МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЕКОНОМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ І ТЕХНОЛОГІЙ

Методичні рекомендації

до вивчення дисципліни

“ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ”
МОДУЛЬ 2

для студентів галузі знань 0305 "Економіка і підприємництво"
(нові шифр і назва)
спеціальності 6.030504 “Економіка і підприємництво”
6.030509 “Облік і аудит”
6.030508 “Фінанси і кредит”
(нові шифр і назва)

Кредитно-трансферна система
організації освітнього процесу

Біла Церква

2017

Економіко-математичне моделювання. Модуль 2. – Методичні рекомендації до вивчення дисципліни “Економіко-математичне моделювання ” для студентів галузі знань 0305 "Економіка і підприємництво" напряму підготовки 6.030504 “Економіка і підприємництво” 6.030509 “Облік і аудит” 6.030508 “Фінанси і кредит”) – Біла Церква: БНАУ, 2017 - 92 с.

Розробники: Бондар О.С.– канд.. екон. наук, доцент, Трофимчук М.І. – канд.. екон. наук, доцент, Новікова В.В.– канд.. екон. наук, Савчук О.В. –асистент

Рекомендовано методичною комісією економічного факультету
Протокол № ___ від „___” ________ 20__ р.

Голова методичної комісії
економічного факультету
____

(підпис) (ініціали, прізвище)

ЗМІСТ

ВСТУП 4
ЗМІСТ ЛИСЦИПЛІНИ «ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ» МОДУЛЬ 2 6
РОЗПОДІЛ НАВЧАЛЬНОГО ЧАСУ ТЕМАМИ І ВИДАМИ ЗАНЯТЬ 6
ФОРМА І КРИТЕРІЇ ОЦІНКИ 7
ПОРЯДОК ПОТОЧНОГО І ПІДСУМКОВОГО ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ З ДИСЦИПЛІНИ 9
ТЕМА 1. МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ 11
ТЕМА 2. МЕТОДИ СІТКОВОГО ПЛАНУВАННЯ ОРГАНІЗАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ 26
ТЕМА 3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР. МАТРИЧНІ ІГРИ ДВОХ ОСІБ. 43
ТЕМИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ 61
ТЕМА 4. СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ 61
ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ 79
НАВЧАЛЬНИЙ ТРЕНІНГ 85
ПИТАННЯ ДО ЗАЛІКУ 91

ВСТУП

Дисципліна “Економіко-математичне моделювання” відображає важливий напрямок розвитку сучасної математики, в ній розглядаються питання пов’язані з використанням кількісних методів для прийняття найкращого рішення у різних галузях діяльності людини.

Мета: формування у майбутніх економістів, бухгалтерів та фінансістів теоретичних знань і практичних навичок формалізації задач управління з використанням спеціалізованих оптимізацій них методів.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен **вміти**:

- розв’язувати задачі оптимального розподілу ресурсів;
- розв’язувати оптимізаційні задачі управління ресурсами масового обслуговування, упорядкування та координації;
- будувати та оптимізувати сіткові моделі;
- розв’язувати задачі з умовами невизначеності та конфлікту;
- використовувати необхідні програмні продукти для аналізу і розв’язування економічних задач.

Завданнями навчальної дисципліни є надання студентам знань щодо суті та етапів дослідження операцій; основних принципів та прийомів математичного моделювання операцій, принципів підбору математичного та програмного забезпечення практичної реалізації задач.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен **знати**:

- основні методи економіко-математичного моделювання;
- методи оптимального розподілу ресурсів ;
- методи дослідження задач управління запасами;
- методи дослідження систем масового обслуговування ;
- методи дослідження організаційно-управлінських задач щодо економічних об’єктів, що функціонують в умовах невизначеності та конфлікту (задачі статистичних рішень та теорії ігор);
- методи упорядкування та координації, методи сіткового планування.

При вивченні навчальної дисципліни звертається увага на:

1. Ознайомлення студентів з основами математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних задач, пов'язаних з економікою.

2. Розвиток логічного мислення та підвищення загального рівня математичної культури.

3. Здобуття навичок дослідження прикладних питань та уміння перевести задачу на математичну мову.

4. Формування навичок самостійного вивчення навчальної літератури з дослідження операцій.

5. Застосуванню отриманих знань для аналізу, моделювання і розв'язання прикладних задач із застосуванням комп'ютерної техніки.

Предметом дисципліни є моделі та методи системного аналізу, способи дослідження й оптимізації операцій.

Змістовний модуль 2і: Операції та їх ефективність, математична модель операції, загальна постановка задач у детермінованому та не детермінованому випадках. Статичні та динамічні задачі оптимального розподілу ресурсів. Задачі динамічного програмування як засіб управління складними економічними системами. Теорія ігор для розв'язання конфліктних ситуаційй. Дослідження організаційно-управлінських задач щодо економічних об‘єктів, що функціонують в умовах невизначеності та конфлікту (задачі статистичних рішень та теорії ігор). Сітьове планування та його формалізація для побудови ефективних алгоритмів управління розподілом обмежених ресурсів. Методи моделювання бізнес-процесів, інжиніринг і реінжиніринг.

Місце у структурно-логічній схемі: після вивчення – Вищої математики, Теорії ймовірностей і математичної статистики, Математичного програмування, передує вивченню –Економетрії.

ЗМІСТ ЛИСЦИПЛІНИ «ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ» МОДУЛЬ 2

Таблиця 1.1

РОЗПОДІЛ НАВЧАЛЬНОГО ЧАСУ ТЕМАМИ І ВИДАМИ ЗАНЯТЬ

Номер і назва модуля, тематика занять	Всього годин	Види занять кількість годин		
		Лекції (год)	Практичні і лабораторні заняття (год)	Поза ауди-торна самостійна робота студента (год.)
Модуль2 Моделі розподілу ресурсів та конфліктних ситуацій.		**14**	**14**	**17**
Тема 1. Модель міжгалузевого балансу.		4	4	
Тема 2. Методи сіткового планування організаційних процесів		4	4	
Тема 3. Методи теорії ігор.		6	6	
Всього за модуль 2		**14**	**14**	**17**
Теми для самостійного опрацювання				
Моделі теорії масового обслуговування, стохастичного та динамічного програмування.	34			34
Тема 4. Системи масового обслуговування та їх класифікація.	10			10
Тема 5. Характеристики та аналіз моделей систем масового обслуговування.	12			12
Тема 6. Стохастичне програмування	12			12
Контрольна робота				
Залік	**2**			
Усього	**90**			**90**

ФОРМА І КРИТЕРІЇ ОЦІНКИ

Форма контролю	К-ть заходів	Оцінка		Сума балів	
		max	min	max	min
Модуль 2					
1. Лекції	7	5	3	5	3
2.Практичні	7	5	3	15	3
3. Самостійна робота	1	5	3	5	3
4. Модульна контрольна робота	1	20	8	20	8
5. Індивідуальне завдання	1	10	5	10	5
Всього:	***17***			***55***	***22***

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1.Аллен Рой. Математическая экономия. - М.: Мир, 1964.

2.Бадевиц 3. Математическая оптимизация в социалистическом сельском хозяйстве / Пер. с нем. Н.А. Чупеева; под ред. и с предисл. Р.Г. Кравченко.- М.: Колос, 1982.

3.Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). -М.: Госуд. изд-во физ. - мат. лит-ры, 1961.

5.Гатаулін А.М., Гаврилов Г.В., Харитонова Л.А. Економіко - матиматичні методи в плануванні сільськогосподарського виробництва. - К.: Вища шк., 1989.

6.Гатулин А.М., Гаврилов Г.В., Харитонова Л.А. Экономикс - математические методы в планировании сельскохозяйственного производства. - М.: агропромиздат,1986.

9.Канторович Л.Г., Горстко А.Б. Оптимальные решения в економике. - М.: наука, 1972.

10.Лотов А.В. Введение в экономике - математическое моделирование. - М.: Наука, 1984.

11.Кузнецов Ю.Н., Кузнецов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. - М.: Высш. шк., 1976.

12.Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Гатаулин А.М., Гаврилов Г.В., Сорокина Т.М. и др., Под ред. А.М. Гатаулина. - М.: Агропромиздат,1990.

17. Практикум по математическому моделированию экономических процессов в сельском хозяйстве / Под ред. А.Ф. Карпенко. - М.:Агропромиздат, 1985.

18.Степанюк В.В. Методи математичного програмування. - К.: Вища шк., 1984.

19.Тунеев М.М., Сухачов В.Ф. Экономико - математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства. – М.: Колос, 1986.

Додаткова

1. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том 2 и 3. - М.:
2. Мир.1973.
3. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального експеримента. - М.: Наука, 1987. - 320 с.
4. Зайченко Ю.П. Исследование операций. - Киев: Высш.шк., 1988-552 с.

ПОРЯДОК ПОТОЧНОГО І ПІДСУМКОВОГО ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ З ДИСЦИПЛІНИ

IV семестр.

Поточний контроль здійснюється у таких формах:

1. *Контроль систематичності та активності роботи на практичних, семінарських та лабораторних заняттях.*

Усне опитування та перевірка на кожному практичному занятті знань згідно з тематикою практичних та семінарських занять; а також матеріалу, винесеного на самостійне вивчення. Рівень знань, продемонстрований у відповідях і виступах на практичних та семінарських заняттях, активність при обговоренні питань, що винесені на практичні та семінарські заняття оцінюються в кінці семестру від 0 до 5 балів.

Лабораторні роботи оцінюються за шкалою 15;10;5;0 балів згідно з такими критеріями:

- ✧ оцінку “15” заслуговує студент, який правильно розрахував не менше ніж 80% завдань, дотримав вимоги щодо оформлення та захисту звіту, не порушив терміну подання звіту;
- ✧ оцінку ”10” отримує студент, який правильно розрахував 80-50% завдань, дотримав вимоги щодо оформлення звіту, не порушив терміну подання звіту;
- ✧ оцінку ”5” отримує студент, який правильно розрахував 80-50% завдань, дотримав вимоги щодо оформлення звіту, але порушив термін подання звіту;
- ✧ оцінка ”0” виставляється студенту, який правильно розрахував менше 50% завдань, не дотримав вимоги щодо оформлення звіту і порушив термін подання звіту.

Звіт лабораторної роботи повинен включати:

- ✧ титульний аркуш, відповідно до затвердженої форми;
- ✧ назву теми лабораторної роботи;
- ✧ формулювання мети лабораторної роботи;
- ✧ теоретичну базу;
- ✧ порядок виконання лабораторної роботи з короткими поясненнями;
- ✧ результати виконаної лабораторної роботи, роздруковані на принтері;
- ✧ аналіз результатів та висновки;
- ✧ список використаної літератури.

2. Виконання контрольних завдань.

Виконання письмової контрольної роботи в аудиторії. Результати контрольної роботи оцінюються від 0 до 5 балів.

3. Контроль виконання завдань для самостійного опрацювання.

Обов’язкові види СРС. Протягом семестру студенти виконують індивідуальні завдання (пошук літературних джерел за заданою тематикою, підбір даних соціально-економічних показників). Результати виконання індивідуальних завдань студент оформляє у вигляді письмового звіту. Оцінюються індивідуальні завдання від 0 до 5 балів.

Вибіркові види СРС. Студент обирає один з видів запропонованих вибіркових завдань для самостійного опрацювання (див. карту самостійної роботи студента п.2.1-2.3).Результати обраного завдання оцінюються від 0 до 10 балів.

Результати поточного контролю знань студентів в цілому оцінюються в діапазоні від 0 до 40 балів.

Підсумковий контроль знань студентів здійснюється у формі заліку.

Переведення даних 100-бальної шкали оцінювання в 4-х бальну шкалу та шкалу за системою ECTS здійснюється в такому порядку:

Оцінка за шкалою ECTS	**Оцінка за бальною шкалою, що використовується в КНЕУ**	**Оцінка за національною шкалою**
A	90-100	5 (відмінно)
B	84-89	4 (добре)
C	75-83	
D	65-74	3(задовільно)
E	60-64	
FX	30-59	2 (незадовільно) з можливістю повторного складання
F	0-15	2 (незадовільно) з обов’язковим повторним вивченням дисципліни

ТЕМА 1. МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

Методи розв'язування систем рівнянь МГБ

Основу інформаційного забезпечення моделі міжгалузевого балансу становить технологічна матриця, що містить коефіцієнти прямих матеріальних витрат на виробництво одиниці продукції. Ця матриця є базою економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу.

Припускається гіпотеза, згідно з якою для виробництва одиниці продукції в j-й галузі необхідна певна кількість витрат проміжної продукції i-ї галузі, що становить a_{ij}, і ця величина не залежить від обсягів виробництва в j-й галузі та є досить стабільною величиною в часі. Величини a_{ij} називають коефіцієнтами прямих матеріальних витрат та обчислюють таким чином:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad a_{ij} = \text{const}, \; i, j = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Коефіцієнти прямих матеріальних витрат показують, яку кількість продукції i-ї галузі необхідно витратити, якщо враховувати лише прямі витрати, для виробництва одиниці продукції j-ї галузі. З урахуванням формули (1.1) систему рівнянь балансу можна записати у вигляді

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i + Y_i, \; i = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Якщо ввести до розгляду матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат $A = (a_{ij})$, вектор-стовпчик валової продукції X та вектор-стовпчик кінцевої продукції Y:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

то система рівнянь (11.5) у матричній формі матиме вигляд

$$X = AX + Y. \tag{1.3}$$

Систему рівнянь (1.5), чи у матричній формі (1.3), називають *економіко-математичною моделлю міжгалузевого балансу (моделлю Леонтьєва, моделлю «витрати — випуск»)*. За допомогою цієї моделі можна виконати три варіанти обчислень:

- задаючи в моделі обсяги валової продукції кожної галузі (X_i), можна визначити обсяги кінцевої продукції кожної галузі (Y_i):

$$Y = (E - A)X, \tag{1.4}$$

де E — одинична матриця n-го порядку;

- задаючи обсяги кінцевої продукції всіх галузей (Y_i), можна визначити обсяги валової продукції кожної галузі (X_i):

$$X = (E - A)^{-1}Y; \tag{1.5}$$

- для низки галузей задаючи обсяги валової продукції, а для решти — обсяги кінцевої продукції, можна відшукати величини кінцевої та валової продукції всіх галузей.

У формулах (11.7) та (11.8) E позначає одиничну матрицю n-го порядку, а $(E - A)^{-1}$ — матрицю, обернену до матриці $(E - A)$.

Якщо визначник матриці $(E - A)$ не дорівнює нулеві, тобто ця матриця не вироджена, тоді існує матриця, обернена до неї. Позначимо цю матрицю через B:

$$B = (E - A)^{-1}. \tag{1.6}$$

Систему рівнянь у матричній формі (1.5) можна записати:

$$X = BY. \tag{1.7}$$

Елементи матриці B позначатимемо через b_{ij}, тоді з матричного рівняння (11.10) для будь-якої i-ї галузі можна отримати співвідношення:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1.8}$$

Із співвідношення (1.8) випливає, що валова продукція постає як зважена сума обсягів кінцевої продукції, ваговими коефіцієнтами тут є b_{ij}, котрі показують, скільки всього необхідно виробити валової продукції i-ї галузі для випуску у сферу кінцевого використання одиниці продукції j-ї галузі. На відміну від коефіцієнтів прямих витрат a_{ij}, коефіцієнти b_{ij} називають *коефіцієнтами повних матеріальних витрат*, і вони включають у себе як прямі, так і опосередковані витрати всіх порядків. Якщо прямі витрати відбивають кількість засобів виробництва, використаних безпосередньо на виготовлення певних обсягів даного продукту, то опосередковані стосуються попередніх стадій виробництва і входять у виробництво продукції не прямо, а через інші (проміжні) засоби виробництва.

Коефіцієнти повних матеріальних витрат b_{ij} показують, який обсяг продукції j-ї галузі необхідно виробити, щоб з урахуванням прямих і опосередкованих витрат цієї продукції отримати одиницю кінцевої продукції j-ї галузі.

Коефіцієнти повних матеріальних витрат можна застосовувати, коли необхідно визначити, як вплинуть на валовий випуск певної галузі деякі зміни щодо обсягів випуску кінцевої продукції всіх галузей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j , \qquad (1.9)$$

де ΔX_i та ΔY_j — зміни (прирости) обсягів валової й кінцевої продукції відповідно.

Коефіцієнти прямих і повних матеріальних витрат

Здійснюючи аналіз моделі міжгалузевого балансу, потрібно розглянути основні властивості матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A. Ці коефіцієнти за визначенням є невід'ємними, отже, матриця A в цілому є невід'ємною: $A \geq 0$. Процес відтворення не можна було б здійснити, якщо б для власного відтворення в галузі витрачався більший обсяг продукту, ніж створювався. Звідси очевидно, що діагональні елементи матриці A менші ніж одиниця: $a_{ii} <1$, $i = 1, ..., n$.

Система рівнянь міжгалузевого балансу відображає реальні економічні процеси, в котрих сенс можуть мати лише невід'ємні значення валових випусків; таким чином, вектор валової продукції складається з невід'ємних компонентів вектора X, який є невід'ємним вектором: $X > 0$. Постає питання, за яких умов економічна система здатна забезпечити невід'ємний кінцевий випуск у всіх галузях? Відповідь на це питання пов'язана з поняттям продуктивності матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат.

Означення. Називатимемо невід'ємну матрицю A продуктивною, якщо існує такий невід'ємний вектор X, що

$$X > AX. \qquad (1.10)$$

Очевидно, що умова (1.10) означає існування невід’ємного вектора кінцевої продукції $Y > 0$ для моделі міжгалузевого балансу (1.3).

Щоб матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A була продуктивною, необхідно і достатньо, аби виконувалася одна з перелічених нижче умов:

1) матриця $(E - A)$ має бути невід’ємно оберненою, тобто повинна існувати обернена матриця $(E - A)^{-1} \geq 0$;

2) матричний ряд $E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ має збігатися, $A^k \to 0$, $k \to \infty$, а його сума дорівнює оберненій матриці $(E - A)^{-1}$;

3) найбільший за модулем λ розв’язок (власне значення) характеристичного рівняння $|\lambda E - A| = 0$ має бути строго меншим від одиниці;

4) усі головні мінори матриці $(E - A)$, тобто визначники матриць, що утворені елементами перших рядків і перших стовпчиків цієї матриці порядку від 1 до n, мають бути додатними.

Більш простою, але лише достатньою ознакою продуктивності матриці A є обмеження на величину її норми, тобто на величину найбільшої із суми елементів матриці A в кожному стовпчику. Якщо норма матриці A строго менша від одиниці, то ця матриця є продуктивною. Наголосимо, що дана умова є лише достатньою, і матриця A може виявитися продуктивною й у разі, якщо її норма буде більшою за одиницю.

Найбільший за модулем корінь характеристичного рівняння, наведеного в третій умові продуктивності матриці A (позначимо його через λ^*), може слугувати за оцінку загального рівня коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, а отже, величина $(1 - \lambda^*)$ характеризує залишок після витрат, тобто продуктивність. Чим більшим є $(1 - \lambda^*)$, тим більшими є можливості досягнення інших цілей, окрім поточного виробничого процесу. Іншими словами, чим вищим є загальний рівень коефіцієнтів матриці A, тим більшим — максимальне за модулем власне значення (λ^*) і нижчим — рівень продуктивності, і навпаки, чим нижчий загальний рівень коефіцієнтів матриці A, тим меншим є максимальне по модулю власне значення (λ^*) і вищою продуктивність.

