.

Обчислені ймовірності станів для p = 0.95, α = 0.10, β=0.05, при числі ν = 12, дорівнюють $P_1(12)$=0.00009, $P_2(12)$=0.79738 $P_3(12)$=0.20254, $P_1(12)$+ $P_2(12)$+ $P_3(12)$=1.00000. Максимальне число контрольних вимірів буде 15, при точності обчислення станів 10^{-5}, тут видно, що ймовірність відбракування збільшена у порівнянні з першим випадком.

Але ймовірності станів для ν = 10 дорівнюють $P_1(10)$=0.00004, $P_2(10)$=0.83346, $P_3(10)$=0.16650, $P_1(10)$+ $P_2(10)$+ $P_3(10)$=1.00000, це означає, що з шести (1: 0.16650 = 6) ділянок топографічної зйомки, які контролюються одна буде забракована, але це не означає, що вся зйомка буде забракована, так як при контролі вибирають найбільш вразливі ділянки.

В даному випадку ймовірність відбракування зменшена у порівнянні з першим та другим випадком, а максимальне число ν = 12.

Висновки. Послідовний аналіз контрольно – геодезичних вимірювань дає перевагу в тому, що повністю використовується вся отримана інформація про якість для прийняття рішень, а не лише її частину, як це вказано в інструкції – судження про якість складається лише по максимальним різницям. Таким чином цей аналіз регулює інструктивні допуски і є можливість більш гнучким підходом до контролю якості топографічної зйомки але для цього необхідно вірно вибрати в кожному випадку значення стандарту $\sigma(x)$, величину довірчої ймовірності p, та задатися ймовірностями α та β.

Із трьох наведених розрахунків максимального числа контрольних вимірювань можна зробити висновок, що для контролю якості менш відповідальних видів робіт, довірчу ймовірність p потрібно зменшувати, а ймовірності α, β збільшувати на невеликі величини (приблизно до 0.10), при цьому ймовірність відбракування буде зменшуватись.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вальд А. Последовательный анализ. – М.: Физматгиз, 1960. -328 с.

2. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навчальний посібник. – К.: КНУБА, 2003. – 216 с.

3. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Выща школа, 1988. – 439 с.

4. Гладілін В.М., Гончаренко О.С., Шудра Н.С. Моделювання імовірності розподілу кутових невязок в мережі тріангуляції // Вісник Астрономічної школи, 2014. – Т. 10, № 1. – С. 79 – 84.

5. Гладілін В.М., Шудра Н.С., Дубкова А.О. Ймовірнісно – статистичний послідовний аналіз результатів геодезичних вимірів // Вісник Астрономічної школи, 2017. – Т. 13, № 2. – С. 116 – 122.

6. Інструкція з топографічного знімання у масштабах 1 : 5000, 1 : 2000, 1 : 1000, 1 : 500. ГКНТА – 2.04 – 02 – 98. – К.: Укргеодезкартографія, 1999. – 156 с.

7. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

8. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.

9. Видуев НГ., Кондра Г.С. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений. М.: Недра, 1969. – 320 с.

10. Gladilin V., Belenok V., Kryachok S., Siroshtan T., Hamalii I. New Formula for Finding the Correlation Coefficient in Geodetic Measurements for a Small Number of Observations. Geodetski list, 2022, 2, p. 153-168

11. Гладілін В.М., Гладіліна Н.М., Ковтун М.Т. Обгрунтування середнього арифметичного, залежного від структури розподілу вимірювання кутів.// Вісник геодезії та картографії. – 1996. - № 2(6). – С.28-36.

12. Sachs Lothar. Statistishe Aswertungsmethoden. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972. - 600 p.

13. Надійність техніки. Терміни та визначення: ДСТУ 2860-94. К.: Держстандарт України, 1994. – 36 с.

14. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991. – 304 с.

