МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЕКОНОМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Збірник завдань для виконання індивідуальних та самостійних робіт для студентів 1 курсу денної форми навчання

Частина 2
(Модуль 3. Модуль 4.)

Біла Церква-2017

УДК 517(075.8)

Затверджено науково-методичною
комісією Білоцерківського НАУ
Протокол № 3 від 11 грудня 2017 р.

Вища математика: Збірник завдань для виконання індивідуальних та самостійних робіт для студентів 1 курсу денної форми навчання економічних спеціальностей. Частина 2. / О.П. Мельниченко − Біла Церква. – 2017. − 49с.

Збірник завдань для виконання індивідуальних та самостійних робіт розроблений для студентів 1 курсу економічного факультету. Збірник вміщує задачі і приклади до основних розділів вищої математики відповідно до програми загального курсу вищої математики для студентів економічного профілю денної форми навчання, що включено до 3 та 4 модуля. Кожний тип завдань доповнено методичними рекомендаціями для їх виконання. Наведено необхідний довідковий матеріал, розв'язування типових прикладів та задач і набори завдань для індивідуальної роботи студентів.

Рецензент: Арбузова Т.В., кандидат економічних наук

ПЕРЕДМОВА

Збірник завдань для виконання індивідуальних та самостійних робіт для студентів денної форми навчання економічних спеціальностей створено з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки таких фахівців і посилення прикладної її спрямованості.

Збірник завдань ставить за мету – допомогти студенту оволодіти розв'язуванням задач та прикладів з курсу вищої математики і виконати самостійно індивідуальні завдання. Це визначило структуру посібника. У збірнику задач подано формули та таблиці, необхідні для розв'язку завдань, та наводиться достатня кількість детально розібраних задач із вказаними методами їх розв'язку та пропонується ряд задач для самостійного розв'язання.

Для написання збірника завдань для виконання індивідуальних робіт та методичних рекомендацій для їх виконання студентами денної форми навчання економічних спеціальностей було використано ряд задач та прикладів, взятих із відомих задачників та навчальних посібників, які, як правило, використовуються на практичних заняттях зі студентами.

«Вища математика» є нормативною дисципліною циклу природничо-наукової підготовки бакалавра за спеціальністю: «Економіка», «Облік і оподаткування», «Фінанси, банківська справа та страхування», «Менеджмент», «Публічне управління та адміністрування», спеціалізації: «Економіка підприємства», «Облік і аудит», «Фінанси і кредит», «Менеджмент організацій і адміністрування», «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності», «Публічне управління та адміністрування».

Мета вивчення дисципліни − засвоєння студентами базових математичних знань, необхідних під час професійної діяльності, формування логічного мислення та вироблення навичок математичного дослідження прикладних економічних задач.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен

знати: основи вищої математики, що є фундаментом математичної освіти спеціалістів агрономічного профілю; роль та місце математичних методів у розв'язуванні низки практичних задач;

вміти: формулювати прикладну задачу в математичних термінах і знаходити шляхи розв'язку цієї задачі; аналізувати одержані результати і на їх основі створювати практичні рекомендації.

Завдання курсу вищої математики для студентів економічного факультету полягає у відновленні у студентів набутих знань та навичок за курс середньої школи та формування нових знань та вмінь їх практичного застосування. Студент повинен:

- засвоїти основні поняття вищої математики;
- опанувати визначення основних математичних понять;
- навчитися використовувати набуті теоретичні знання на практиці;
- поглибити та закріпити теоретичні знання, одержані на лекціях.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ ВИЩА МАТЕМАТИКА
Тематичний план аудиторної роботи

Модуль 3. **Похідна функції**

9.Функція. Основні елементарні функції
10.Границя функції . Неперервність та розриви функції
11.Основні правила та формули диференціювання. Особливі випадки диференціювання
12.Диференціал функції та його застосування
13.Диференціювання функції декількох змінних

Модуль 4. **Основи інтегрального числення**

14.Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування
15.Інтегрування дробово-раціональних виразів. Інтегрування деяких тригонометричних виразів
16.Визначений інтеграла та його застосування
17.Поняття диференціального рівняння
18.Однорідні та лінійні диференціальні рівняння

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ ВИЩА МАТЕМАТИКА (2семестр)