Проаналізуємо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат, тобто матрицю $B = (E - A)^{-1}$. Елемент цієї матриці b_{ij} показує, скільки всього необхідно виробити продукції i-ї галузі, щоб одержати одиницю кінцевої продукції j-ї галузі.

Дамо інше означення коефіцієнта повних матеріальних витрат з огляду на те, що крім прямих витрат існують опосередковані витрати тієї чи іншої продукції для виробництва продукції даної галузі. Розгляньмо для прикладу формування витрат електроенергії на випуск стального прокату, обмежуючись технологічним ланцюжком «руда—чавун—сталь—прокат». Витрати електроенергії для отримання прокату зі сталі називатимемо прямими витратами, ті самі витрати для отримання сталі з чавуну — опосередненими витратами 1-го порядку, а витрати електроенергії для отримання чавуну з руди — опосередкованими витратами електроенергії на випуск сталевого прокату 2-го порядку тощо. Отже, можна дати таке означення:

Коефіцієнтом квазіповних матеріальних витрат c_{ij} називають суму прямих і опосередкованих витрат продукції i-ї галузі для виробництва одиниці продукції j-ї галузі через проміжні продукти на всіх попередніх стадіях виробництва. Якщо коефіцієнти опосередкованих матеріальних витрат k-го порядку позначати через a_{ij}^{k}, то має місце формула

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(k)} + \ldots, \qquad (1.11)$$

а якщо ввести до розгляду матрицю коефіцієнтів квазіповних матеріальних витрат $C = (c_{ij})$ та матриці коефіцієнтів опосередкованих матеріальних витрат різних порядків $A^{(k)} = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$, то поелементну формулу (11.14) можна подати в матричній формі:

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(k)} + \ldots \qquad (1.12)$$

З огляду на змістовну суть коефіцієнтів опосередкованих матеріальних витрат можна записати такі математичні співвідношення:

$$A^{(1)} = AA = A^2;$$
$$A^{(2)} = AA^{(1)} = AA^2 = A^3;$$
$$A^{(k)} = AA^{(k-1)} = AA^k + A^{k+1},$$

за використання котрих матрична формула (11.15) набирає вигляду

$$C = A + A^1 + A^2 + A^3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} A^k. \qquad (1.13)$$

Якщо матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A є продуктивною, то з другої умови продуктивності існує матриця $B = (E - A)^{-1}$, яка є сумою збіжного матричного ряду:

$$B = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \qquad (1.14)$$

Порівнюючи вирази (11.16) та (11.17), дістанемо:

$$B = E + C,$$

або в поелементному записі:

$$b_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ якщо } i \neq j, \\ 1 + c_{ij}, \text{ якщо } i = j. \end{cases}$$

Це визначає економічний сенс, що пояснює відмінність між коефіцієнтами (елементами) матриць B та C: на відміну від коефіцієнтів матриці C, що враховують лише витрати на виробництво продукції, коефіцієнти матриці B включають у себе, окрім витрат, також одиницю кінцевої продукції, котра виходить за сферу виробництва.

Розглянемо приклад розрахунку основних показників МГБ за умовного поділу економіки на три галузі.

Приклад. Для тригалузевої економічної системи на плановий період задані матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат і вектор кінцевої продукції (дані умовні):

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}25 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}3 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Необхідно обчислити планові обсяги валової продукції, матрицю повних матеріальних витрат, значення міжгалузевих потоків, умовно чисту продукцію галузей і подати результати у формі міжгалузевого балансу.

Розв'язання.

1. Для розрахунку валової продукції складемо систему рівнянь вигляду (2.1.50):

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 0{,}3X_1 + 0{,}2X_2 + 0{,}25X_3 + 150,\\
X_2 &= 0{,}1X_1 + 0{,}4X_2 + 0{,}1X_3 + 200,\\
X_3 &= 0{,}2X_1 + 0{,}15X_2 + 0{,}3X_3 + 300
\end{aligned}
$$

Перетворимо систему до вигляду:

$$
\begin{aligned}
0{,}7X_1 - 0{,}2X_2 - 0{,}25X_3 &= 150,\\
-0{,}1X_1 + 0{,}6X_2 - 0{,}1X_3 &= 200,\\
-0{,}2X_1 - 0{,}15X_2 + 0{,}7X_3 &= 300
\end{aligned}
$$

Цю систему можна розв'язати методом послідовного виключення Гаусса. На першому кроці обчислень одне з рівнянь перетворюється таким чином, щоб коефіцієнт при X_1 дорівнює рівним одиниці, а з решти рівнянь X_1 виключається взагалі. Далі друге рівняння так, перетворюють щоб коефіцієнт при X_2 дорівнював одиниці, з решти рівнянь X_2 виключають. Продовжуючи описану процедуру, зрештою отримують систему, в якій останнє рівняння містить лише одну невідому величину, а кожне попереднє — на одну більше. Послідовно підставляючи вже обчислені значення невідомих у рівняння — від останнього до першого, обчислюють значення усіх невідомих величин.

В результаті такого послідовного виключення невідомих отримаємо еквівалентну систему:

$$
\begin{aligned}
X_1 - 6X_2 + X_3 &= -2000,\\
X_2 - 0{,}667X_3 &= 74{,}074,\\
17{,}167X_3 &= 12537{,}037.
\end{aligned}
$$

З останнього рівняння знаходимо

$X_3 = 730{,}313.$

Підставляючи це значення у друге рівняння, обчислимо

$X_2 = 560{,}949.$

Нарешті, підставивши значення X_1 та X_2 у перше рівняння, отримаємо

$X_1 = 635{,}383.$

2. Знайдемо матрицю повних матеріальних витрат згідно з формулою $B = (E - A)^{-1}$.

Отримаємо матрицю $(E - A)$:

$$E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}3&0{,}2&0{,}25\\0{,}1&0{,}4&0{,}1\\0{,}2&0{,}15&0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}7&-0{,}2&-0{,}25\\-0{,}1&0{,}6&-0{,}1\\-0{,}2&-0{,}15&-0{,}7\end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник цієї матриці:

$$\det(E-A)=\begin{vmatrix}0{,}7&-0{,}2&-0{,}25\\-0{,}1&0{,}6&-0{,}1\\-0{,}2&-0{,}15&-0{,}7\end{vmatrix}=0{,}232.$$

Будуємо матрицю $\overline{(E-A)}$, приєднану до $(E-A)$. Елементами цієї матриці є алгебраїчні доповнення $A_{ij}, i, j = 1,2,3$ для елементів матриці, транспонованої до $(E-A)$. Алгебраїчні доповнення $A_{ij}, i, j = 1,2,3$ обчислюють як добуток $(-1)^{i+j}$ на мінор, який отримано після викреслення з матриці $(E-A)$ i-го рядка й j-го стовпчика:

$$\overline{(E-A)}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}405&0{,}178&0{,}170\\0{,}090&0{,}440&0{,}095\\0{,}135&0{,}145&0{,}400\end{pmatrix}.$$

За формулою

$$B=(E-A)^{-1}=\frac{\overline{(E-A)}}{\det(E-A)}$$

знаходимо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат:

$$B=(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}748&0{,}766&0{,}734\\0{,}388&1{,}899&0{,}410\\0{,}583&0{,}626&1{,}728\end{pmatrix}.$$

Знайдемо обсяги валової продукції трьох галузей, використовуючи формулу (2.1.51):

$$X=BY=\begin{pmatrix}1{,}7481&0{,}766&0{,}734\\0{,}388&1{,}899&0{,}410\\0{,}583&0{,}626&1{,}728\end{pmatrix}\begin{pmatrix}150\\200\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}635{,}383\\560{,}949\\730{,}313\end{pmatrix}.$$

Як бачимо обсяги валової продукції, обчислені на основі співвідношень (2.1.50) та (2.1.51) повністю збігаються.

3. Для обчислення елементів першого квадранта міжгалузевого балансу — значення міжгалузевих потоків — скористаємося формулою (2.1.48):

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, \ i, j = 1, \ldots, n,$$

тобто елементи першого стовпчика матриці A перемножимо на величину $X_1 = 635{,}383$, елементи другого стовпчика матриці A — на $X_2 = 560{,}949$; елементи третього стовпчика матриці A — на $X_3 = 730{,}313$.

Складові третього квадранта (умовно чиста продукція) знаходять з урахуванням формули (2.1.46) як різницю між обсягом валової продукції та сумою елементів відповідного стовпчика першого квадранта.

Четвертий квадрант у наведеному прикладі складається лише з одного показника й слугує, зокрема, для контролю правильності обчислень. Сума елементів другого квадранта повинна збігатися (у вартісному матеріальному балансі) із сумою елементів третього квадранта.

Результати обчислень подано у вигляді таблиці (табл. 2.2.2).

Таблиця 2.2.2

Міжгалузевий баланс виробництва й розподілу продукції

Галузі-виробники	Галузі-споживачі			Кінцева продукція	Валова продукція
	1	2	3		
1	190,615	112,190	182,578	150,0	635,383
2	63,538	224,380	73,031	200,0	560,949
3	127,077	84,142	219,094	300,0	730,313
Умовно чиста продукція	254,153	140,237	255,610	650	
Валова продукція	635,383	560,949	730,313		1926,645

Приклад. Для умовної двохгалузевої економіки відомі міжгалузеві потоки продукції та обсяги кінцевої продукції галузей за звітний період:

Галузі -виробники	Галузі-споживачі		Кінцева продукція
	1	2	
1	40	50	110
2	60	20	170

У плановому періоді необхідно отримати кінцеву продукцію першої галузі в обсязі $Y_1 = 120$, валову продукцію другої галузі в обсязі $X_2 = 300$. Побудувати МГБ на плановий період (обчислити міжгалузеві потоки продукції планового МГБ, обсяг валової продукції першої галузі, обсяг кінцевої продукції другої галузі, обсяги умовно чистої продукції галузей).

Розв'язання.

1. Обчислимо обсяг валової продукції кожної галузі як суму матеріальних витрат галузей, які споживають її продукцію, і кінцевої продукції даної галузі

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \ \ i=1, ..., n.$$

Отже, обсяги валової продукції галузей:

$$X_1 = 40+50+110=200,$$
$$X_2 = 60+20+170=250.$$

2. Обчислимо коефіцієнти прямих матеріальних витрат за формулою

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \ i, j=1, ..., n.$$

Отримаємо матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,08 \end{pmatrix}.$$

3. Складемо систему рівнянь, яка у матричному записі має вигляд:

$$X = AX + Y.$$

Підставивши дані прикладу, отримаємо систему рівнянь відносно невідомих змінних X_1, Y_2:

$$X_1 = 0,2X_1 + 0,2 \cdot 300 + 120,$$
$$300 = 0,3X_1 + 0,08 \cdot 300 + Y_2.$$

МОДИФІКАЦІЇ ОСНОВНОЇ СХЕМИ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

На основі використання коефіцієнтів прямої та повної трудомісткості можуть розроблятися міжгалузеві й міжпродуктові баланси затрат праці та використання трудових ресурсів. Схематично ці баланси будуються за спільним типом матричних моделей, а всі показники в них (міжгалузеві зв'язки, кінцевий продукт, умовно чиста продукція тощо) виражаються в трудових вимірювачах.

Приклад. Скористаємось даними попереднього прикладу. Нехай додатково задані витрати живої праці (трудові ресурси) в розрізі трьох галузей: $L_1 = 900$; $L_2 = 750$; $L_3 = 650$ — в однакових одиницях вимірювання. Треба визначити коефіцієнти прямої та повної трудомісткості й скласти міжгалузевий баланс витрат праці.

Розв'язання.

1. Скориставшись формулою (2.1.54) та розв'язком попереднього прикладу, знайдемо коефіцієнти прямої трудомісткості:

$$t_1 = \frac{900}{635{,}383} = 1{,}416;\quad t_2 = \frac{750}{560{,}949} = 1{,}337;\quad t_3 = \frac{650}{730{,}313} = 0{,}890.$$

2. За формулою (2.1.56) знайдемо коефіцієнти повної трудомісткості:

$$T = (1{,}416;\ 1{,}337;\ 0{,}890)\cdot\begin{pmatrix}1{,}748 & 0{,}766 & 0{,}734\\ 0{,}388 & 1{,}899 & 0{,}410\\ 0{,}583 & 0{,}626 & 1{,}728\end{pmatrix} = (3{,}513;\ 4{,}180;\ 3{,}123).$$

3. Перемноживши відповідно перший, другий і третій рядки першого та другого квадрантів міжгалузевого матеріального балансу, побудованого в попередньому прикладі, на відповідні коефіцієнти прямої трудомісткості, отримаємо схему міжгалузевого балансу праці (в трудових вимірювачах):

Таблиця 2.2.3

Міжгалузевий баланс затрат праці

Галузі-виробники	Галузі-споживачі			Затрати праці на кінцеву продукцію	Затрати праці в галузях (трудові ресурси)
		2	3		
1	270	158,913	258,616	212,470	900
2	84,952	300,0	97,644	267,404	750
3	113,102	74,889	195	267,009	650

Контрольні завдання та теми для обговорення

1. Сутність балансового методу дослідження економічних систем. Основні припущення та гіпотези.

2. Сутність принципової схеми міжгалузевого балансу. Що покладено в основу цієї схеми? Які основні розділи вона містить? Їхня економічна сутність.

3. Сутність економіко-математичної моделі статичного міжгалузевого балансу. Яка основна гіпотеза використовується у побудові моделі МГБ?

4. Сутність коефіцієнтів прямих і повних матеріальних витрат. Основні способи їх обчислення. Навести приклад.

5. Пояснити сутність поняття продуктивності матриці прямих матеріальних витрат. Навести приклад, коли матриця не є продуктивною.

6. Економічний зміст коефіцієнтів прямої та повної трудомісткості.

7. Сутність та основні підходи щодо побудови економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу затрат праці.

8. Сутність та способи обчислення коефіцієнтів прямої та повної трудомісткості. Навести приклади.

9. Пояснити економічний сенс коефіцієнтів прямої та повної фондомісткості. Навести приклади.

10. Навести схему та послідовність обчислення коефіцієнтів трудомісткості та фондомісткості на підставі економіко-математичної моделі МГБ.

11. Обчислювальні аспекти розв’язування задач на підставі моделі МГБ.

12. Пояснити сутність поняття продуктивності матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат. Навести приклади.

13. Навести приклади використання балансових моделей та моделі МГБ в задачах маркетингу.

14. Сутність поняття запасомісткості. Основна схема обчислення та практичного застосування матриці коефіцієнтів запасомісткості. Навести приклади.

15. Основні сфери використання в економіці моделей МГБ. Навести приклади.

16. Пояснити, за яких умов модель Леонтьєва є продуктивною.

Завдання для самостійної роботи

1. На підставі даних, наведених у таблиці, обчислити коефіцієнти прямих і повних матеріальних витрат.

а)

Галузь	Прямі міжгалузеві потоки			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	50	60	80	60
2	25	90	40	25
3	25	60	40	35

б)

Галузь	Прямі міжгалузеві потоки			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	40	18	25	21
2	16	9	25	16
3	80	45	50	75

в)

Галузь	Прямі міжгалузеві потоки			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	18	36	25	1
2	45	90	25	20
3	36	36	50	30

2. У таблицях, поданих нижче, наведені коефіцієнти прямих математичних витрат та обсяги кінцевої продукції в міжгалузевому балансі для трьох галузей:

а)

Галузь	Прямі міжгалузеві потоки			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0,2	0,2	0,1	50
2	0,5	0,3	0,2	0
3	0,2	0,2	0,4	30

б)

Галузь	Прямі міжгалузеві потоки			Кінцева продукція
	1	2	3	
1	0.3	0,4	0,2	40
2	0,2	0,1	0,3	15
3	0,1	0,5	0,2	10

Потрібно:

1) перевірити умови продуктивності матриці коефіцієнтів прямих витрат;

2) обчислити коефіцієнти повних матеріальних витрат;

3) обчислити обсяги валової продукції галузей.

3. На підставі даних таблиць у вправі 2 відтворити схеми міжгалузевого матеріального балансу.

4. Три цехи підприємства випускають продукцію трьох видів:

Виробництво	Споживання			Кінцева продукція	Валовий продукт
	1	2	3		
1	232,6	51	291,8	200	775,3
2	155,1	255	0	100	510,1
3	232,6	51	145,9	300	729,6
Усього	620,3	357	437,7	600	2015

Частина продукції йде на внутрішнє споживання, решта є кінцевою продукцією. Скласти міжпродуктовий баланс виробництва та розподілу продукції підприємства на плановий період, якщо ставиться завдання щодо планового випуску кінцевої продукції в обсягах відповідно: 250; 100; 360.

5. Задана матриця коефіцієнтів прямих витрат чотиригалузевого МГБ.

$$A=\begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}12 & 0{,}04 & 0{,}20 \\ 0{,}07 & 0{,}35 & 0{,}03 & 0{,}12 \\ 0{,}04 & 0{,}03 & 0{,}30 & 0{,}14 \\ 0{,}05 & 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}20 \end{bmatrix}.$$

Визначити обсяги валової продукції кожної галузі (X_1, X_2, X_3, X_4) за умови, що кінцевий платоспроможний попит на продукцію в прогнозованому періоді в порівнянних цінах складе відповідно:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 40{,}3 \text{ млрд грн;} \\ Y_2 &= 21 \text{ млрд грн;} \\ Y_3 &= 1{,}3 \text{ млрд грн;} \\ Y_4 &= 2{,}5 \text{ млрд грн.} \end{aligned}$$

6. Який вплив в умовах ринку справить підвищення ціни на продукцію першої галузі в 10 разів на зміну цін в інших галузях? Структуру витрат останнього звітного періоду наведено в таблиці:

Перший і третій квадранти тригалузевого мгб

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		
	1	2	3
1	984,4	173,7	59,1
2	227,1	86,9	136,3
3	37,9	37,2	48,3

Заробітна плата	377,1	351,9	75,4
Прибуток від реалізації	563,5	469,3	173,9
Опосередковані податки	207,6	0,0	40,0
Дотації	–579,6	0,0	0,0
Витрати основного капіталу	75,0	122,0	18,0
Валова продукція	1893,0	1241,0	537,0

Література:

1. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.
2. Вітлінський В.В., Великоіваненко Г.І. Моделювання економіки: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2005. – 306 с.
3. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. - 240 с.
4. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики: Учебно-практическое пособие. – М.: УРАО, 1998. – 160 с.

ТЕМА 2. МЕТОДИ СІТКОВОГО ПЛАНУВАННЯ ОРГАНІЗАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Сіткові методи і моделі являють собою спеціальний клас моделей, які базуються на побудові сіткових графіків.

Сіткові моделі широко застосовуються для планування і управління, виконання певного комплексу робіт або певної програми.

Сіткові моделі застосовуються:

- у наукових дослідженнях прикладного характеру;
- у розробці нових видів продукції та послуг;
- у маркетинговій діяльності та рекламі;
- для управління витратами виробництва;
- у будівництва і у військовій справі;
- для планування проведення комплексної ревізії, аудиторських перевірок тощо.

Основу сіткової моделі складає сітковий графік. Основними конструктивними елементами сіткового графіка є події та роботи.

Події – це вершина сітки, а робота – це її дуги.

Подія – це результат, стан системи в момент досягнення деякої вихідної, проміжної чи кінцевої мети розробки. Подія немає продовження в часі.

Робота – це продовжуваний в часі процес, необхідний для здійснення події. Робота обов'язково починається і завершується подією.