Ph.D., associate professor **Gladilin Valeriy**,
Ph.D.,associate professor **Siroshtan Tatiana**, Assistant **Sviderska Tetyana**,
Belotserkovsky National Agrarian University,
Senior Lecturer **Shudra Nataliia**, Senior Lecturer **Chulanov Petro**,
Kyiv National University of Construction and Architecture

SEQUENTIAL ANALYSIS OF CONTROL MEASUREMENTS IN TOPOGRAPHIC AND GEODETIC PRODUCTION

When performing topographical surveying, when performing planning, construction - installation and other works, it is necessary to perform control - geodetic measurements of the quality of their execution. Until now, control and geodetic measurements were established for various reasons, which did not have a completely specific scientific and industrial approach.

It will be most correct to perform control-geodetic measurements using the method of probabilistic-statistical sequential analysis, the foundations of which were developed by Wald.

Sequential analysis has already been used to optimally determine the methods of angular measurements in triangulation, but it should be noted that the calculated number of measurements in triangulation (polygonometry, trilateration, GPS) is known in advance, it is given in the instructions.

When using control-geodetic measurements, their number is unknown in advance, for this purpose, the theory of sequential analysis using Markov random processes was refined.

Keywords: sequential analysis; Quality of measurements; control-geodetic measurements.

REFERENCES

1. Vald A. Posledovatelnyi analyz. – M.: Fyzmathyz, 1960. -328 s. {in Russian}.

2. Voitenko S.P. Matematychna obrobka heodezychnykh vymiriv. Teoriia pokhybok vymiriv: navchalnyi posibnyk. – K.: KNUBA, 2003. – 216 s. {in Ukrainian}.

3. Hykhman Y.Y., Skorokhod A.V., Yadrenko M.Y. Teoryia veroiatnostei y matematycheskaia statystyka. – K.: Vyshcha shkola, 1988. – 439 s. {in Russian}.

4. Hladilin V.M., Honcharenko O.S., Shudra N.S. Modeliuvannia imovirnosti rozpodilu kutovykh neviazok v merezhi trianhuliatsii // Visnyk Astronomichnoi shkoly, 2014. – T. 10, № 1. – S. 79 – 84. {in Ukrainian}.

5. Hladilin V.M., Shudra N.S., Dubkova A.O. Ymovirnisno – statystychnyi poslidovnyi analiz rezultativ heodezychnykh vymiriv // Visnyk Astronomichnoi shkoly, 2017. – T. 13, № 2. – S. 116 – 122. {in Ukrainian}.

6. Instruktsiia z topohrafichnoho znimannia u masshtabakh 1 : 5000, 1 : 2000, 1 : 1000, 1 : 500. HKNTA – 2.04 – 02 – 98. – K.: Ukrheodezkartohrafiia, 1999. – 156 s. {in Ukrainian}.

7. Bolshev L.N., Smyrnov N.V. Tablytsy matematycheskoi statystyky. – M.: Nauka, 1983. – 416 s. {in Russian}.

8. Tykhonov V.Y., Myronov M.A. Markovskye protsessy. – M.: Sovetskoe radyo, 1977. – 488 s. {in Russian}.

9. Vyduev N.H., Kondra H.S. Veroiatnostno- statystycheskyi analyz pohreshnostei yzmerenyi. M.: Nedra, 1969. – 320 s. {in Russian}.

10. Gladilin V., Belenok V., Kryachok S., Siroshtan T., Hamalii I. New Formula for Finding the Correlation Coefficient in Geodetic Measurements for a Small Number of Observations. Geodetski list, 2022, 2, p. 153-168. {in English}.

11. Hladilin VM., Hladilina N.M., Kovtun M.T. Obhruntuvannia serednoho aryfmetychnoho, zalezhnoho vid struktury rozpodilu vymiriuvannia kutiv.// Visnyk heodezii ta kartohrafii. – 1996. - № 2(6). – S.28-36. {in Ukrainian}.

12. Sachs Lothar. Statistishe Aswertungsmethoden. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972. - 600 p. {in Deutsch}.

13. Nadiinist tekhniky. Terminy ta vyznachennia: DSTU 2860-94. K.: Derzhstandart Ukrainy, 1994. – 36 s. {in Ukrainian}.

14. Novytskyi P.V., Zohraf Y.A. Otsenka pohreshnostei rezultatov yzmerenyi. L.: Enerhoatomyzdat. Lenynhr. otd-nye, 1991. – 304 s. {in Russian}.