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин									
	Денна форма					Заочна форма				
	Усього	у тому числі				Усього	у тому числі			
		л	п	інд	ср		л	п	інд	ср
Модуль 3										
Змістовий модуль 3. Похідна функції										
Тема 9. Функція. Основні елементарні функції	6	2	2	1	1	6	1			5
Тема 10. Границя функції . Неперервність та розриви функції	6	2	2	1	1	5				5
Тема 11. Основні правила та формули диференціювання. Особливі випадки диференціювання	6	2	2	1	1	7		2		5
Тема 12. Диференціал функції та його застосування	6	2	2	1	1	6				6
Тема 13. Диференціювання функції декількох змінних	6	2	2	1	1	6				6
Разом модуль 1	30	10	10	5	5	30	1	2		27

Модуль 4									
Змістовий модуль 2. Основи інтегрального числення									
Тема 14. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування	6	2	2	1	1	6	1			5
Тема 15. Інтегрування дробово-раціональних виразів. Інтегрування деяких тригонометричних виразів	6	2	2	1	1	5				5
Тема 16. Визначений інтеграла та його застосування	6	2	2	1	1	7		2		5
Тема17 . Поняття диференціального рівняння	6	2	2	1	1	6				6
Тема 18. Однорідні та лінійні диференціальні рівняння	6	2	2	1	1	6				6
Разом модуль 2	30	10	10	5	5	30	1	2		26

ТЕМАТИКА САМОСТІЙНОЇ ТА ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ – 20 ГОД

№ модуля		Теми	К-сть годин
Модуль 3.		**Похідна функції**	
	5.	Змінні величини. Послідовності та функції	2
	7.	Властивості границь	2
	8.	Основні теореми про границі	2
	9.	Правила розкриття невизначеностей (нерозглянуті випадки)	2
	10.	Правило Лопіталя	2
Всього за 3 модуль			10
Модуль 4.		**Основи інтегрального числення**	
	11.	Диференціальні рівняння другого порядку	10
Всього за 5 модуль			10
Література [1-7]			
Форма контролю: написання індивідуальних робіт			

ІНДИВІДУАЛЬНЕ НАУКОВО-ДОСЛІДНЕ ЗАВДАННЯ

Індивідуальне завдання з дисципліни „Вища математика" виконується самостійно кожним студентом на основі вибраної теми і оформляється у вигляді індивідуального зошиту. Охоплює усі основні теми дисципліни. Контрольне індивідуальне завдання оформлюється у відповідності з встановленими вимогами. При виконанні індивідуального завдання студент може використовувати комп'ютерну техніку. Виконання індивідуальних завдань є одним із обов'язкових складових модулів залікового кредиту з "Вища математика".

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ РОБІТ

Індивідуальні завдання необхідно виконувати в окремому зошиті. Для зауважень рецензента потрібно залишити поля шириною 4-6 см. Виконувати роботу необхідно точно за варіантом, який призначено викладачем. Робота виконана не за своїм варіантом не перевіряється і не зараховується.

Задачі треба виконувати у порядку збільшення номерів завдань. Умови завдань необхідно записувати повністю, після приводити докладне розв'язання. Якщо до поданої задачі необхідний малюнок, то його розміщують перед розв'язанням і роблять на ньому всі потрібні позначення. В кінці кожної задачі записується відповідь.

Після повернення перевіреної роботи студент виправляє помилки, які були допущені. Якщо завдання не потребує доопрацювання, тобто виконана правильно, студент зобов'язаний пройти співбесіду з викладачем.

Підписати роботу потрібно за зазначеним нижче зразком:

Індивідуальне домашнє завдання
з курсу «Вища математика»
студента І курсу 1 групи економічного факультету
спеціальність «публічне управління та адміністрування»
Сизоненка Антона Борисовича

Завдання №3.1.13; 3.2.13; 3.3.13; 3.4.13; 3.5.13; 3.5.13; 3.7.13; 3.8.13.
Завдання №4.

Модуль 3. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

3.1. Границя функції. Застосування правил розкриття невизначеностей, утворених алгебраїчними виразами.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+6}{7x^2+9x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)$.