Сітковий графік – це впорядкована множина подій та робіт і правила зв'язку між ними.

Правила побудови сіткового графіка

1. Основою складання сіткового графіка (СГ) є інформаційні таблиці.

2. СГ будують зліва направо.

3. Кожний СГ починається і закінчується однією подією.

3. Дві події можуть бути з'єднані лише однією роботою.

4. На СГ не допускаються тупикові події.

5. На СГ не допускаються наявність замкнутих контурів та петель (коли початок роботи є її закінченням).

6. При виконанні паралельних робіт вводяться фіктивні роботи і фіктивні події.

Приклад побудови сіткового графіка

Вхідні дані для складання СГ будівництва системи водопостачання.

Таблиця 2.1

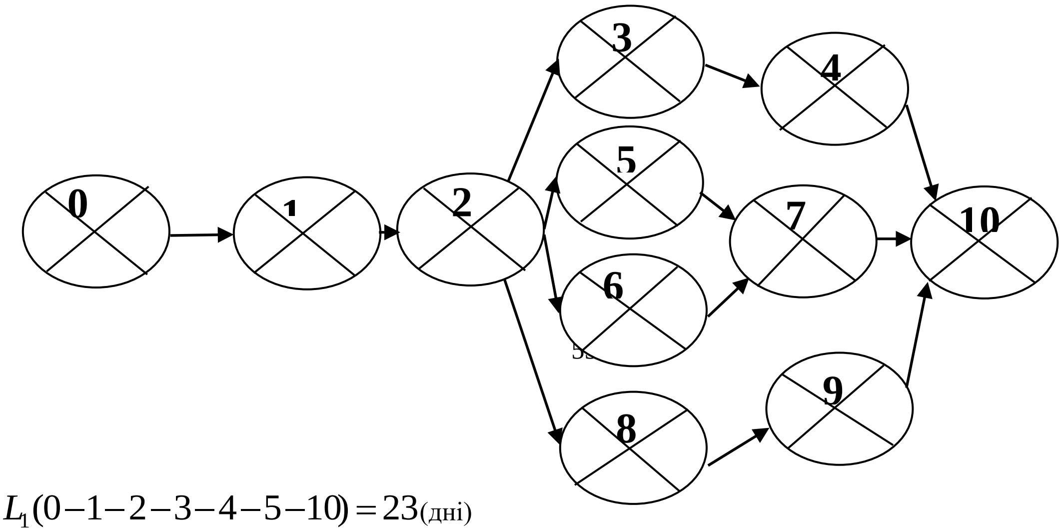
№ з/п	**Шифр роботи**	**Зміст роботи**	**Тривалість (дні)**	**W (вартість) (тис.грн..)**
1	0-1	Розбивка території	2	0,8
2	1-2	Планування території	3	1200
3	2-3	Буріння свердловин	10	12000
4	3-4	Установка насосу	2	6000
5	4-10	Пробна відкачка води	6	0,250
6	2-5	Спорудження фундаменту під водонапірну башту	5	11000
7	5-7	Монтування башти	12	6800
8	7-10	Зварювання водогону	3	9200
9	2-6	Будівництво водонапірної сітки	7	13800
10	6-7	Опріснення сітки	2	0,250
11	2-8	Спорудження траншей для електрокабелю	2	1950
12	8-9	Вкладання бетонної коробки для кабелю	4	3000
13	9-10	Монтування силового кабелю	6	1900

Визначити:

1.Скільки часу займе спорудження даного об'єкту?

2.Якою буде його вартість W?

Сітковий графік буде мати вигляд:



$L_1(0-1-2-3-4-5-10)=23$(дні)
$L_2(0-1-2-5-7-10)=25$(днів)
$L_3(0-1-2-6-7-10)=17$(днів)
$L_4(0-1-2-8-9-10)=17$(днів)

Часові параметри подій

Від початкової до кінцевої події можна побудувати певну множину послідовних ланцюжків робіт (подій) різної тривалості. Ці ланцюжки називаються **шляхами**.

Повний шлях – це будь-який шлях від початкової події до кінцевої.

Критичний шлях – це повний шлях максимальної тривалості.

Виділяють такі **часові параметри подій**:

ранній термін події;

пізній термін події.

резерв часу настання (здійснення) події.

Ранній термін події – це максимальний за тривалістю період часу від початкової до даної події (розраховується від початку до кінця). Ранній термін початкової події рівний нулю.

Пізній термін події – це різниця між довжиною критичного шляху та максимальною довжиною шляху від даної події до кінцевої.

Для кінцевої події пізній термін настання події дорівнює ранньому терміну настання події. Пізній термін початкової події рівний нулю.

Ранні і пізні терміни для подій критичного шляху співпадають. Для некритичних подій ранній термін події менший за пізній термін події.

Резерв часу настання події – це час, на який можна відтягнути завершення події без порушення терміну розробки. Він дорівнює різниці між пізнім і раннім термінами події.

Резерв часу для подій критичного шляху рівний нулю. Резерви часу для подій, що не лежать на критичному шляху не дорівнюють нулю і дають можливість маневрувати ресурсами на критичному шляху (відволікати їх від другорядних шляхів для критичного шляху).

Збільшення часу будь-якої критичної роботи веде до збільшення часу виконання проекту. Збільшення часу виконання робіт некритичного часу в межах резерву часу не впливає на термін завершення робіт.

Виходячи з цього, керівники підприємства повинні слідкувати за своєчасним виконанням критичних робіт (забезпечувати їх ресурсами і робочою силою).

Мінімізація термінів виконання робіт – це мінімізація критичного шляху.

На сітковому графіку коло – це подія, що ділиться на 4 частини:

верхня – номер події;

ліва – ранній термін події;

права – пізній термін події;

нижня – резерв часу настання події.

Для визначення параметрів використовують такі позначення:

$T_{(i-j)}$ - тривалість роботи;

T_i^p - ранній термін настання події;

T_j^n - пізній термін настання події;

$T_{(i-j)}^{pn}$ **- ранній початок робіт** *i-j***;**

$T_{(i-j)}^{nn}$ - пізній початок робіт ***i-j*** ;

$T_{(i-j)}^{pз}$ - раннє закінчення;

$T_{(i-j)}^{nз}$ - пізнє закінчення.

Часові параметри робіт

Ранній термін початку роботи (ранній початок) ***i – j***. Робота ***i - j*** не може початись до настання події ***i***, тому вона дорівнює ранньому терміну події ***i***

$$T^{pn}_{(i-j)} = T_i^{p}.$$

Пізній термін початку роботи (пізній початок) ***i – j*** – не пізніше самого пізнього допустимого терміну настання наступної події до неї

$$T^{nn}_{(i-j)} = T_j^{n} - T_{(i-j)}.$$

Ранній термін закінчення роботи (раннє закінчення) ***i – j*** дорівнює сумі раннього початку і тривалості роботи

$$T^{pз}_{(i-j)} = T^{pn}_{(i-j)} + T_{(i-j)}.$$

Пізній термін закінчення роботи (пізнє закінчення) ***i – j*** співпадає з самим пізнім терміном події ***j***

$$T^{nз}_{(i-j)} = T_j^{n}.$$

Для прикладу, що розглядали, визначимо резерви часу в табличній формі.

Резерви часу для робіт

$$R_{(i-j)} = \begin{Bmatrix} T^{n3}_{(i-j)} - T^{p3}_{(i-j)} \\ T^{nn}_{(i-j)} - T^{pn}_{(i-j)} \end{Bmatrix}$$

Таблиця 2.2

№ з/п	**Шифр роботи**	**Трива-лість**	**Ранній початок**	**Пізній початок**	**Раннє закінчення**	**Пізнє закінчення**	**Резерв**
1	0-1	2	0	0	2	2	0
2	1-2	3	2	2	5	5	0
3	2-3	10	5	7	15	17	2
4	2-5	5	5	5	10	10	0
5	2-6	7	5	13	12	20	8
6	2-8	2	5	13	7	15	8
7	3-4	2	15	17	17	19	2
8	4-10	6	17	19	23	25	2
9	5-7	12	10	10	22	22	0
10	6-7	2	12	20	14	22	8
11	7-10	3	22	22	25	25	0
12	8-9	4	7	15	11	19	8
13	9-10	6	11	19	17	25	8

Коефіцієнти напруженості та складності сіткових графіків

СГ можуть включати тисячі подій і робіт. Складність аналізу СГ залежить від співвідношення кількості робіт і подій.

Чим більше відношення кількості робіт до кількості подій, тим складніший процес аналізу.

$$Kcc\kappa = \frac{n_1}{n_2} = \frac{13}{11} = 1{,}2 \ ,$$

де n_1 - кількість робіт, n_2 - кількість подій.

Коефіцієнт напруженості шляху визначається за формулою

$$К_н(L) = \frac{Li - Li/kp}{Lkp - Li/kp},$$

де L_i - довжина шляху;

$L_{кр}$ - довжина критичного шляху;

$L_{i/кр}$ - сумарна протяжність робіт спільного для даного шляху і критичного.

$$K_1(L_1) = \frac{23-5}{25-5} = \frac{18}{20} = 0.9 \ ;$$

$$K(L_2) = \frac{25-25}{25-25} = \infty \ ;$$

$$K(L_3) = \frac{17-8}{25-8} = \frac{9}{17} = 0.53 \ ;$$

$$K(L_4) = \frac{17-5}{25-5} = \frac{12}{20} = 0.6 \ .$$

Застосування коефіцієнта напруженості дозволяє впорядкувати шляхи в порядку їх значущості. Звідси, відповідно, виділяють фінансування відповідних робіт та забезпечення технікою.

Маневрування резервами часу дозволяє при одночасному веденні кількох об’єктів перекидати техніку і персонал на інші об'єкти.

Висновок

Аналіз результатів дослідження сіткової моделі дозволяє дати практичні рекомендації, які витікають з розрахунку часових характеристик:

1. Визначення критичного шляху. Всі роботи, що належать критичному шляху повинні бути взяті під особливий контроль. Керівники повинні слідкувати за своєчасним виконанням критичних робіт і забезпечувати їх ресурсами в першу чергу.

2. Зниження резервів часу дозволяє правильно маневрувати наявними ресурсами (трудовими, матеріальними). Роботи, що мають резерви часу, можуть відкладатись, а наявні ресурси використовуватись для виконання інших робіт.

3. Визначення коефіцієнта напруженості дозволяє розмістити шляхи в порядку важливості.

Оптимізація сіткових графіків

Оптимізація сіткових графіків включає обробку як часових так і вартісних параметрів. Аналіз сіткових графіків з допомогою часових параметрів іноді може виявитись недостатнім. Знайдений критичний шлях необхідно зменшити до директивного. Це вимагає скорочення терміну певних робіт, особливо критичних. Виникає необхідність у додатковій інформації:

1. В яких межах можна змінювати терміни виконання робіт.

2. Як при цьому зміняться затрати на виконання робіт.

Задача оптимізації формулюється так:

Провести необхідне скорочення терміну робіт з мінімальними затратами.

Для цього в сітковому моделюванні розроблений метод “час – вартість”. Вважається, що кожна робота може виконуватись у трьох режимах:

1) активний (інтенсивний);

2) пасивний (відкладений);

3) нормативний.

Активний режим характеризується залученням додаткової техніки, персоналу, використання понаднормового часу, новітніх технологій. При цьому тривалість виконання роботи зменшиться, порівняно з нормативним, а затрати зростуть.

Пасивний режим(розтягнений) характеризується збільшенням тривалості виконання конкретних робіт, порівняно з нормативним, тобто робота може бути тимчасово відкладена або перервана. Ресурси використовуються для інших робіт. При цьому відбувається економія затрат.

Кожний з режимів характеризується двома параметрами:

Часовими:	вартісними:
$t_{Н(i-j)}$	$Z_{Н(i-j)}$
$t_{А(i-j)}$	$Z_{А(i-j)}$
$t_{П(i-j)}$	$Z_{П(i-j)}$

Достатньою умовою оптимізації є виконання співвідношення:

$$\left\{\begin{array}{l} t_{А(i-j)} < t_{Н(i-j)} < t_{П(i-j)}, \\ Z_{П(i-j)} < Z_{Н(i-j)} < Z_{А(i-j)}. \end{array}\right.$$

Оптимізація проходить в два етапи:

1) перехід з нормативного режиму в активний;
2) перехід в пасивний режим.

При переході з нормативного режиму в активний виникають додаткові витрати, мінімізується тривалість робіт критичного шляху і при цьому сумарні додаткові витрати повинні бути мінімальні.

При переході в пасивний режим виникає додаткова економія затрат, тобто мінімізуються затрати при незмінній тривалості робіт (роботи, що не лежать на критичному шляху переводяться в пасивний режим). При цьому додаткова економія повинна бути максимальною.

Необхідною умовою оптимізації є те, що при будь-яких змінах критичний шлях має залишатись єдиним.

Інформаційною основою для оптимізації є дані таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

№ з/п	Шифр роботи	Режими роботи					
		Активний		**Пасивний**		**Нормативний**	
		Δt	Δz		Δz	T	Z
1	0-1	0	0.8		0.8	2	0,8
2	1-2	2	1500		1500	3	1200
3	2-3	5	15000		15000	10	12000
4	2-5	4	13000		13000	5	11000
5	2-6	6	16000		15000	7	13800
6	2-8	0	1950		1950	2	1950
7	3-4	0	6000		6000	2	6000
8	4-10	5	1		1	6	0.25
9	5-7	9	8000		8000	12	6800
10	6-7	1	1		1	2	0,250
11	7-10	2	10000		10000	3	9200
12	8-9	3	4000		4000	4	3000
13	9-10	4	2400		2400	6	1900
Сума							

Дані нормативного режиму беруться з вихідної таблиці. Нормативна тривалість і вартість робіт визначається середньогалузевими нормами.

Вартість активного режиму визначається розрахунковим шляхом. Тривалість в активному режимі визначається технологічними умовами (дані задаються умовою задачі).

Тривалість в пасивному режимі визначається резервами часу для робіт некритичного шляху.

Процес оптимізації записуємо у вигляді таблиці 2.4.

Таблиця 2.4.

№ з/п	Шифр повного шляху	Тривалість шляху	*Шифри робіт*		
			1	**2**	**3**
			1-2	**1-2**	**5-7**
1	01257-10	25	24	23	22
2	01234-10	23	22	21	21
3	01267-10	17	16	15	15
4	01289-10	17	16	15	15
Сума			***1500***	***1500***	***8000***

Тривалість повних шляхів розраховується в нормативному режимі.

Роботи, що лежать на критичному шляху переводимо з нормативного режиму в активний. Порядок переводу визначається за критерієм мінімальних додаткових витрат. При цьому можливе скорочення повних шляхів, які містять скорочувані роботи. Слідкуємо, щоб дотримувалась необхідна умова оптимізації.

Знаходимо сумарні додаткові витрати

Д =1500*2+8000=11000 (тис. грн).

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

У господарстві планується виконати певний комплекс агротехнічних робіт.

Послідовність виконання запланованого комплексу робіт та їх тривалість наведені в таблицях 21.1-21.10

Побудувати сітковий графік, знайти критичний шлях, визначити числові характеристики сіткової моделі. Розрахункові параметри подані у таблицях 22.1 і 21.12.

Таблиця 21.1 Варіант 0

№ п. п.	Події	Час виконання
1	1-2	8
2	1-3	6
3	1-4	10
4	2-5	4
5	2-7	9
6	3-4	5
7	3-5	5_2
8	3-6	10
9	4-8	12
10	5-6	7
11	5-7	8
12	6-8	8
13	6-9	11
14	7-9	9
15	7-10	14
16	8-9	8
17	9-10	15_3

Таблиця 21.2 Варіант 1

№ п.п	Події	Час виконання
1	1-2	5
2	1-3	5
3	1-4	8
4	2-6	4
5	3-5	2
6	3-7	7
7	4-5	3
8	4-6	2
9	4-8	6
10	7-8	5
11	7-9	9
12	8-9	6
13	5-7	4
14	6-9	10

Таблиця 21.3 Варіант 2

№ п.п	Події	Час виконання
1	1-2	6
2	1-3	7
3	2-4	5
4	3-5	6
5	3-4	4
6	3-6	8
7	4-6	6
8	4-9	12
9	5-6	7
10	5-7	4
11	6-8	5
12	7-8	6
13	7-10	10
14	8-10	5
15	8-9	6
16	9-10	7

Таблиця 21.4 Варіант 3

№ п.п	Події	Час виконання
1	1-2	4
2	1-3	5
3	1-4	7
4	1-5	9
5	2-5	6
6	2-7	10
7	3-4	3
8	3-6	8
9	4-9	12
10	5-6	4
11	5-7	6
12	6-8	7
13	6-9	10
14	7-8	6
15	8-9	8

Таблиця 21.5 Варіант 4

№ п.п	Події	Час виконання
1	1-2	8
2	1-3	6
3	1-4	9
4	2-4	3
5	2-5	4
6	3-6	5
7	4-5	4
8	4-7	6
9	5-6	5
10	5-8	7
11	5-7	6
12	6-8	4
13	6-9	8
14	7-10	11
15	8-10	9
16	9-10	6

Таблиця 21.6 Варіант 5

№ п.п	Події	Час виконання
1	1-2	4
2	1-3	5
3	1-4	6
4	2-5	7
5	2-6	8
6	3-6	6
7	3-7	9
8	4-7	7
9	4-10	13
10	5-6	5
11	5-8	9
12	6-8	7
13	6-7	3
14	6-9	8
15	7-9	6
16	7-10	7
17	8-9	4
18	9-10	5

Задача розміщення.

У деякому районі є n населених пунктів, сполучених один з одним мережею шосейних доріг. Потрібно побудувати станцію технічного обслуговування автомобілів поблизу шосейної дороги. Розташування станції повинне бути зручне для жителів всіх населених пунктів. Наприклад, можна зажадати, щоб сума відстаней від станції до населених пунктів була мінімальною.

Легко представити цю задачу за допомогою графа. Населені пункти представляються вершинами графа, а шосейні дороги – дугами, які їх сполучають. Станція технічного обслуговування повинна бути розташована на одній з дуг графа.

Задача листоноші.

Листоноша щодня забирає листи на пошті, розносить їх адресатам, розташованим уздовж всього маршруту його проходження, і повертається назад на пошту. Шлях, пройдений листоношею, повинен бути якомога коротше.

Вулиці представляються дугами деякого графа. Задача листоноші полягає в тому, щоб знайти маршрути проходження всіх дуг графа мінімальної довжини.

Задача будівництва доріг.

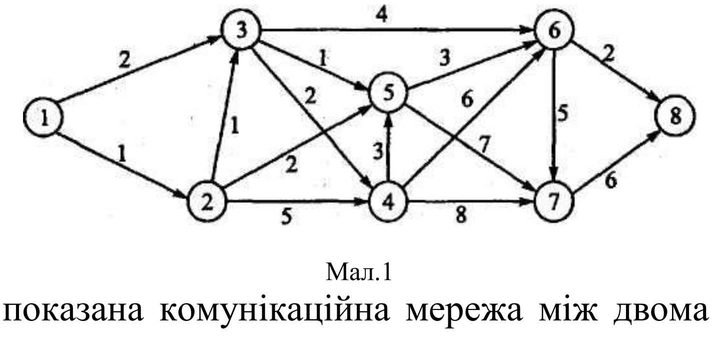
Є n міст, які потрібно з'єднати між собою новими дорогами (не обов'язково кожні два міста повинні бути пов'язані один з одним безпосередньо). Відома вартість прокладки дороги між будь-якими двома містами. Вимагається скласти проект будівництва доріг мінімальної вартості.

Очевидно, що кожне місто представляється вершиною графа, а дорога –дугой, яка сполучає вершини. Кожній дузі ставиться у відповідність число, рівне вартості будівництва відповідної дороги. Вимагається побудувати деяке «покриття» графа мінімальної вартості.

ЗАДАЧІ

1. На мал. 1 показана транспортна мережа, що сполучає вісім міст, і відстані між ними. Знайдіть найкоротші маршрути між наступними містами.

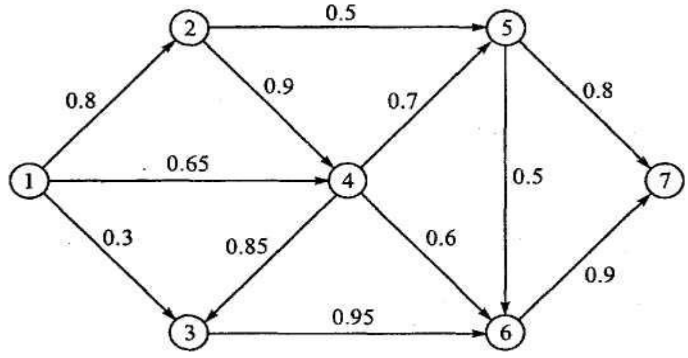
1. Між містами 1 і 8.
2. Між містами 1 і 6.
3. Між містами 4 і 8.
4. Між містами 2 і 6.



Мал.1

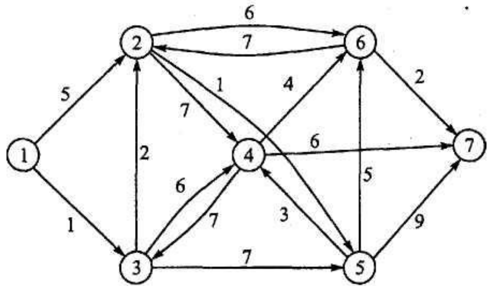
2. На мал. 2 показана комунікаційна мережа між двома приймально–передаючими станціями 1 і 7. Біля кожної дуги цієї мережі вказана вірогідність передачі повідомлень без втрат по цих дугах. Необхідно знайти

маршрут від станції 1 до станції 7 з максимальною вірогідністю успішної передачі повідомлень.



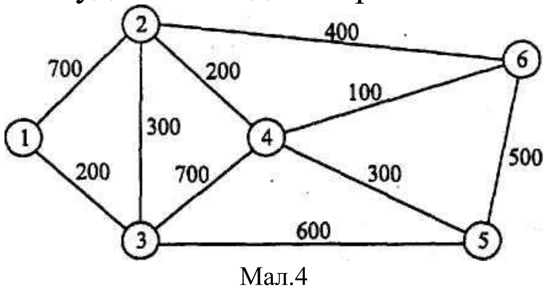
Мал.2

3. Знайдіть найкоротші шляхи між вузлом 1 і всією рештою вузлів мережі, представленої на мал. 3.



Мал.3

4. Телефонна компанія обслуговує шість віддалених один від одного районів, які зв'язані мережею, показаною на мал. 4. Відстані на схемі мережі вказані в милях. Компанії необхідно визначити найефективніші маршрути пересилки повідомлень між будь-якими двома районами.



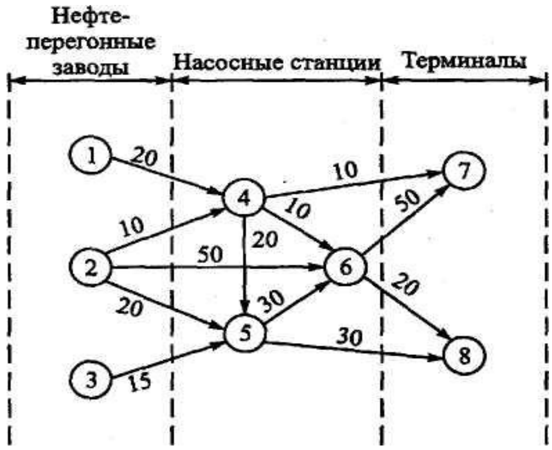
Мал.4

5. Три нафтоперегінні заводи транспортують свою продукцію двом розподільним терміналам по мережі трубопроводів, яка включає і насосні станції (мал. 5). Напрями потоків в мережі показані стрілками, пропускні спроможності окремих сегментів мережі вказані в мільйонах барелів в день.

6. Визначте щоденну продуктивність кожного нафтоперегінного заводу, відповідну максимальній пропускній спроможності мережі трубопроводів.

7. Визначте щоденну потребу кожного розподільного терміналу, відповідну максимальній пропускній спроможності мережі трубопроводів.

8. Визначте щоденну пропускну спроможність кожної насосної станції, відповідну максимальній пропускній спроможності мережі трубопроводів.



Мал. 5

6. Побудувати сіткову модель ремонту Вашої квартири
а) визначити критичний шлях
б) розрахувати пізні строки закінчення і початку подій
в) розрахувати ранні строки закінчення і початку подій
г) розрахувати резерви подій
Рішення:

1. Робимо ремонт двокімнатної квартири поліпшеного планування: житлова кімната, дитяча, кухня, ванна, туалет і коридор.

2. Необхідно зробити:

- змінити шпалери у всіх приміщеннях;
- пофарбувати вікна;
- у залі і коридорі зробити підвісні стелі з розсіяним світлом
- у інших приміщеннях стеля покривається фарбою КЧ
- пофарбувати вхідні двері;
- постелити по всій квартирі ліноліум

Тести по сітковому плануванню

1. $L_{кр}$ – це:
   а) довжина шляху, що не збігається з критичним;
   б) довжина шляху, що збігається з критичним;
   в) найдовший шлях;
   г) найкоротший шлях.
2. Дві роботи можуть бути пов’язані :
   а) однією дугою;
   б) двома стрілками;
   в) безліччю дуг;
   г) інші варіанти.
3. Будь-яка робота не може бути виконана доти:
   а) поки не побудований сітковий графік;
   б) поки не виконана попередня;
   в) поки не наступила слідуюча робота;
   г) інші варіанти.

4. Кожна робота має:

а) попередню та наступну подію;

б) тільки попередню;

в) тільки наступну;

г) затримку виконання.

5. Термін „робота” на сітковому графіку може мати наступний зміст:

а) процес, що має певну тривалість і не вимагає матеріальних і трудових витрат;

б) процес, що має певну тривалість і вимагає матеріальних і трудових витрат;

в) вимагає тільки трудові затрати;

г) вимагає тільки матеріальні затрати;

6. Термін „робота” на сітковому графіку може мати наступний зміст:

а) логічне погодження робіт за їх послідовністю, що передбачається технологією;

б) логічне погодження робіт за їх послідовністю, що не передбачається технологією;

в) фіктивна робота, яка потребує затрат часу;

г) фіктивна робота, яка потребує затрат ресурсів;

7. Термін „робота” на сітковому графіку може мати наступний зміст:

а) очікування природних процесів, що потребують витрат ресурсів;

б) очікування природних процесів, що не потребують витрат ресурсів;

в) очікування природних процесів, що потребують матеріальних ресурсів;

г) інші варіанти.

8. Поняття „шлях”– це:

а) роботи, що відбуваються одна за одною в технологічному ланцюгові на графіку;

б) відстань між кінцевими подіями;

в) послідовність технологічних процесів;

г) відстань між сусідніми подіями.

9. Суть сіткового планування полягає в:

а) у графічному зображенні тільки організаційних взаємозв’язків;

б) у графічному зображенні тільки технологічних взаємозв’язків;

в) у графічному зображенні організаційних і технологічних взаємозв’язків;

г) інші варіанти.

10. Подія – це:

а) момент початку роботи;

б) момент закінчення роботи;

в) момент початку і закінчення роботи;

г) тривалість виконання технологічного процесу.

11. Дугою графа на сітковому графіку називається:

а) кружок;

б) стрілка;

в) пунктирна лінія.

12. Фіктивна робота – це:

а) процес, що має певну тривалість;

б) процес, що вимагає матеріальних затрат;

в) процес, що вимагає трудових затрат;

г) робота, яка не має тривалості;

д) логічне погодження робіт за їх послідовністю;

е) очікування процесів, пов'язане з визначенням часу, але таке, що не потребує витрат ресурсів.

13. Критичний шлях – це:

а) шлях між початковою та кінцевою подіями;

б) найменший шлях від початкової до кінцевої події;

в) найбільший шлях від початкової до кінцевої події;

г) роботи, що відбуваються одна за одною в технологічному ланцюгу.

14. У сіткових моделях використовують такі критерії оптимізації:

а) мінімізація строків виконання робіт при обмеженому рівні наявних ресурсів і вартості робіт;

б) мінімізація вартості наявних робіт при обмежених строках і даному рівні наявних ресурсів;

в) мінімізація потреби в ресурсах при обмежених строках і вартості виконання робіт;

г) максимізація прибутку від діяльності;

д) мінімізація витрат від діяльності.

15. Резерв часу – це:

а) найменша довжина часу;

б) різниця між довжиною критичного шляху і мінімальною довжиною шляху;

в) різниця між тривалістю критичного шляху і тривалістю другого порівняльного шляху.

16. Ранній строк настання події визначається:

а) максимальна сумарна довжина шляху від початкової події до даної;

б) мінімальна сумарна довжина шляху від початкової події до даної;

в) різниця між довжиною критичного шляху і максимальною довжиною від початкової події до даної;

г) різниця між довжиною критичного шляху і мінімальною довжиною від початкової події до даної;

д) різниця між довжиною даного шляху і мінімальною довжиною від початкової події до даної;

е) різниця між довжиною даного шляху і максимальною довжиною від початкової події до даної.

17. Пізній строк здійснення події визначається:

а) мінімальна довжина шляху від початкової події до даної;

б) максимальна довжина шляху від початкової події до даної;

в) мінімальна довжина шляху від даної події до кінцевої;

г) максимальна довжина шляху від даної події до кінцевої;

д) різниця між довжиною критичного шляху та максимальною довжиною шляху від даної події до кінцевої;

е) різниця між довжиною критичного шляху та мінімальною довжиною шляху від даної події до кінцевої.

18. Резерв часу події – це:

а) різниця між раннім та пізнім строком здійснення події;

б) різниця між пізнім і раннім строком здійснення події;

в) сума раннього і пізнього строків здійснення події.

19. Півкритичний шлях має коефіцієнт напруженості:

а) >0,5;

б) <=0,3;

в) <0,5;

г) >=0,8;

д) >0,6.

20. Коефіцієнт напруженості розраховується:

а) для критичних шляхів;

б) для некритичних;

в) для ділянок, що не збігаються з критичним;

г) для ділянок, що збігаються з критичним.

ТЕМА 3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР. МАТРИЧНІ ІГРИ ДВОХ ОСІБ.

3.1. Основні поняття теорії ігор.

При розв'язуванні низки практичних задач у ринковій економіці виникають конфліктні ситуації, коли дві (або кілька) сторін взаємодіють, маючи різні цілі. Кожна зі сторін намагається досягти мети своїм доступним їй шляхом, але жодна з них повністю не впливає на хід подій, тобто результат боротьби лише частково залежить від дій кожної сторони (учасника). Таку ситуацію будемо називати конфліктною.

В економічних системах будь-якого рівня в умовах ринку постає безліч задач, в яких ціла сукупність підсистем має протилежні економічні інтереси (це можуть бути виробничі, маркетингові, фінансові, банківські та інші підсистеми). Оптимальні стратегії дій успішно можна знайти, використавши аппарат теорії ігор. Отже, теорія ігор – це є математична теорія конфліктних ситуацій.

Кожна взята з практики конфліктна ситуація досить складна. Щоб став можливим її математичний аналіз, необхідно абстрагуватися від другорядних деталей і побудувати спрощену модель ситуації. Така модель називається грою, а конфліктуючі сторони - гравцями. Отже, гра - це дійсний або формальний конфлікт, в якому є принаймні двоє учасників (гравців), і кожен з них прямує до власної мети. При цьому всі учасники не можуть максимальною мірою досягти своїх цілей.

Гра – це сукупність правил, які описують поведінку гравців. Кожний випадок розігрівання являє собою партію гри, яка реалізується ходами. Ходи можуть бути особистими (свідомими) і випадковими, які визначаються деяким механізмом випадкового вибору. Рішення, прийняте гравцем при особистому або випадковому ході, називається наслідком. Наслідок гри – це значення деякої функції, яку називають функцією виграшу (платіжною функцією). Поведінка гравця характеризується вибраною ним стратегією. Стратегія гравця – це однозначний опис його вибору в кожній можливій ситуації, в якій він має зробити особистий хід.

Отже, модель конфліктної ситуації (гра) повинна мати такі складові: 1) визначення гравців, які беруть участь у грі;

2) множина стратегій кожного з гравців;

3) наявність функції виграшу, яка відповідає наслідку вибору тієї чи іншої стратегії. Якщо гра складається з двох гравців, вона називається парною, якщо гравців більше - множинною. Якщо гравці мають скінчене число стратегій, гру називають скінченою, у противному разі – нескінченною.

Кожний гравець повинен мати не менш, як дві стратегії, інакше його дії були б заздалегідь визначені. Найглибше вивчена гра двох осіб з нульовою сумою, тобто коли виграш одного гравця дорівнює програшу другого. Такі ігри називаються антагоністичними. Антагоністичні ігри, в яких гравці мають скінчену множину стратегій, називаються матричними. Ця назва пояснюється можливістю характеризувати гру у вигляді прямокутної таблиці, яка має назву платіжної матриці.

Розглянемо процес побудови платіжної матриці докладніше.

3.2. Платіжна матриця. Гра в чистих стратегіях. Сідлова точка.

Нехай дано скінчену гру двох гравців А і В з нульовою сумою. Припустимо, що гравець А має в розпорядженні m стратегій $(A_1, A_2, ... A_i, ... A_m)$, а гравець В - n стратегій $(B_1, B_2, ..., B_j, ... B_n)$.

Така гра матиме платіжну матрицю розміром m*n, коли наслідки вибору стратегій гравця А розміщуватимуться по рядках / отже, наслідки гравця В – по стовпцях.

Припустимо, що гравець А вибрав стратегію A_j, а гравець В – стратегію B_j. Наслідком вибору стратегій (A_j, B_j)при особистих ходах гравців є виграш a_{ij}. Припустимо, що нам відомі значенням виграшів a_{ij} для вибору кожної пари стратегій (A_i, B_j). Ці значення можна записати у вигляді матриці, рядки якої відповідають стратегіям A_i, а стовпці – стратегіям противника B_j (табл. 6.1). Її називають матрицею парної гри з нульовою сумою.

Така таблиця називається платіжною матрицею або матрицею гри.

Розв'язати гру – означає знайти оптимальну стратегію для кожного гравця.

Оптимальною стратегією гравця називається така стратегія, яка при багаторазовому повторенні гри забезпечує гравцеві максимально можливий середній виграш (або, що те саме – мінімально можливий середній програш).

Для знаходження цієї пари стратегій користуються принципом "мінімаксу", сутністю якого є міркування, що супротивник принаймні так само розумний, як і протилежна сторона, і робить все для того, щоб перешкодити супротивникові досягти мети.

Таблиця 3.1

Стратегія гравця А	Стратегія гравця В B_1	В2	……	B_j	…….	B_n	Мінімальний виграш гравця А a_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…..	a_{1j}	…….	a_{1n}	a_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…..	a_{2j}	…….	a_{2n}	a_2
….	…..	…..	….	…..	……	…..	…..
A_i	a_{i1}	a_{i2}	….	a_{ij}	…..	a_{in}	a_i
….	….	….	…..	….	…..	….	….
A_m	a_{m1}	a_{m2}	….	a_{mj}	…..	a_{mn}	a_m
Максимальний програш гравця В β_j	β_1	β_2	……	β_j	……	β_n	

Стратегію гравця А називають оптимальною, якщо при багато разовому застосуванні виграш гравця А не зменшується, які стратегії не застосовував гравець В. Відповідно, оптимальною стратегією для гравця В є така стратегія, при багаторазовій реалізації якої програш гравця В не збільшується, які б стратегії не застосовував гравець А.

Для знаходження таких стратегій гравець А аналізує платіжну матрицю по рядках і для кожної чистої стратегії А вибирає мінімальне значення виграшу a_i залежно від застосованих гравцем В чистих стратегій B_j, тобто $a_i = \min_j a_{ij} (i = 1,2,....,m)$

далі з мінімальних виграшів він визначає стратегію A_0, для якої цей мінімальний виграш буде максимальним:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i a_i \quad (3.1)$$

Величину α називають нижньою ціною гри, або максіном. Вона показує, який мінімальний виграш може здобути гравець А, якщо гравець В застосує всі свої чисті стратегії $B_1, B_2, ..., B_n$.

Відповідно стратегію A_0 гравця А називають максмінною. Гравець В ставить за мету зменшити свій програш. Тому для кожної чистої стратегії B_j він відшукує величину програшу $\beta_j = \max_i a_{ij} (j = 1,2,...,n)$, а потім знаходить таку стратегію B_0, для якої його програш буде мінімальним

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j b_j . \ (3.2)$$

Величина β називається верхньою ціною гри або мінімаксом, як і стратегія B_0.

Отже, використовуючи чисті стратегії (A_0, B_0), гравець А забезпечує виграш не менш як α, а гравець В - програш не більш як β. Отже, вибір гравцями стратегій (A_0, B_0) диктується принципом обережності, або мінімаксним принципом. Максмінну і мінімаксну стратегії часто називають загальним терміном "мінімаксні" стратегії.

Гра, для якої нижня ціна гри α дорівнює верхній ціні β і дорівнює ціні гри α, називається парною грою із сідловою точкою $\alpha = \beta = \nu$ (3.3)

Така гра посідає особливе місце в теорії ігор. Для гри із сідловою точкою в платіжній матриці існує виграш a_{ij}, який є одночасно мінімальним в певному і – му рядку і максимальним в тому самому j – му стовпці. Тільки в цьому разі пара мінімаксних стратегій A_0, B_0 буде оптимальною для гравців. Отже, оптимальні стратегії мають таку властивість: якщо один з гравців додержує своєї оптимальної стратегії, то для другого не може бути вигідним відхилятись від своєї оптимальної стратегії. Парна гра із сідловою точкою має назву гри в чистих стратегіях, оскільки жодному з гравців не вигідно відхилятись від стратегії (A_0, B_0).

Приклад 3.1. Знайдемо розв'язок гри двох осіб для даної платіжної матриці (табл. 3.2). Кожний з гравців має по три стратегії.

Таблиця 3.2

Стратегія гравця А	Стратегія гравця В B_1	B2	B_3	Мінімальний виграш гравця А
A_1	0,5	0,6	0,8	$a_1 = 0{,}5$
A_2	0,9	0,7	0,8	$a_2 = 0{,}7$
A_3	0,7	0,5	0,6	$a_3 = 0{,}5$
Максимальний програш гравця В	0,9	0,7	0,8	$\alpha = \max\limits_i a_i = 0{,}7$ $\beta = \min\limits_j b_j = 0{,}7$ $\alpha = \beta = 0{,}7$

Знайдемо нижню і верхню ціну гри:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i (0{,}5; 0{,}7; 0{,}5) = 0{,}7;$$

$$\beta = \min_j \min_i a_{ij} = \min_j (0{,}9; 0{,}7; 0{,}9) = 0{,}7.$$

Отже, $\alpha = \beta = \nu = 0{,}7$, тобто гра має сідлову точку, яка міститься на перетині стратегій A_2 і B2, які в такому разі є мінімаксними і оптимальними. Ціна гри ν тоді збігається з нижньою α і верхньою ціною β. Отже, увесь час застосовуючи чисті стратегії $(A_0, B_0) = (A_2, B_2)$, гравець А матиме найбільший середній виграш $\alpha = \nu = 0{,}7$, а гравець В – найменший середній програш $\beta = \nu = 0{,}7$.