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+6}{7x^2+9x+4}=\left[\dfrac{3\cdot\infty^2+5\cdot\infty+6}{7\cdot\infty^2+9\cdot\infty+4}\right]=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ необхідно чисельник і знаменник поділити на x^n, де $n-$ найбільше значення степеня. Найбільше значення степеня n=2, тому ділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{9x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7+\frac{9}{x}+\frac{4}{x^2}}=\left[\frac{3+\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}}{7+\frac{9}{\infty}+\frac{4}{\infty}}\right]=\frac{3+0+0}{7+0+0}=\frac{3}{7}.$$

Зауваження: $\dfrac{a}{0}=\infty$; $\dfrac{a}{\infty}=0$.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}=\dfrac{3\cdot 1^2+5\cdot 1-8}{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники і однакові скоротити.

Розкладаємо квадратичні вирази на множники за теоремою Вієта і отримаємо:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(3x+8)}{(x-1)(3x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+8}{3x-2}=\dfrac{3\cdot 1+8}{3\cdot 1-2}=\dfrac{11}{1}=11$, (скоротили на $x-1$).

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\dfrac{\sqrt{4-0}-\sqrt{4+0}}{0}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів необхідно позбавитись від ірраціональності помноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз. Спряженими називають такі ірраціональні вирази, які при множенні один на інший утворюють раціональні вирази:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4-x-4-x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to0}\frac{-2x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to0}\frac{-2}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\left[\sqrt{\infty}-\infty\right]=\left[\infty-\infty\right].$

Для розкриття невизначеності $[\infty-\infty]$ необхідно вираз представити у вигляді дробу $\frac{a}{1}$; в утвореному дробі помножити чисельник і знаменник на спряжений вираз. В подальшому позбавитися утвореної невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}-4x}{1}\cdot\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+10x+5-16x^2}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Поділимо кожен елемент чисельника і знаменника на x, під коренем на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}}{x}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2+10x+5}{x^2}}+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{16+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+4}=\frac{10+\frac{5}{\infty}}{\sqrt{16+\frac{10}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}}+4}=\frac{10+0}{\sqrt{16+0+0}+4}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

Індивідуальне завдання

3.1. Обчислити наступні границі:

3.1.1. а) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}{2x^2-5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-10}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-4}\right)$.

3.1.2. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2-7x+2}{3x^2+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{4x^2+3x-1}{\sqrt{5x+6}-\sqrt{3x+4}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-7x+2}{6x^2+2x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{4x^2-x})$.

3.1.3. а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{2x+2}-1}{4x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{4x^2-x})$.

3.1.4. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt{6x-1}-\sqrt{12x-3}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+5x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{36x^2-4}\right)$.

3.1.5. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x-5}-\sqrt{x+1}}{2x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-7x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(6x-\sqrt{36x^2-4}\right)$.

3.1.6. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-5x-4}{2x^2+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}{2x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^2-5x-4}{2x^2+3x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-4}\right)$.

3.1.7. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-9x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{3(x+1)}-1}{27x^3+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-9x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5x-\sqrt{25x^2-4}\right)$.

3.1.8. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{3x-8}}{x^2-9x+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-9}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(11x-\sqrt{121x^2-4x}\right)$.

3.1.9. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{5}}\dfrac{5x^2+8x+3}{5x^2-7x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+3}}{x^2+2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2+8x+3}{5x^2-7x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(8x-\sqrt{64x^2-7x}\right)$.

3.1.10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{2x+9}}{4x^2-3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(7x-\sqrt{49x^2+x}\right)$.

3.1.11. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{25x^2-3}-\sqrt{49x^2+x}\right)$.

3.1.12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{12x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{9x^2+x}\right)$.

3.1.13. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$; б) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{6x+6}}{9x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

3.1.14. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

3.1.15. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{6x+6}}{9x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x-2}{11x^3+7}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x}-\sqrt{2x+7}\right)$.

3.1.16. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{12x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{9x+7}\right)$.

3.1.17. а) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{2x^2-x-3}{8x^2-10x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x+1}}{x^2+3x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{16x-6}-\sqrt{9x+7}\right)$.

3.1.18. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}}\dfrac{16x^2-1}{\sqrt{12x+4}-\sqrt{4x+2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{12x-6}-\sqrt{18x+7}\right)$.

3.1.19. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{3-2x}}{5x^2-6x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^3-6}-\sqrt{x^3+7x-1}\right)$.

3.1.20. а) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{6x^2-x-2}{3x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{10x-1}-\sqrt{5x+4}}{2x^2+x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-6x}-\sqrt{x^2+x-2}\right)$.