Відповідь. Оптимальні чисті стратегії: $(A_0, B_0) = (A_2, B_2)$ дають чистий виграш (програш): $\alpha = \beta = \nu = 0{,}7$.

3.3. Гра двох осіб у змішаних стратегіях.

Приклад 3.2. Нехай маємо гру двох осіб, яку задано платіжною матрицею $\begin{pmatrix} 36 \\ 75 \end{pmatrix}$. Спираючись на міркування прикладу 3.1, попробуємо знайти оптимальні стратегії (A_0, B_0).

Насамперед перевіримо існування сідлової точки в платіжній матриці. Для цього знайдемо величини α і β:

$$a_1 = \min_j(3{,}6) = 3;$$
$$a_2 = \min_j 97{,}50 = 5;$$
$$\alpha = \max_i(3{,}5) = 5.$$
$$\beta_1 = \max_i(3{,}7) = 7;$$
$$\beta_2 = \max_i(6{,}5) = 6;$$
$$\beta = \min_j(7{,}6) = 7.$$

Отже, $\alpha \neq \beta \Rightarrow (5 \neq 7)$, тобто доходимо висновку, що гра не має сідлової точки і не може бути розв'язана в чистих стратегіях.

Тому для знаходження максимального середнього виграшу гравця А (або, що те саме, - мінімального можливого середнього програшу гравця В) необхідне чергування в застосуванні стратегій A_1, A_2 (або B_1, B_2). Такі ігри називають іграми в змішаних стратегіях.

Виконується так звана головна теорема теорії ігор: кожна скінчена гра має принаймні один розв'язок, можливий в області змішаних стратегій.

З Цієї теореми випливає, що кожна скінчена гра має ціну v, яка відповідає вибору змішаних оптимальних стратегій (S_a^0, S_b^0) міститься в межах

$$\alpha \leq v \leq \beta. \qquad (3.4)$$

Повернемося до прикладу 6.2 і продовжимо пошук оптимальної пари змішаних стратегій (S_a^0, S_b^0).

Два гравця А змішана стратегія є $S_a^o = (p_1, p_2)$, де p_1 і p_2 - імовірності, з якими гравець А застосовуватиме відповідні чисті стратегії A_1, A_2. Для гравця В – змішана стратегія $S_b^0=(g_1,g_2)$, де g_1,g_2 - імовірності, з якими гравець В застосовує стратегії B_1,B_2. Очевидно, що $P_1+P_2=1$ і $g_1+g_2=1$.

Отже, якщо гравець В застосує чисту стратегію B_1 або В2, то виграш гравця А відповідно дорівнюватиме

$\{3p_1+7p_2=\nu$ (гравець В застосовує B_1)

$\{6p_1+5p_2=\nu$ (гравець В застосовує В2)

Тоді $\begin{cases}3p_1+7p_2=6p_1+5p_2,\\ p_1+p_2=1\end{cases}$ /6.5/

Розв'язавши систему /6.5/, дістанемо

$S_a^0=\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right);\nu=\frac{27}{5}.$

Отже, якщо застосовується стратегія A_1 з імовірністю $p_1=\frac{2}{5}$, а стратегія A_2 з імовірністю $p_2=\frac{3}{5}$, максимальний середній виграш гравця А не може бути більшим за $\nu=\frac{27}{5}$.

Відповідно для гравця В маємо

$3g_1+6g_2=\nu$ (гравець А застосовує стратегію A_1);

$7g_1+5g_2=\nu$ (гравець А застосовує стратегію A_2).

Отже, $\begin{cases}3g_1+6g_2=7g_1+5g_2,\\ g_1+g_2=1.\end{cases}$

Розв'язок системи /3.6/ такий:

$S_b^0=\left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right);$ $\nu=\frac{27}{5}.$

Отже, якщо гравець В застосовуватиме стратегію B_1 з частістю $g_1=\frac{1}{5}$, а стратегію В2 – з частістю $g_2=\frac{4}{5}$, мінімально допустимий його програш не перебільшить значення $\nu=\frac{27}{5}$.

<u>Відповідь</u>. $S_a^0=\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right);S_b^0=\left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right);\nu=\frac{27}{5}.$

3.4. Дублюючі стратегії. Спрощення платіжної матриці.

Платіжну матрицю гри можна спростити завдяки викресленню заздалегідь зайвих рядків і стовпців матриці, які назвемо дублюючими.

Рядок К вважатимемо дублюючим r-го рядка платіжної матриці гри, якщо кожен відповідний елемент К-го ряду буде меншим або дорівнюватиме відповідному елементу r-го рядка, тобто

$$a_{kj} \le a_{rj}\,. \qquad (3.7)$$

У такому разі з платіжної матриці викреслюється К-й рядок. Відповідно К-й стовпець буде дублюючим щодо r-го стовпця платіжної матриці, якщо для всіх елементів К-го і r-го стовпців виконується нерівність

$a_{ik} \ge a_{ir}\,.$ (3.8)

Отже, з платіжної матриці викреслюється К-й стовпець як дублюючий r-й стовпець.

<u>Приклад 3.3.</u> Задано платіжну матрицю, де кожен з гравців А і В має чотири стратегії:

$$C = \begin{pmatrix} 1;2;4;3 \\ 0;2;3;2 \\ 1;2;4;3 \\ 4;3;1;0 \end{pmatrix}$$

Далі, порівнюючи рядки $A_1 = (1;2;4;3)$ і $A_2 = (0;2;3;2)$, бачимо, що кожний елемент другого рядка менший за відповідні його дублюючим, а стратегію A_2 - заздалегідь невигідною.

Рядок третій повторює перший, тому викреслюємо один з цих рядків. Платіжна матриця перетворюється на матрицю

$$D = \begin{pmatrix} 1;2;4;3 \\ 4;3;1;0 \end{pmatrix}$$

У матриці Д дублюючим стовпцем є третій, бо його елементи перевищують усі елементи четвертого стовпця. Викреслюємо третій стовпець у матриці Д.

Отже, матриця Д перетворюється на матрицю

$$F = \begin{pmatrix} 1;2;3 \\ 4;3;0 \end{pmatrix}.$$

Отже, перш ніж приступати до пошуку оптимальних стратегій і ціни гри, необхідно по змозі спростити платіжну матрицю, викреслюючи дублюючі рядки та стовпці.

Якщо гру не можна звести до платіжної матриці розміру /2*2/, або ж до гри (m*n) із сідловою точкою, то застосовують інші методи розв'язування, наприклад, зводять гру до задачі лінійного програмування, ітеративних методів і т.ін.

Приклад 3.4. *Задана платіжна матриця*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \\ 11 & 9 & 10 \\ 12 & 13 & 9 \\ 13 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Записати задачі 2х гравців. Знайти ціну гри.

<u>Розв'язання</u>

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 6 & 10 & 8 \\ 11 & 9 & 10 \\ 12 & 13 & 9 \\ 13 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} 6p_1+11p_2+12p_3+13p_4 \geq \nu \\ 10p_1+9p_2+13p_3+9p_4 \geq \nu \\ 8p_1+10p_2+9p_3+7p_4 \geq \nu \\ p_1+p_2+p_3+p_4=1 \end{cases}$$

Поділимо систему на ν і введемо заміну $x_i = \dfrac{p_i}{\nu}$. Тоді отримаємо:

$Z=\dfrac{1}{\nu}=x_1+x_2+x_3+x_{4\ (min)}$

$$\begin{cases} 6x_1+11x_2+12x_3+13x_4 \geq 1 \\ 10x_1+9x_2+13x_3+9x_4 \geq 1 \\ 8x_1+10x_2+9x_3+7x_4 \geq 1 \end{cases}$$

$x_i \geq 0 \quad i=\overline{1,4}$

Оскільки $Z=\dfrac{1}{\nu}$, то $\nu=\dfrac{1}{Z_{\min}}$. Тоді

$$\begin{cases} p_1=x_1\,\nu \\ p_2=x_2\,\nu \\ p_3=x_3\,\nu \\ p_4=x_4\,\nu \end{cases}$$

$p_1+p_2+p_3+p_4=1$

Розв`яжемо двоїсту задачу (задача гравця В):

$$\begin{cases} 6q_1+10q_2+8q_3\le 1 \\ 11q_1+9q_2+10q_3\le 1 \\ 12q_1+13q_2+9q_3\le 1 \\ 13q_1+9q_2+9q_3\le 1 \end{cases}$$

$q_1+q_2+q_{3=}1$

Поділимо систему на ν і введемо заміну $y_j=\dfrac{q_j}{\nu}$. Тоді отримаємо:

$F=\dfrac{1}{\nu}=y_1+y_2+y_3+y_{4\,(\max)}$

$$\begin{cases} 6y_1+10y_2+8y_3\le 1 \\ 11y_1+9y_2+10y_3\le 1 \\ 12y_1+3y_2+9y_3\le 1 \\ 13y_1+9y_2+7y_3\le 1 \end{cases}$$

$y_j\ge 0 \quad i=\overline{1,3}$

Оскільки $F=\dfrac{1}{\nu}$, то $\nu=\dfrac{1}{F_{\max}}$. Тоді

$$\begin{cases} q_1=y_1\,\nu \\ q_2=y_2\,\nu \\ q_3=y_3\,\nu \\ q_4=y_4\,\nu \end{cases}$$

$q_1+q_2+q_3+q_4=1$

Використовуючи «Поиск решения» знайдемо відповідні значення.

	Тип обмеж.	**В-ний член**	0	0,08163	0,02041	0	0	0,02041	0,08163	
			X1	**X2**	**X3**	**X4**	**Y1**	**Y2**	**Y3**	
	≥	1	6	11	12	13				1,14286
	≥	1	10	9	13	9				1
	≥	1	8	10	9	7				1

	≤	1					6	10	8	0,85714
	≤	1					11	9	10	1
	≤	1					12	13	9	1
	≤	1					13	9	7	0,7551

Zmin	0,102041
Fmax	0,102041

ν=	9,8

	p=	x	v
p1	0	0	9,8
p2	0,8	0,08163	9,8
p3	0,2	0,02041	9,8
p4	0	0	9,8
$\sum$	**1**		

	q=	y	v
q1	0	0	9,8
q2	0,2	0,02041	9,8
q3	0,8	0,08163	9,8
$\sum$	**1**		

Знайдемо нижню і верхню ціни гри:

α =max(6,9,9,7)=9

β=min(13,13,10)=10

$\alpha \le v \le \beta$. Знайдене значення v задовольняє дану умову 9≤9,8≤10.

Отже, якщо гравець А застосує другу стратегію з імовірністю 0,8, а третю з імовірністю 0,2, то його прибуток буде 9,8 гр.од. А якщо гравець В застосує другу стратегію з імовірністю 0,2, а третю з імовірністю 0,8, то отримує середній мінімальний програш 9,8 гр.од.

Завдання для самостійного розв’язання

Варіант 1. $C=\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	Варіант 2. $C=\begin{pmatrix} 12 & 4 & 17 \\ 6 & 7 & 14 \end{pmatrix}$	Варіант 3. $C=\begin{pmatrix} 11 & 5 & 18 \\ 7 & 8 & 15 \\ 7 & 8 & 15 \end{pmatrix}$
Варіант 4. $C=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 16 \\ 5 & 6 & 13 \\ 5 & 6 & 13 \end{pmatrix}$	Варіант 5. $C=\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	Варіан 6. $C=\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 6 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
Варіант 7. $C=\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 7 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	Варіант 8. $C=\begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 8 & 9 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$	Варіант 9. $C=\begin{pmatrix} 10 & 4 & 17 \\ 6 & 7 & 14 \\ 6 & 7 & 14 \end{pmatrix}$
Варіант 10. $C=\begin{pmatrix} 13 & 7 & 20 \\ 9 & 10 & 17 \\ 9 & 10 & 17 \end{pmatrix}$	Варіант 11. $C=\begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 9 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$	Варіант 12. $C=\begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 10 & 11 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

Варіант 13.	Варіант 14.	Варіант 15.
$C=\begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 11 & 12 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix} 14 & 8 & 21 \\ 10 & 11 & 18 \\ 9 & 10 & 17 \end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix} 15 & 9 & 22 \\ 11 & 12 & 18 \\ 9 & 10 & 17 \end{pmatrix}$
Варіант 16. $C=\begin{pmatrix} 17 & 11 \\ 12 & 13 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$	Варіант 17. $C=\begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 13 & 14 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$	Варіант 18. $C=\begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 15 & 16 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$
Варіант 19. $C=\begin{pmatrix} 16 & 10 & 23 \\ 12 & 13 & 19 \\ 10 & 11 & 17 \end{pmatrix}$		

№ 1.Скласти матрицю власної гри (наприклад: виробник – покупець; футбол; гра на гроші; охорона об’єкта та інш. у чистих стратегіях) на двох гравців, три стратегії у кожного гравця з їх поясненнями. Дати пояснення умов гри. Виграші по комірках визначити самостійно. Отримати сідлову точку. Зробити висновки.

№ 2.Розрахувати ймовірності та ціни гри мішаної стратегії згідно даних табл.26.2.1 та табл.26.2.2 Дати визначення і пояснення мішаної стратегії. Тут $A=\sqrt{N}\,;N$- порядковий номер студента у групі.

Таблиця.1. Матриця гри.

Г1	Г2	
	С21	С22
С11	2N	N
С12	A	3N

Таблиця.2. Матриця гри.

Г1	Г2	
	С21	С22
С11	2A	2N
С12	N	A

№ 3.Гра "Відкриття крамниці". Молода людина вирішила відкрити крамницю по продажу товарів. Встало питання про визначення цін на товари. Бувалі досвідчені люди йому сказали, що прибуток крамниці залежить від ціни на товар: якщо ціна висока, то покупців стає менше, і прибуток зменшується; а якщо ціна менша, то прибуток може збільшитись за рахунок зростання кількості покупців і відповідної реклами, яка створюється крамниці. Поради з досвідченими людьми та власний досвід допомогли створити матрицю гри (табл.3).

Таблиця 3. Гра "Відкриття крамниці"

(N – порядковий номер студента у групі)

Г1	Г2		α
	C21	C22	
C11	0,15N	0,1N	
C12	0,2N	0,3N	
β			

У табл. 3 гравець Г1 – це молода людина, Г2 – покупці. Відповідні стратегії означають: С11- підвищення ціни на товари; С12 - зменшення ціни на товари; С21 - купувати товар; С22 - не купувати товар. У комірках таблиці записаний очикуваний прибуток крамниці (виграш гравця Г1).

№ 4.Гра "Оптова-роздрібна торгівля". Підприємство виробляє товари Т1 та Т2 і може вивозити на ринок або товар Т1 або товар Т2. Встало питання про вихід на ринок з оптовою або роздрібною продажею товарів. Досвід бувалих людей показує, що за один вихід на ринок середньостатистично підприємство може отримати прибуток при стратегіях:

З оптовою торгівлею (стратегія С11): за товар Т1 – 3N тис. грн., або за товар Т2 – 1,5N тис. грн.

З роздрібною тогівлею (стратегія С12): за товар Т1 – N тис. грн., або за товар Т2 – 4N тис. грн.

Таблиця 4. Гра "Оптова-роздрібна торгівля".

Г1	Г2		α
	С21	С22	
С11	3N	1,5N	
С12	N	4N	
β			

У табл. 4 гравець Г1 – це підприємство, а Г2 – ринок. Відповідні стратегії означають: С11 – оптовий продаж товарів; С12 - роздрібний продаж товарів; С21 - купівля товару Т1; С22 - купівля товару Т2. У комірках таблиці записаний очікуваний прибуток підприємства (виграш гравця Г1). Як бачимо, задача не має сідлової точки: гравець Г1 готується отримати прибуток N тис. грн, у той час як ринок готовий заплатити 3N тис. грн. Ці цифри не є рівними. Вихід у даному випадку полягає у змішаній стратегії.

№ 5.Гра “Напад на об’єкт ворога Г2”. У комірках табл.26.5 наведені ймовірності поразки об’єкта ворога при використанні стратегій:

1.Нападаючою стороною (Г1): С11 – літаків та танків; С12 – С12 – танків та десанту; С21 – десанту та ракетного обстрілу.

2. Обороняючою стороною (Г2): С21 – літаків та ракет; С12 – С12 – мін та артилерії; С21 – артилерії та літаків.

Таблиця 5. Гра “Напад на об’єкт ворога Г2”.

Г1	Г2			α
	С21	С22	С23	
С11	0,2	0,4	0,7	
С12	0,85	0,02N+0,4	0,6	
С13	0,2	0,01N	0,01N	
β				

№ 6. Приклад гри з природою Припустимо, що планується військова операція: нанесення авіацією гравця Г1 удару по об’єкту гравця Г2 (природи). Гравець Г1 може вибрати 4 стратегії – нанесення удару з 4-х сторін: С11 – з півночі, С12 – зі сходу, С13 – з півдня, С14 – з заходу. Ефективність дій авіації Г1 залежить від стратегії $C2_j$ -стану “природи” та ймовірностей $P2_j$ використання ціх стратегій: $C2_1$ - ясно , ймовірність $P2_1$;

$C2_2$- пасмурно , ймовірність $P2_2$; $C2_3$- туман, дощ. Ймовірності дорівнюють $P2_1 = 0{,}06N; P2_2 = 0{,}03N; P2_3 = 0{,}01N$.

Таблиця 6. Ефективність дії авіації

(N – Порядковий номер студента у групі).

Спосіб дії Г1	Стратегії природи (Г2)		
	C21	C22	C23
C11	0,32	0,05N	0,25
C12	0,022N	0,03N	0,02N
C13	0,03N	0,025N	0,2
C14	0,25N	0,25	0,3

Треба забезпечити найбільший можливий виграш у найгірших умовах при різних ймовірностях $P2_j$ використання погодою Г2 стратегій $C2_j$.

№ 7. Розв′язати задачу №6, якщо всі стратегії є рівноймовірними.

№ 8. Розв′язати задачу №6, якщо ймовірності стратегій ранжуються у ряд за їх величиною: $P2_1 > P2_2 > P2_3$. Вважаємо, що ймовірності у порівнянні з сусідньою меншою збільшуються у "1,5 рази". Скласти рівняння по визначенню (Р21; Р22; Р23), враховуючі, що всі ймовірності складають повну групу. Після цього розрахувати оцінки стратегій.

№ 9. Розв′язати задачу №26.6 з використанням критериїв Вальда, Лапласа, Севіджа, Гурвіца.

Задача 10.Фірма планує виробництво нової продукції швидкого харчування. Дослідницький відділ впевнений у великому успіху нової продукції і має пропозицію впровадити її негайно, без рекламної кампанії на ринках збуту фірми. Відділ маркетингу оцінює ситуацію інакше і пропонує провести інтенсивну рекламну кампанію., яка котуватиме 100 тис.грн., а у випадку успіху принесе 950 тис. грн. річного прибутку. У випадку невдачі рекламної кампанії (імовірність цього становить 30%) річний дохід оцінюється лише в 200 тис. грн. Якщо рекламна кампанія не проводитиметься взагалі, річний дохід оцінюється в 400 тис. грн. при умові, що покупцям сподобається нова продукція (імовірність цього дорівнює 0,8), і в 200 тис.грн. з імовірністю 0,2, якщо покупці залишаться байдужими до нової продукції.

Побудувати дерево рішень. Визначити, як має діяти фірма щодо виробництва нової продукції.

Тести по теорії ігор

1. Конфліктна ситуація описується за допомогою:
   а) симплекс-методу;
   б) М-методу;
   в) гри;
   г) графічного методу.
2. Учасники конфліктної ситуації називаються:
   а) гравцями;
   б) конфліктуючими сторонами;
   в) стратегами;
   г) інші варіанти.
3. Яка з складових гри не існує:
   а) кількість гравців;
   б) множина стратегій кожного з гравців;
   в) наявність функцій виграшу;
   г) особистий хід.
4. Якщо гра складається з двох гравців, вона називається:
   а) дует;
   б) парною;
   в) скінченою;
   г) обмеженою.
5. Кожний гравець повинен мати не менше:
   а) однієї стратегії;
   б) двох стратегій;
   в) трьох стратегій;
   г) чотирьох стратегій.
6. Гра двох осіб з нульовою сумою – це:
   а) виграш одного дорівнює програшу другого;
   б) виграш одного дорівнює виграшу другого;
   в) програш одного дорівнює програшу другого;
   г) інші варіанти.
7. Антагоністичні ігри – це:
   а) ігри, які мають протилежні інтереси;
   б) ігри, коли виграш одного дорівнює програшу другого;
   в) ігри, коли інтереси співпадають;
   г) ігри, коли програш одного дорівнює програшу другого;

8. Матричними називаються антагоністичні ігри, в яких гравці мають:

а) скінченну множину стратегій;
б) нескінченну множину стратегій;
в) по дві стратегії кожен;
г) функцію виграшу.

9. Нижня ціна гри – це:

а) мінімальний виграш гравця А, якщо гравець В застосує всі свої чисті стратегії;
б) максимальний програш гравця А;
в) мінімальний виграш гравця В;
г) максимальний програш гравця В.

10. Гра в чистих стратегіях – це:

а) парна гра із сідловою точкою;
б) скінченна гра двох гравців;
в) антагоністичні ігри;
г) гра конфліктуючих сторін.

11. Гра з не нульовою сумою – це:

а) виграш одного дорівнює програшу другого;
б) коли гравці координують свої дії;
в) програш одного дорівнює програшу другого;
г) коли учасникам не вигідно інформувати партнера про свою стратегію.

12. Ігри з ненульовою сумою поділяються на:

а) коперативні;
б) некоперативні;
в) позиційні;
г) ігри в чистих стратегіях.

13. Позиції, які не мають альтернатив, називаються ;

а) початковими;
б) кінцевими;
в) завершальними;
г) графами.

14. Шлях від вихідної до завершальної називається:

а) критичним;
б) партіями;
в) резервом;
г) дуга.

15. Вершини граф називаються:

а) подіями;
б) позиціями;
в) моделями;
г) стратегіями.

16. Позиційна модель стосунків може мати:

а) довільну кількість гравців;

б) не менше двох;
в) одного гравця з кількома стратегіями;
г) інші варіанти.

17. Точка рівноваги гри використовується для:
а) позиційної гри;
б) кооперативної гри;
в) некооперативної гри з ненульовою сумою;
г) некооперативної гри з нульовою сумою.

18. У некооперативних іграх гравці приймають рішення:
а) незалежно один від одного;
б) залежно один від одного;
в) щоб виграш одного дорівнював програшу другого;
г) щоб виграш був максимальним.

19. Кооперативною грою називається гра з ненульовою сумою, в якій гравцям дозволяється:
а) створювати коаліції;
б) створювати конфліктні ситуації;
в) не узгоджувати перед грою свої дії;
г) шукати точку рівноваги.

20. Правдоподібна загроза виникає у:
а) позиційних іграх;
б) непозиційних іграх;
в) антагоністичних;
г) кооперативних.

ТЕМИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

ТЕМА 4. СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Задачі масового обслуговування

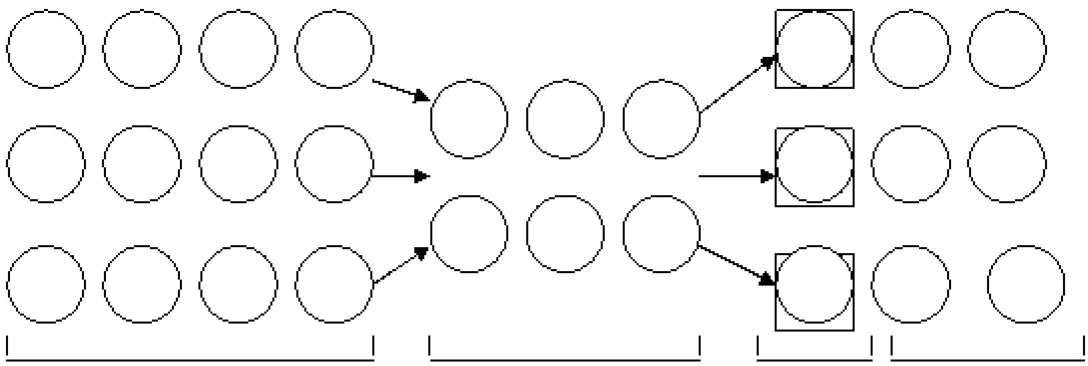
Задачі масового обслуговування умовно ділять на

- задачі аналізу;
- задачі синтезу;

Задачі аналізу використовують оцінку ефективності функціонування системи масового обслуговування при незмінних, наперед заданих вхідних характеристиках системи; структури системи; дисципліни обслуговування; потоках вимог та законів розподілу часу їх обслуговування.

Задачі синтезу направлені на пошук оптимальних параметрів системи масового обслуговування. Систему масового обслуговування в загальному випадку можна представити як сукупність послідовно зв'язаних між собою вхідних потоків вимог на обслуговування черг, каналів обслуговування та вихідних потоків вимог.

Схеми системи обслуговування:



Вхідні потоки Черга Канал Вихідні потоки

обслуговування

Випадкових характер вхідного потоку вимог, а також час обслуговування каналів, призводить до утворення випадкового процесу, котрого потрібно дослідити.

Класифікація систем масового обслуговування

Якщо досліджені чи задані потоки вхідних вимог, механізм (число каналів обслуговування, час обслуговування та ін.) та дисципліна обслуговування, то це дає базис для побудови математичної моделі системи.

В задачах аналізу систем масового обслуговування в якості основних показників функціонування системи можуть бути використані:

1) ймовірність простою P0 каналу обслуговування;

2) ймовірність того, що в системі знаходяться n вимог (ймовірність Pn):

3) середнє число вимог, що знаходяться в системі (Nсист = $\sum_{n=1}^{\infty} nP_n$);

4) середнє число вимог, що знаходяться в черзі

$$N_{черг} = \sum_{n=N_k}^{\infty} (n - N_k) P_n$$
, де

Nk – число каналів обслуговування.

5) Середній час очікування в черзі Тчерг. Для розімкнутої системи

$$T_{черг} = \frac{N_{черг}}{\lambda}$$
, де

λ - це інтенсивність надходження потоковимог в систему.

Для замкнутої системи:

$$T_{черг} = \frac{N_{черг}}{\lambda(m - N_{черг})}$$
, де

m – число вимог, що потребують обслуговування.

6) середній час очікування вимог в системі Тсист;

7) середнє число вільних каналів обслуговування:

$$N_{ВК} = \sum_{n=0}^{N_k - 1} (N_k - n) P_n;$$

8) середнє число зайнятих каналів обслуговування:

$$N_{ЗК} = \sum_{n=1}^{N_k} nP_n$$

Задачі аналізу одноканальних систем масового обслуговування

Як видно з приведеної класифікації систем масового обслуговування, є велика кількість різновидностей. Обмежимось системами масового обслуговування які найбільш часто зустрічаються.

- детерміновані одноканальні

- одноканальні розімкнуті з найпростішим потоком надходження вимог до системи

- одноканальні замкнуті (потік вимог Пуассоновський) – з очікуванням.

Усі ці системи можуть бути досліджені аналітичними методами, побудованими на основі представлення процесу формування системи як марковського процесу з неперервнім часом та детермінованим станом.

Задача аналізу детермінованої системи

Постановка задачі: нехай досліджується виробничий процес, в котрому надходження вимог відбувається через рівні проміжки часу.

Таким чином:

$\Delta t_{н} = const$

тобто інтенсивність потоку надходження вимог λ, котра дорівнює $\lambda = \frac{1}{t_{н}}$ також є const, і обслуговування проводиться через рівні проміжки часу

$\Delta t_{обсл} = const$

(інтенсивність обслуговування $\eta = \frac{1}{\Delta t_{обсл}}$ також є const)

Є один канал обслуговування, та вважається, що

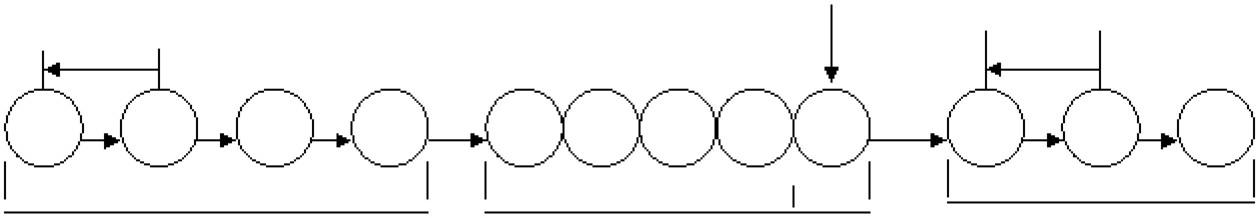
$\frac{\Delta t_{обсл}}{\Delta t_{надх}} = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

(інакше черга буде безкінечно зростати)

Вважаємо також, що на початок обслуговування в системі уже знаходиться n вимог, і необхідно визначити, через який час черга зникне:

$\psi = \frac{\lambda}{\mu}$ - називається коефіцієнтом використання.

Черга буде безкінечно зростати, якщо $\psi > 0$, якщо він дорівнює одиниці, то черга буде мати постійну довжину. Схематично робота системи масового обслуговування що розглядається представляється наступним чином:



Δt_0 $\Delta t_{обр}$

вхідний потік вимог черга канал вихідний потік вимог обслуговування

Поки обслуговується черга з n вимог, протягом часу $T = n\Delta t_{обсл}$ знову поступає на обслуговування n_1 перших вимог

$$n_1 = \frac{t}{\Delta t_н} = \frac{n * t_{обсл}}{\Delta t_н} = n\frac{\lambda}{\mu} < n\,\psi$$

Аналогічно поки будуть обслуговуватися n_1 вимог протягом часу $T_1 = n_1\Delta t_{обсл}$ додатково надійдуть на обслуговування n_2 вимог.

$$n_2 = \frac{t_1}{\Delta t_н} = \frac{n_1\Delta t_{об}}{\Delta t_н} = n\frac{\lambda}{\mu} = n_1\psi = n\,\psi^2$$

це відбувається до тих пір, поки не буде виконуватись рівність $\Delta t_k = \Delta t_н$, після чого черга зникне.

Весь процес функціонування системи масового обслуговування можна представити в аналітичному вигляді.

Час, через котрий черга зникне, можна навіть представити у вигляді:

$$T = t + t_1 + \ldots + t_н = \sum^k t_i$$

Дослідження математичної моделі

Для обчислення часу, через який черга зникне необхідно розкрити математичну модель, а саме:

$$T = n_1\Delta t_{обсл} + n_2\Delta t_{обсл} + \ldots + n_k\Delta t_{обсл} = \Delta t_{обсл}(n_1 + n_2 + \ldots + n_k) = \frac{1}{\mu}(n_1 + n\,\psi + \ldots + n\,\psi^k) =$$

$$= \frac{n}{\mu}(1+\psi+\psi^2+\ldots+\psi^k) = \frac{n(1-\psi^{k+1})}{\mu(1-\psi)}$$

В моделі використана формула суми геометричної прогресії. Чим ближче інтенсивність потоку ψ до інтенсивності обслуговування μ, тим через більший проміжок часу зникне черга. Якщо величиною ψ^{k-1} можна знехтувати для спрощення, тоді можемо записати, що

$$T \approx \frac{n}{\mu-\lambda}$$

Задача аналізу розімкнутої системи з очікуванням (потоки вимог Пуасоновські)

Постановка задачі:

Нехай дана деяка система масового обслуговування, для котрої справедливі наступні гіпотези:

1) ймовірність надходження вимог не залежить від прийнятого початку відліку часу, а залежить тільки від часу періоду спостереження (потік стаціонарний)

2) не надходять до систему і не покидають її одночасно 2 чи більше вимог (потік стаціонарний)

3) надходження однієї вимоги не залежить від надходження іншої (відсутність післядії). Відомі також інтенсивність λ надходження потоків вимог (середнє число обслуговування за одиницю часу - $1/\Delta t_{обсл}$). Потрібно визначити основні характеристики системи, а саме:

- P – ймовірність простою каналу обслуговування
- P_n - ймовірність того, що в системі знаходяться n-вимог
- $N_{сист}$ - середнє число вимог, що знаходяться в системі
- $N_{чер}$ - середнє число вимог, що знаходяться в черзі
- $T_{сист}$ - середній час очікування вимог в системі.

Потік вимог, що володіє якостями стаціонарності, ординарності та відсутністю післядії, називають простішим. В нашій задачі потік вимог простіший. Основним поняттям при аналізі процесу системи масового обслуговування є стан системи. Знаючи стан системи можна передбачити у ймовірностному сенсі її поведінку. Простіший потік – це стаціонарний Пуасоновський потік. Якщо всі потоки подій, що переводять систему із одного стану до іншого являються Пуасоновськими, то для цих системи ймовірність стану описується за допомогою систем звичайних диференційних рівнянь. В більшості задач не прикладного характеру заміна неПуасоновського потоку подій Пуасоновським з тими ж інтенсивностями призводить до отримання рішення, котре мало відрізняються від істинного, а іноді і зовсім не відрізняється. В якості критерію відмінності реального стаціонарного потоку від Пуасоновського можна розглядати близькість математичного очікування числа дисперсій подій, що надходять на визначеній ділянці часу в реальному потоці.

Існує визначений математичний прийом, що значно полегшує вивід диференційного рівняння для ймовірностного стану. Спочатку будується розмічений граф стану з показом можливих переходів. Це полегшує дослідження та робить його більш наглядним. Граф стану, на котрому проставлені не тільки стрілки переходів, але й інтенсивність відповідних потоків подій називають розміченим.

Якщо складений розмічений граф стану, то для побудови математичної моделі, тобто для складання системи звичайних диференційних рівнянь рекомендується використовувати наступні правила:

похідна $\frac{\lambda P_n(t)}{dt}$ ймовірності перебування системи у стані n дорівнює алгебраїчній сумі наступних величин: число величин цієї суми дорівнює числу стрілок на графі стану системи, що з'єднує стан n з іншими станами. Якщо стрілка направлена в стан n, то відповідна величина береться зі знаком "+" . Якщо стрілка направлена зі стану n – то зі знаком "-". Кожна величина суми дорівнює добутку ймовірностей того стану, з котрого направлена стрілка на інтенсивність потоку подій, що переводять систему по даній стрілці.

У відповідності з розміченим графом стану, використовуючи даний стан, запишемо систему звичайних диференційних рівнянь ймовірностей стану таким чином:

$$\frac{dP_0}{dt} = -P_0(t)\lambda + P_1(t)\mu;$$

$$\frac{dP_n}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda - (\lambda+\mu)P_n(t) + P_{n+1}(t)\mu$$

Дослідження математичної моделі

Обмежемся дослідженням режиму роботи що встановився замкнутої одноканальної системи. Тоді:

$$\frac{dP_0}{dt} = 0$$ (n=0,1, .)

Дійсно, замість системи диференційних рівнянь отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$-P_0\lambda + P_1 = 0$$

$$P_0\lambda - (\lambda+\mu)P_1 + P_2\mu = 0$$

$$P_{n-1}\lambda - (\lambda+\mu)P_n + P_{n-1}\mu = 0$$

Використовуючи отриману систему алгебраїчних рівнянь легко виразити ймовірності стану системи у вигляді квадратної рекурентної формули . З першого рівняння визначається ймовірність присутності однієї вимоги в системі.

$$P_1 = P_0\frac{\lambda}{\mu} = \psi P_0$$

Із другого рівняння ймовірність присутності двох вимог в системі:

$$P_2 = P_1\frac{(\lambda+\mu)}{\mu} - P_0\frac{\lambda}{\mu} = \psi P_1 + P_1 - \psi P_0 = \psi P_1$$

І в результаті отримуємо:

$$P_2\psi^2P_0$$

Аналогічно проводиться перетворення для P_3

$$\mu P_3 - (\lambda-\mu)P_2 + \lambda P_1 = 0$$

$$P_3 = \frac{\lambda+\mu}{\mu}P_2 - \frac{\lambda}{\mu}P_1 = \psi P_2 + P_2 - \psi P_1 = \psi P_2$$

І врешті сумуємо отримані значення $P_0, P_1, \dots, P_n$ та знаходимо суму:

$$-\psi P_1 = \psi P_2$$

$$P_3 = \psi^3 P_3$$

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = P_0 + \ldots + P_i + \ldots + P_n = P_0 + \psi P_0 + \ldots + \psi^n P_0$$

Використовуючи формулу геометричної прогресії отримуємо:

$$P(1-\psi+\ldots+\psi^n) = P_0 \frac{(1-\psi^{n-1})}{(1-\psi)}$$

і при $n \to \infty \ (\psi < 0)$, сума:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = P_0 \frac{1}{1-\psi} = 1$$

Звідки ми маємо:

1) ймовірність простою каналу обслуговування:

$$P_0 = 1 - \psi_1$$

2) знаходимо ймовірність того, що в системі знаходиться n вимог:

$$P_n = \psi^n P_0 = \psi^n (1-\psi)$$

3) середнє число вимог, що знаходяться в системі:

$$N_{сист} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\, \psi^n (1-\psi) = (1-\psi) \sum_{n=1}^{\infty} n\, \psi^n = (1-\psi)(\psi + 2\psi^2 + 3\psi^3 + \ldots + n\, \psi^n + \ldots) =$$

$$= \psi(1-\psi)(1 + 2\psi + 3\psi^3 + \ldots + n\, \psi^{n-1} + \ldots)$$

Остання дужка є похідною від наступного виразу:

$$\psi + \psi^2 + \ldots + \psi^n \ldots = \psi(1 + \psi + \ldots + \psi^{n-1} + \ldots) = \psi/(1-\psi) \ \ (\psi < 1),$$

тобто цей вираз дорівнює:

$$1/(1-\psi)^2$$

В результаті отримуємо:

$$N_{сист} = \psi(1-\psi)/(1-\psi)^2 = \psi/(1-\psi)$$

4) Далі знаходимо середнє число вимог, що знаходяться в черзі:

$$N_{черг} = (\lambda/\mu) N_{сист} = \psi^2/(1-\psi)$$

5) Знаходимо середній час очікування вимоги в системі, котрий можливо визначити, знаючи середнє число вимог, що знаходяться в системі:

$T_{сист} = N_{сист} / \lambda = (1/\mu)(1/(1-\psi))$

Задача аналізу замкнутої системи з очікуванням (потоки вимог Пуасоновські)

Постановка задачі:

Нехай досліджується деяка система масового обслуговування з обмеженою кількістю вимог в системі, тобто вимоги, що обслуговуються, знову повертаються в систему обслуговування. Інтенсивність надходження однієї вимоги в систему відома і дорівнює λ. Інтенсивність обслуговування також відома та дорівнює μ. Число вимог, що потребують обслуговування. дорівнює m. Необхідно визначити основні характеристики системи, а саме – ймовірність того, що в системі є n вимог - P_n. Ймовірність простою каналу обслуговування - P_0.Середнє число вимог, що знаходяться в черзі - $N_{черг}$. Середнє число вимог, що знаходяться в системі - $N_{сист}$. Середній час очікування в черзі - $T_{черг}$. Середній час очікування вимоги в системі - $T_{сист}$.

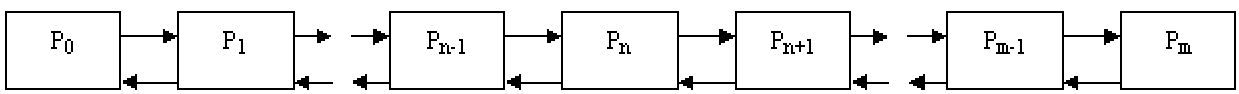
Стан системи будемо пов’язувати з числом вимог, що знаходяться в системі. При цьому можливі два стани:

1) число вимог, що поступили в систему, дорівнює нулю $(n = 0)$,тобто канали обслуговування простоюють.

2) число вимог , що поступили в систему $(0 = n \le m)$.

Закреслимо розмічений граф стану одноканальної замкнутої системи масового обслуговування з очікуванням:

$m\lambda \ (m-1)\lambda \ (m-n+1)\lambda \ (m-n)\lambda \ \lambda$



Побудова математичної моделі

У відповідності до розміченого графа стану та використовуючи правило Колмагорова, запишемо систему диференційних рівнянь для ймовірності стану:

$$\frac{dP_0}{dt} = -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t);$$

$$\frac{dP_n}{dt} = -[(m-n)\lambda + \mu]P_n(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = -\mu P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t)$$

Обмежемся дослідженням режиму роботи системи, що встановився. Тоді:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0,\quad n = (0,1,\ldots,m)$$

і замість системи звичайних диференційних рівнянь ми отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$m\lambda P_0 - \mu P_1 = 0$$

$$[(m-n)\lambda + \mu]P_n - (m-n+1)\lambda P_{n-1} - \mu P_{n+1} = 0$$

Для $0 \le n \le m$ неважко отримати рекурентну формулу:

$$P_1 = \frac{m\lambda}{\mu}P_0 = m\psi P_0$$; при $n = 1$

$$P_2 = \frac{1}{\mu}\{[(m-1)\lambda + \mu]P_1 - m\lambda P_0\} = [(m-1)\psi + 1]P_1 - m\psi P_0 = (m-1)\psi P_2$$; при $n = 2$

$$P_3 = \frac{1}{\mu}\{[(m-2)\lambda]P_2 - (m-1)\psi P_1)\} = [(m-2)\psi + 1]P_2 - (m-1)\psi P_1 = (m-2)\psi P_2$$

$$P_n = (m-n+1)\psi P_{n-1};$$

Ймовірність того, що в системі знаходиться n вимог, складе:

$$P_n = (m-n+1)\psi(m-n+2)\psi\ldots(m-1)\psi m\psi P_0 = \frac{m!\psi^n}{(m-n)!}P_0$$

Використовуючи рівність:

$$\sum_{n-0}^{m} P_n = \sum_{n=0}^{m} \frac{n!\psi^m}{(m-n)!}P_0 = 1$$

можна отримати вираз для P_0.

Ймовірність простою каналу обслуговування P_0 буде дорівнювати:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{m!\psi^n}{(m-n)!}\right]^{-1}$$

Середнє число вимог, що знаходяться в черзі, дорівнює:

$$N_{черг} = \sum_{n=2}^{m}(n-1)P_n = m!\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{(n-1)\psi^n}{(n-m)!}P_0\right) = m - \frac{1+\psi}{\psi}(1-P_0)$$

Середній час очікування вимоги в черзі:

$$T_{черг} = \frac{\mu}{\mu(m-N_{черш})} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{m}{1-P_0} - \frac{1+\psi}{\psi}\right]$$

Середній час очікування вимоги в черзі:

$$T_{сист} = \frac{N_{сист}}{\lambda(m-N_{сист})} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{m}{1-P_0} - \frac{1}{\psi}\right].$$

Як можна помітити, визначення основних характеристик одноканальних систем масового обслуговування вимагає великої обчислювальної роботи, в зв'язку з чим всі розрахунки робляться на комп'ютері.

Задача аналізу розімкнутої системи з очікуванням (потоки вимог Пуасоновські)

Постановка задачі: нехай відомі інтенсивність λ надходження потоку вимог в систему, та інтенсивність μ обслуговування цих вимог. Число каналів обслуговування N_k, і необхідно визначити ймовірність того, що в системі знаходяться n вимог $P_n(t)$, ймовірність простою каналів обслуговування $P_0(t)$, середнє число вимог, що знаходяться в черзі. Середній час очікування $T_{оч}$. Середнє число вільних каналів обслуговування.

В цій задачі можливі два випадки:

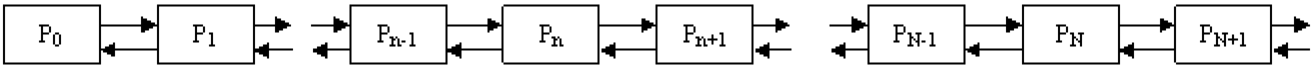
1) в системі n змінюється $0 \le n < N$

2) число вимог $n \ge N_k$ - числу каналів

В першому випадку всі вимоги, що знаходяться в системі, одночасно обслуговуються, і не всі канали зайняті. Загальна інтенсивність обслуговування: $\mu * n$

Закреслимо розмічений граф стану багатоканальної розімкнутої системи масового обслуговування:

$\lambda\ \lambda\ \lambda\ \lambda\ \lambda\ \lambda\ \lambda\ \lambda\ \lambda$



$\mu\ 2\mu\ n\mu\ (n+1)\mu\ N\mu\ N\mu$

Побудова математичної моделі

У відповідності з розміченим графом стану і правилом Колмагорова запишемо систему звичайних диференційних рівнянь для стану системи.

$n = 0$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)\lambda + P_1(t)\mu$$

.

$1 \le n < N$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda - (\lambda + n\mu)P_n + P_{n+1}(n+1)\mu = 0$$

.

$n \ge N$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda - (\lambda + N\mu)P_n(t) + N\mu P_{n+1}(t) = 0$$

Обмежемся дослідженням режиму роботи системи, що встановився, коли λ - const, μ - const

$t \to \infty$, $P_n(t) \to const$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0 \quad (n = 0,1,\ldots)$$

і тоді замість системи звичайних диференційних рівнянь отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$n = 0$

$$-\lambda P_0 + \mu P = 0$$

$1 \le n < N$

$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu)P_n + P_{n+1}(n+1)\mu = 0$$

$n \ge N$

$$\lambda P_{n+1} - (\lambda + N\mu)P_n + P_{n+1}N\mu = 0$$

Використовуючи отримані алгебраїчні рівняння, визначимо вирази для визначення ймовірності знаходження системи в стані n.

$n = 0$

$$P_1 = \frac{1}{\mu} P_0 = \psi P_0$$

$n = 1$

$$P_2 = \frac{1}{2\mu}\left[(\lambda + \mu)P_1 - \lambda P_0\right] = \frac{1}{2}\left[(\psi + 1)\psi P_0 - \psi P_0\right] = \frac{\psi^2}{2} P_0$$

$n = N - 1$

$$P_n = \frac{1}{N\mu}\left\{\left[\lambda(N-1)\mu\right]P_{n-1} - \lambda P_{N-2}\right\} = \frac{\psi^N}{N!} P_0$$

З цих виразів видно, що $n < N$ ймовірність знаходження в системі n вимог визначається за наступною формулою:

$$P_n' = \frac{\psi^n}{n!} P_0$$

Для стану $n > N$ є:

$n = N$

$$P_{N+1} = \frac{1}{N\mu}\left[(\lambda + N\mu)P_n - \lambda P_{n-1}\right] = \frac{P_0}{N}\left[(\psi - N)\frac{\psi^N}{N!} - \frac{\psi}{(N-1)!}\right] = \frac{\psi}{N} * \frac{\psi^n}{N!} * P_0$$
;

.

$n = N + 1$

$$P_{n+2} = \frac{1}{N\mu}\left[(\lambda - N\mu)P_{N-1} - \lambda P_n\right] = \frac{P_0}{N}\left[(\psi + N)\frac{\psi}{N} * \frac{\psi^N}{N!} - \frac{\psi^{n-1}}{N!}\right] = \frac{\psi^2}{N^2}\frac{\psi^n}{N!} P_0$$

З отриманих виразів видно, що для складання системи, коли $n \geq N$ ймовірність знаходження в системі n вимог визначається за наступною формулою:

$$P_n = \frac{\psi^{n-N}\psi^N}{N^{n-N}N!} P_0 = \frac{\psi}{N^{n-N}N} P_0$$

маючи аналітичний вираз для всіх станів системи, а також використовуючи очевидну рівність:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{N-1} P_n' + \sum_{n=N}^{\infty} P_n' = 1$$

Визначимо ймовірність простою каналу обслуговування:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\psi}{n!}P_0+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\psi^{k-N}\psi^{N}}{N^{n-N}N!}P_0=\frac{1}{1-\psi/N}$$

Ймовірність простою:

$$P_0=\left[\sum_{K=0}^{N-1}\frac{\psi^{n}}{n!}+\frac{\psi^{n}}{N!(1-\psi)/N}\right]$$

Середнє число вимог. що знаходяться в черзі, знайдемо по:

$$N_{черг}=\frac{\psi^{N}}{N!N(1-\psi/N)^{2}}P_0$$

Середній час очікування заявок в черзі:

$$T_{черг}=\frac{N_{черг}}{\lambda}$$

Середнє число зайнятих каналів :

$$N_{ск}=\sum_{n=0}^{N-1}(N-n)\frac{\psi^{n}}{n!}P_0$$

Задача аналізу розімкнутої системи з відмовою (потоки вимог Пуасонівські)

Постановка задачі:

Нехай досліджується деяка розімкнута системи масового обслуговування, інтенсивність надходження вимог в систему відома і дорівнює λ. Інтенсивність обслуговування кожного каналу відома і дорівнює μ. Якщо вимоги застали всі N каналів зайнятими, то вони отримують відмову та покидають систему. Ця задача вперше розглядалася Ерлангом. Необхідно визначити

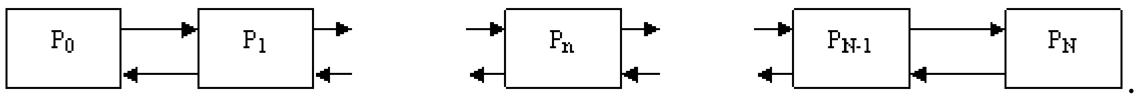
1) ймовірність P_0 того, що всі канали обслуговування вільні;

2) ймовірність P_n того, що зайнято рівно n каналів обслуговування

3) середнє число зайнятих каналів обслуговування

Закреслимо розімкнутий граф стану багатоканальної розімкнутої системи масового обслуговування з відмовою:

λ λ λ λ λ λ



.

$\mu \; 2\mu \; n\mu \; (n+1)\mu \; (N-1)\mu \; N\mu$

Стан системи будемо пов’язувати з числом зайнятих каналів обслуговування. Перерахуємо основні можливості N станів системи:

1) всі канали вільні. Жодна вимога не обслуговується

2) один канал зайнятий. Обслуговується одна заявка

...

n) n - каналів зайнято. Обслуговується n вимог

N) Всі N каналів зайнято, обслуговується N вимог.

У відповідності з розміченим графом стану, та використовуючи правило Колмагорова, запишемо систему звичайних диференційних рівнянь для ймовірності стану системи:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) - n\mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = -N\mu P_N(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

досліджуючи стаціонарний режим роботи системи, при $t \to \infty$, система рекурентних алгебраїчних рівнянь буде мати вигляд:

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0$$

$$-(\lambda+\mu)P_1 + \lambda P_0 - 2\mu P_2 = 0$$

$$(\lambda + n\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + (n \_ 1)\mu P_{n+1} = 0$$

$$-N\mu P_N + \lambda P_{N-1} = 0$$

З першого рівняння $P_1 = P_0 \dfrac{\lambda}{\mu} = \psi P_0$

Аналогічно, з другого:

$$P_2 = P_1 \frac{\psi}{2} = P_0 \frac{\psi^2}{2}$$

$$P_n = P_0 \frac{\psi^n}{n!}$$

Використовуючи отримані співвідношення, можливо визначити ймовірність P_0 того, що всі канали обслуговування вільні.

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^2}{n!} P_0 = P_0 \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!} = 1$$

$$P_n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!}}$$

Ймовірність того, що задано рівно n каналів обслуговування, буде дорівнювати:

$$P_n \frac{\psi^n}{\left(n! \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!}\right)}$$

середнє число зайнятих каналів обслуговування:

$$N_{зк} = \sum_{n=1}^{N} n P_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi^n}{(n-1) \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!}}$$

Задача аналізу замкнутої системи з очікуванням (потоки вимог Пуасонівські)

Постановка задачі:

Нехай досліджується деяка система масового обслуговування, в котрій вимоги, що обслуговуються, знову повертаються до системи обслуговування. Інтенсивність однієї вимоги - λ, інтенсивність обслуговування кожного каналу - μ, число каналів обслуговування - N. Число вимог, котрі потребують обслуговування - m. Будемо вважати, що $N \le m$.

Необхідно визначити:

1) ймовірність того, що в системі знаходяться n вимог: $P_n(t)$

2) ймовірність простою каналів обслуговування $P_0(t)$

3) Середнє число вимог, що очікують початку обслуговування, або довжину черги $N_{черг}$

4) Середній час очікування вимоги в черзі $T_{черг}$

Стан системи будемо пов'язувати с числом вимог, що знаходяться в системі. При цьому можливі 2 випадки:

1) Число вимог n, що поступили в систему, менше числа каналів обслуговування, тобто $0 \le n < N$

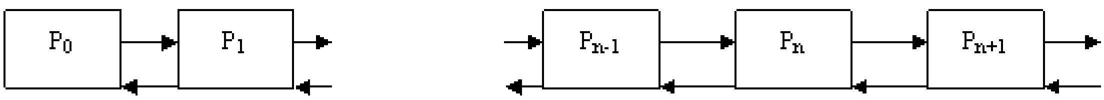
2) Число вимог n, що поступили в систему, більше чи дорівнює числу каналів обслуговування $n \ge N$

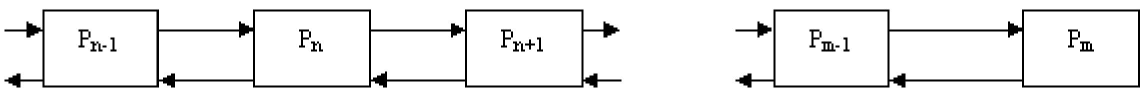
З них N обслуговується, а r вимог очікують в черзі. $r = (1,2...,m-N)$

Закреслимо граф стану багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування з очікуванням

$0 \le n \le N$:

$(m-n+1)\lambda$ $(m-n)\lambda$





$m\lambda$ $(m-1)\lambda$

μ 2μ $n\mu$ $(n+1)\mu$

$N \le n \le m$

$(m-n+1)\lambda$ $(m-n)\lambda$ 2λ λ

$N\mu$ $N\mu$ $N\mu$ $N\mu$

У відповідності з розміченим графом стану системи та використовуючи правило Колмагорова, запишемо диференційні рівняння для ймовірності станів системи:

$0 \le n < N$

$$\frac{dP_0}{dt} = -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -[(m-n)\lambda + n\mu]P_{n-1}(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t)$$

$N \le n < m$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -[(m-n)\lambda + N\mu]P_n(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1} + N\mu P_{n+1}(t)$$

...

$$\frac{dP_N}{dt} = -N\mu P_N(t) + \lambda P_{N-1}(t)$$

Дослідження математичної моделі

Для режиму роботи системи. що встановився, коли λ- постійна величина, $\mu - const$, $t \to \infty$, $P_0 - const$, тоді

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = 0$$

і замість системи звичайних диференційних рівнянь отримуємо систему рекурентних алгебраїчних рівнянь, з котрих знаходяться:

1) Ймовірність того, що в системі знаходиться n вимог для випадку, коли n змінюється від 0 до N, тоді:

$$P_n' = \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)!}P_0$$

Для випадку, коли $N \le n \le m$:

$$P_n' = \frac{m!\psi^n}{N^{m-N}(m-n)!N!}P_0$$

Для обчислення ймовірності простою каналу обслуговування використовується наступна рівність:

$$\sum_{n=0}^{m} P_n = \sum_{n=0}^{N-1} P_n + \sum_{n=N}^{m} P_n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)!}P_0 + \sum_{n=N}^{m} \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)!N!}P_0 = 1$$

З цієї формули ми знаходимо P_0:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)} + \sum_{n=N}^{m} \frac{n!\psi^n}{N^{(m-n)}(m-n)!N!}\right]$$

Далі знаходимо середнє число вимог, що очікують початок обслуговування (довжина черги):

$$N_{черг} = \sum_{n=N}^{m} (n-N)P_n{}^n = \sum_{n=N}^{m} \frac{n!P^n(n-N)}{N^{(n-N)}(m-n)!N!}P_0$$

Далі знаходимо середній час очікування вимоги в черзі:

$$T_{черг} = \frac{N_{черг}}{\mu(N - N_{вх})}$$

Середнє число вільних каналів обслуговування:

$$N_{вх} = \sum_{n=0}^{N-1}(N-n)P_n' = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{(N-n)m!P^n}{n!(m-n)!}P_0$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. n-канальна система масового обслуговування (СМО) з відмовами

№1.Скласти граф станів СМО з кількістю каналів **n=4+A/2** (Тут **n** -ціле число; $A=\sqrt{N}; N$- порядковий номер студента у групі). Для графа станів скласти диференційні рівняння, з них отримати рівняння для статичного режиму. Виконати розрахунки статичного режиму для $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ =A.

2. Одноканальна СМО з очікуванням

№2.Скласти граф станів СМО з кількістю вимог у черзі **n=4+A/2** (Тут **n** -ціле число; $A=\sqrt{N}; N$- порядковий номер студента у групі). Для графа станів скласти диференційні рівняння, з них отримати рівняння для статичного режиму. Виконати розрахунки статичного режиму для $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ =A/3.

3. Багатоканальна СМО з очікуванням

№3.Скласти граф станів СМО з кількістю каналів n=4+A/2; кількістю вимог у черзі **m=n+A/2** (Тут **n, m** -цілі числа; $A=\sqrt{N}; N$- порядковий номер студента у групі). Для графа станів скласти диференційні рівняння, з них отримати рівняння для статичного режиму. Виконати розрахунки статичного режиму для $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ =A/4.

№4. Виділити для АСУ підприємства або установи чергу із К = 3+ А операторів, які працюють на одну ЕОМ.

2. Скласти граф станів для своєї системи в вигляді черги для обслуговування. Визначити кількість операторів АСУ.

Розрахувати інтенсивність потоків:

а)від оператора до АСУ $\lambda = 1 / t_{ОП}$;

б)від АСУ до оператора $\mu = 1 / t_{ОБС}$,

де $t_{оп} = a\sqrt[B]{N} + C;$ $\mu = d\,\lambda;$

Група	a	B	C	d
1	1.0	2	0,4	1,0
2	0,5	2	0,6	0,5

$t_{ОП}$ – час, який витрачає оператор на обміркування та введення запитів АСУ;

$t_{ОБС}$ - час , який витрачає апаратно-програмний комплекс АСУ на відповідь.

Завдання: 1. Розрахувати ймовірність станів системи.

2. Розрахувати пропускну спроможність черги.

3. Розрахувати середній час відгуку АПК АСУ.

Тести по теорії масового обслуговування

1. Задачі масового обслуговування умовно поділяють на:
   а) задачі аналізу;
   б) задачі динамічного програмування;
   в) задачі синтезу;
   г) задачі цілочисельності.
2. Задачі аналізу використовують оцінку ефективності функціонування при:
   а) змінних вхідних характеристиках;
   б) наперед заданих вхідних характеристиках;
   в) не відомі потоки вимог та законів;
   г) інші варіанти.
3. Одноканальні системи масового обслуговування можуть бути досліджені:

а) симплекс-методом;
б) М-методом;
в) аналітичними методами;
г) за допомогою сіткового графіка.

4. Основним поняттям при аналізі процесу системи масового обслуговування є:
   а) стан системи;
   б) потік інформації;
   в) вхідні данні;
   г) середній час очікування.
5. Ймовірність простою каналу обслуговування вираховується за формулою:
   а) $P_o=1-\psi_1$;
   б) $P_o=1+\psi_1$;
   в) $P_o=\psi_1$;
   г) $P_o=1/\psi_{1.}$
6. Середнє число вимог, що знаходяться в системі:
   а) $N_{сист.}=\psi/(1+\psi)$;
   б) $N_{сист.}=\psi^2(1-\psi)$;
   в) $N_{сист.}=\psi(1+\psi)$;
   г) $N_{сист.}=\psi-(1-\psi^2)$.
7. Середнє число вимог, що знаходяться в черзі:
   а) $N_{черг.}=\psi^3(1-\psi)$;
   б) $N_{черг.}=\psi^2(1+\psi)$;
   в) $N_{черг.}=\psi^2(1-\psi)$;
   г) $N_{черг.}=\psi^2/(1-\psi)$.
8. Середній час очікування заявок в черзі:
   а) $T_{черг}=N_{черг}/\lambda$;
   б) $T_{черг}=N_{черг}\lambda$;
   в) $T_{черг}=N_{черг}(1+\lambda)$;
   г) $T_{черг}=N_{черг}(1-\lambda)$.
9. Середній час очікування вимоги в системі:
   а) $T_{сист}=N_{сист}\lambda$;
   б) $T_{сист}=N_{сист}/\lambda$;
   в) $T_{сист}=N_{сист}-\lambda$;
   г) $T_{сист}=N_{сист}+\lambda$.
10. Який параметр не виступає в якості основних показників функціонування системи:
   а) середнє число вимог, що знаходяться в системі;
   б) середнє число вимог, що знаходяться в черзі;
   в) середній час очікування в черзі;
   г) інтенсивність надходження потоків.

1. ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ, ЩО ОХОПЛЮЮТЬ ЗМІСТ РОБОЧОЇ ПРОГРАМИ ДИСЦИПЛІНИ.

1) Системний аналіз – методологічна основа дослідження операцій.

2) Типологізації задач дослідження операцій в економіці: добре структоровані, слабострукторовані, неструкторовані.

3) Сутність і характеристика неструктурованих проблем як класу задач прийняття рішень.

4) Методи аналізу неструктурованих проблем.

5) Способи вимірювання якісних даних, проблеми точності,

6) Новітні технології розв'язання проблем, аналізу систем і прийняття рішень.

7) Сутність та характеристика неструкторованих проблем з якісними змінними.

8) Способи вимірювання якісних даних , вербально-числові шкали, шкала Харінгтона, проблеми точності, надійності.

9) Застосування суб'єктивних оцінок та експертних процедур у дослідженні операцій.

10) Метод "Дельфі".

11) Метод колективної генерації ідей ("Мозгова атака").

12) Оцінювання обєктів при проведенні експертиз.

13) Аналіз узгодженості експертних оцінок.

14) Концепція і сучасні методи цілепокладання.

15) Визначення цілей на вербальному рівні.

16) Структурізація та декомпозиція цілей за низкою ознак.

17) Формалізація цілей.

18) Методи формування множини критеріїв.

19) Проблеми багатокритеріальності в економіці.

20) Основні методи розв'язання багатокритеріальних задач.

21) Метод головного критерія.

22) Методи послідовних уступок.

23) Методи звертки критеріїв.

24) Ітеративне програмування, його суть.

25) Метод рівних найменших відносин відхилення.

26) Теорія нечітких множин.

27) Операція над нечіткими множинами.

28) Задачі нечіткого математичного програмування .

29) Економічна постановка задачі управління запасами.

30) Основні поняття (термінологія).

31) Характеристика й особливості взаємодії чинників, що визначають вибір стратегії управління запасами.

32) Узагальнена модель управління запасами.

33) Класифікація моделей управління запасами.

34) Однопродуктові моделі управління запасами

35) Багатопродуктові моделі управління запасами.

36) Страхові запаси.

37) Огляд методів сіткової оптимізації.

38) Основи теорії графів і мереж.

39) Організація зв'язків у неорієнтованих мережних системах.

40) Організація зв'язків у орієнтованих мережах.

41) Загальний огляд алгоритмів оптимізації на мережах.

42) Мінімізації сітки.

43) Задача про найкоротший шлях.

44) Задача про максимальний потік.

45) Моделі оптимального сіткового планування і управління.

46) Міжнародні виробничі мережі.

47) Мега мережі.

48) Основні поняття теорії ігр.

49) Класифікація ігор.

50) Математичні ігри двох осіб.

51) Платіжна матриця. Основна теорема теорії ігор. Принцип мінімаксу.

52) Поняття сідкової точки та її знаходження.

53) Гра зі змішаними стратегіями.

54) Геометрична інтерпретація гри 2х2.

55) Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

56) Гра як математична модель конфлікту.

57) Коаліційні ігри.

58) Кооперативні ігри.

59) Антоганістичні ігри.

60) Гра з природою.

61) Теорія конфліктів.

62) Об’єктивна інформаційна багатомірність операційних досліджень.

63) Структурізація інформації основні шкали вимірювання данних.

64) Класифікація методів статистичного аналізу даних.

65) Методи кореляційно-регресійного аналізу для дослідження взаємозв’язків факторів.

66) Методи моделювання в статистичному аналізі.

67) Дослідження взаємозв’язків якісних факторів методами частотного аналізу даних.

68) Методи дослідження тенденцій розвитку систем і процесів.

71) Методи аналізу часових рядів і прогнозування.

72) Прикладні аспекти аналізу даних – діагностика банкрутства.

НАВЧАЛЬНИЙ ТРЕНІНГ

Контрольні запитання і завдання

1. З якою метою застосовуються методи оптимізації показників?

2. Назвіть основні та найбільш розповсюджені методи оптимізації показників.

3. Розкрийте сутність методу дерева рішень.

4. Поясніть завдяки яким властивостям метод дерева рішень найбільш популярний у менеджменті.

5. Назвіть основні етапи обґрунтування та прийняття рішення щодо здійснення проекту за допомогою побудови дерева рішень.

6. Обґрунтуйте, чому метод побудови дерева рішень доцільно застосовувати на початковій стадії розробки проекту.

7. Що ви розумієте під математичним або оптимальним програмуванням?

8. Які завдання ставляться перед математичним або оптимальним програмуванням?

9. В чому полягає сутність методу лінійного програмування?

10. Які основні етапи передбачає проведення економіко-математичного моделювання?

11. Дайте визначення терміну модель.

12. Що розуміють під економіко-математичною моделлю?

13. Розкрийте сутність аналізу чутливості.

14. В яких випадках і де на практиці використовується аналіз чутливості.

15. Які ви знаєте етапи здійснення аналізу чутливості?

16. Яким чином здійснюється вивчення чутливості за допомогою методу сценаріїв?

17. Які етапи передбачає проведення аналізу чутливості за методом сценаріїв?

18. Поясніть сутність методу Монте-Карло.

19. Яку роль відіграє метод Монте-Карло в економічному аналізі?

20. Які послідовність та етапність дослідження передбачаються в імітаційному моделюванні за методом Монте-Карло?

21. Яка мета здійснення імітаційного моделювання за методом Монте-Карло?

22. Поясніть, чому особливістю та однією з основних вимог імітаційного моделювання за методом Монте-Карло є застосування спеціальних комп'ютерних програм.

23. В чому полягає сутність теорії ігор?

24. Яка сфера практичного застосування теорії ігор? Наведіть конкретні приклади.

25. Що є метою теорії ігор?

26. Що таке стратегія гравця?

27. Охарактеризуйте ситуацію, яка розуміється під конфліктом.

28. Як слід розуміти гру в теорії ігор?

29. Яка гра називається антагоністичною або грою з нульовою сумою?

30. Поясність сутність оптимальної стратегії.

31. Що таке теорія масового обслуговування і які завдання ставляться перед нею?

32. Як можна проаналізувати ефективність системи масового обслуговування?

33. Назвіть показники, які слугують для аналізу ефективності систем масового обслуговування. Розкрийте методику їх розрахунку.

34. Що таке дисципліна обслуговування та яка її роль у класифікації систем масового обслуговування?

35. Які є обмеження на застосування теорії ігор?

Тести для самоконтролю

Виберіть один або кілька варіантів правильних відповідей.

1. Методи оптимізації показників (теорії прийняття рішень) є складовими методів:

а) математичних;

б) логічних;

в) статистичних;

г) фізичних;

д) геометричних.

2. Основними та найбільш розповсюдженими методами оптимізації показників є:

а) побудова дерева рішень;

б) програмування;

в) аналіз чутливості;

г) теорія масового обслуговування;

д) теорія ігор.

3. Метод побудови дерева рішень доцільно застосовувати на_стадії розробки проекту:

а) заключній;

б) виробничій;

в) експлуатаційній;

г) утилізаційній;

д) початковій.

4. Метод побудови дерева рішень називають ще:

а) метод однонаправлених графіків;

б) метод двонаправлених графіків;

в) метод багатонаправлених графіків;

г) метод лінійних графіків;

д) метод ненаправлених графіків.

5. Яке поле має графік дерева рішень:

а) поле можливих дій, поле дій, поле можливих наслідків;

б) початкове поле, поле дій, поле результатів;

в) поле можливих прибутків, поле початкових інвестицій, поле дій;

г) поле початкових інвестицій, поле можливих витрат, поле можливих наслідків;

д) немає правильної відповіді?

6. Які компоненти відображаються на графіку дерева рішень:

а) перша точка прийняття рішення;

б) гілка дерева;

в) точка можливостей;

г) усі відповіді правильні;

д) немає правильної відповіді?

7. Метод побудови дерева рішень відображається у вигляді:

а) таблиці;

б) графіка;

в) тексту;

г) цифр;

д) всі відповіді правильні.

8. Залежно від властивостей функцій, які визначають показник якості та обмеження задачі, математичне програмування розділяється:

а) на функціональне;

б) лінійне;

в) нефункціональне;

г) нелінійне;

д) всі відповіді правильні.

9. Метод лінійного програмування завдяки наочності, зрозумілості інтерпретацій найбільш розповсюджений:

а) у практичній діяльності суб'єктів господарювання;

б) навчальному процесі у ВНЗ;

в) прикладних економічних дослідженнях;

г) науково-дослідних розробках;

д) побудові теоретичних моделей господарської діяльності.

10. Сутність методу лінійного програмування полягає:

а) у пошуку оптимуму обраної цільової функції за наявних обмежень;

б) розробці цільової функції за наявних обмежень;

в) пошуку максимуму обраної цільової функції за наявних обмежень;

г) пошуку мінімуму обраної цільової функції за наявних обмежень;

д) всі відповіді правильні.

11. Під економіко-математичною моделлю слід розуміти:

а) логічний опис досліджуваного економічного процесу чи об'єкта;

б) математичний опис досліджуваного економічного процесу чи об'єкта;

в) графічний опис досліджуваного економічного процесу чи об'єкта;

г) соціологічний опис досліджуваного економічного процесу чи об'єкта;

д) технологічний опис досліджуваного економічного процесу чи об'єкта.

12. Аналіз чутливості передбачає дослідження залежності:

а) значень показників від варіації результативного показника;

б) результативного показника від варіації значень показників, що беруть участь у його визначенні;

в) між декількома факторами;

г) всі відповіді правильні;

д) немає правильної відповіді.

13. Який аналіз, враховуючи його аналітичні можливості, образно називають аналізом "що буде, якщо":

а) аналіз чутливості;

б) регресійний;

в) кореляційний;

г) індексний;

д) маржинальний?

14. Імітаційне моделювання за методом Монте-Карло застосовується для побудови математичної моделі для інвестиційного проекту з_показниками:

а) легкопрогнозованими;

б) реальними;

в) ретроспективними;

г) важкопрогнозованими;

д) суттєвими.

15. Особливістю та однією з основних вимог імітаційного моделювання за методом Монте-Карло є застосування:

а) спеціальних методів оцінки;

б) спеціальних видів аналізу;

в) спеціальних видів прогнозування;

г) спеціальних знань;

д) спеціальних комп'ютерних програм.

16. Сутність теорії ігор полягає у встановленні оптимальної стратегії поведінки в ситуаціях:

а) життєвих;

б) виробничих;

в) конфліктних;

г) екстремальних;

д) повсякденних.

17. Метою теорії ігор є визначення для кожного гравця:

а) екстремальної стратегії;

б) плану поведінки;

в) оптимальної стратегії;

г) конфліктної ситуації;

д) немає правильної відповіді.

18. Ігри різняться:

а) за числом учасників;

б) характеристиками платіжних функцій;

в) інформацією про ситуацію, що склалася, та яка є в розпорядженні партнерів гри;

г) правилами, що обмежують вибір лінії поведінки учасників;

д) можливостями укладання угод і входження в коаліції тощо.

19. Який варіант гри передбачає протистояння двох конкурентів за ринок збуту:

а) простий;

б) множинний;

в) коаліційний;

г) складний;

д) парний?

20. У теорії статистичних ігор першого гравця називають:

а) учасником;

б) "природою";

в) "статистиком";

г) переможцем;

д) провокатором.

21. Гра називається антагоністичною або грою з нульовою сумою, якщо:

а) виграш одного гравця дорівнює програшу іншого;

б) гравці мають програш;

в) гравці мають різний виграш;

г) виграш одного гравця дорівнює виграшу іншого;

д) програш одного гравця дорівнює програшу іншого.

22. За кількістю каналів системи масового обслуговування поділяються:

а) на безканальні;

б) функціональні;

в) разові;

г) одноканальні;

д) багатоканальні.

23. Синонімом теорії обслуговування є:

а) теорія черг;

б) теорія ігор;

в) теорія ситуаційного аналізу;

г) економічна теорія;

д) немає правильної відповіді.

24. Як показники ефективності системи масового обслуговування з відмовленнями застосовуються:

а) абсолютна пропускна здатність;

б) відносна пропускна здатність;

в) ймовірність відмови;

г) середнє число зайнятих каналів;

д) інтенсивність навантаження каналу.

25. У підприємства склалися дві стратеги поведінки. Перша стратегія передбачає максимальний дохід у розмірі 10 000 грн, а друга – мінімальний дохід розміром 4000 грн. Який середній оптимальний дохід підприємства, якщо частота використання першої стратегії становить 0,39:

а) 3900 грн;

б) 5460 грн;

в) 7000 грн;

г) 2800 грн;

д) немає правильної відповіді?

26. Є три підприємства. Перше виробляє літнє та осіннє взуття, друге займається постачанням шкіри для виробництва взуття, третє здійснює моделювання та дизайн взуття. Дії скількох гравців необхідно змоделювати, щоб визначити оптимальні обсяги виробництва взуття для першого підприємства:

а) 1;

б) 2;

в) 3;

г) 4;

д) залежно від конкретної ситуації?

27. На підприємствах теорія ігор може використовуватися для:

а) визначення виробничих потужностей;

б) розрахунку нормативів витрат;

в) організації ділових ігор для персоналу;

г) вибору оптимальних рішень;

д) встановлення розміру податків.

28. М'ясо-молочний комбінат має дві стратегії поведінки. Визначте оптимальну частоту користування цими стратегіями, якщо за використання першої, максимальний і мінімальний доходи передбачаються відповідно розміром 15 000 та 5000 грн, а другої –12 000 та 4000 грн:

а) 0,44 і 0,66;

б) 0,75 і 0,25;

в) 0,41 і 0,69;

г) 3 і 7;

д) 1 і 2.

29. Згідно з математичною теорією ігор кількість стратегій у кожного гравця може бути:

а) парною і непарною;

б) прогресивною та регресивною;

в) кінечною та безкінечною;

г) усе перераховане вище;

д) немає правильної відповіді.

30. Основні етапи обґрунтування та прийняття рішення щодо здійснення проекту за допомогою побудови дерева рішень:

а) оцінка математичного очікування можливого доходу;

б) оцінка можливих варіантів дій;

в) оцінка ймовірностей можливих варіантів дій;
г) визначення можливих дій для розгляду та аналізу проекту;
д) формулювання кінцевої мети проекту.

Матриця відповідей на тести

Запитання	Відповідь	Запитання	Відповідь	Запитання	
1	а	11	б	21	а
2	а-д	12	б	22	г, д
3	д	13	а	23	а
4	а	14	г	24	а-д
5	а	15	д	25	б
6	г	16	в	26	в
7	б	17	в	27	г
8	б, г	18	а-д	28	а
9	в	19	а, д	29	в
10	в, г	20	б	30	а-д

ПИТАННЯ ДО ЗАЛІКУ

1. Основні відомості про задачі оптимізації оптимізації. Класифікація задач дослідження операцій.
2. Сіткове планування і управління. Основи побудови та критерії оптимізації сіткових графіків
3. Завдання СПУ. Основні поняття. Методика аналізу сіткових моделей.
4. Метод СПУ. Основні параметри та розрахункові характеристики сіткових графіків.
5. Обчислення тимчасових характеристик сіткових графіків.
6. Основні поняття теорії ігор. Конфліктна ситуація і вимоги до неї.
7. Платіжна матриця. Гра в чистих стратегіях.
8. Принцип „мінімакса”. Максмінна і мінімаксна стратегії.
9. Теорія ігор. Гра з сідловою точкою.
10. Теорія ігор. Гра в змішаних стратегіях. Основна теорема теорії гри.
11. Геометрична інтерпретація розв’язку матричної гри з двома гравцями.
12. Зведення парної скінченої гри до задачі ЛП.
13. Як ви розумієте поняття „математична модель” та її визначення?
14. Особливості розбудови математичних моделей в теорії дослідження операцій.
15. Як ви розумієте термін „параметри управління”?
16. Принципова різниця між детермінованими та стохастичними математичними моделями.
17. Основні етапи розбудови проекту дослідження операцій.

18.Математичні моделі управління запасами. Структура та основні елементи моделі управління запасами.

19.Математичні моделі управління запасами. Статична детермінована модель без дефіциту управління однономенклатурними запасами.

20.Математичні моделі управління запасами. . Статична детермінована модель з дефіцитом управління однономенклатурними запасами.