3.1.21. а) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}}\dfrac{4x^2-4x-15}{2x^2-7x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5x-1}}{x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-4x-15}{2x^2-7x+5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{144x^2-6x}-\sqrt{9x^2+x-2}\right)$.

3.1.22. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{3x^2+10x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{2x+3}}{2x^2+3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+7x-4}{3x^2+10x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{9x^2+x-2}\right)$.

3.1.23. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-9x-2}{x^3-8}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{6x+7}-\sqrt{2x+3}}{2x^2+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2-9x-2}{x^3-8}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{4x}-\sqrt{9x^2+x-2}\right)$.

3.1.24. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{4x^2+4x-3}{2x^2+7x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}{x^3-27}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2-9x-2}{x^3-8}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{4x}-\sqrt{9x-2}\right)$.

3.1.25. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{2x^2-9x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}}\dfrac{16x^2-1}{\sqrt{8x+3}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2-9x-2}{x^3-8}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{4x}-\sqrt{9x-2}\right)$.

3.1.26. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{5}}\dfrac{5x^2-11x+2}{10x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{4-x}}{2x^2-3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2-11x+2}{10x^2+3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{25x}-\sqrt{x-2}\right)$.

3.1.27. а) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{3}}\dfrac{3x^2-8x+5}{3x^2+x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+3}}{11x^2+10x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-8x+5}{3x^2+x-10}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x-25}-\sqrt{x-2}\right)$.

3.1.28. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-5x-2}{3x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{6x}}{3x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-8x+5}{3x^2+x-10}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x-25}-\sqrt{x-2}\right)$.

3.1.29. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+9x+9}{3x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{6x-3}}{x^2-4x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+9x+9}{3x^2+4x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+2}\right)$.

3.1.30. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{7x+2}-\sqrt{3x+6}}{x^2+4x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2-x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+2}\right)$.

3.2. Дві визначні та три необхідні границі.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д : Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-5^x}{x}$;   д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+12x)^4-1}{5x}$.

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$. Скористаємося першою визначною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ x}{x}=1$. Введемо заміну $7x=y \Rightarrow y\to 0$ при $x\to 0$.

Маємо: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{3\cdot\dfrac{y}{7}}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{\sin y}{y}=\dfrac{7}{3}\cdot 1=\dfrac{7}{3}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}$. Безпосередня підстановка $x=\infty$ дає невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$, тому скористаємося другою визначною границею: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{an+в}=e^a$, $e\approx 2{,}72$.

Введемо заміну $1+\dfrac{1}{n}=\dfrac{x-3}{x+2}$. Зведемо до спільного знаменника і виразимо x через n: $x=-5n-2$. При чому, якщо $x\to\infty$, то $n\to-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\cdot(-5n-2)-1}=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-10n-4-1}=e^{-10}=\frac{1}{e^{10}}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{3x}$. Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому скористаємося першою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Введемо заміну $7x=y\Rightarrow x=\dfrac{1}{7}y$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$, тоді: $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{3\cdot\dfrac{y}{7}}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{\ln(1+y)}{y}=\dfrac{7}{3}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}=\dfrac{7}{3}\cdot 1=\dfrac{7}{3}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-5^x}{x}$. Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому скористаємося другою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Виносимо в чисельнику за дужки множник 5^x:

$$\lim_{x\to0}\frac{7^x-5^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{5^x\left(\left(\frac{7}{5}\right)^x-1\right)}{x}=\lim_{x\to0}5^x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^x-1}{x}=1\cdot\ln\frac{7}{5}=\ln7-\ln5.$$

д). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+12x)^4-1}{5x}$. Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, тому скористаємося третьою необхідною границею: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$

Введемо заміну: $12x=y\Rightarrow x=\dfrac{y}{12}$. Якщо $x\to0$, то $y\to0$, тоді:

$$\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^4}{5\cdot\frac{y}{12}}=\lim_{y\to0}\frac{12}{5}\cdot\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\cdot4=\frac{48}{5}.$$

Індивідуальне завдання

3.2. Обчислити наступні границі:

3.2.1. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{cos2x-cos8x}{xtgx}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{x+2}$.

3.2.2. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x-\sin8x}{tg5x}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}(2x+5)^{\frac{2}{x^2-4}}$.

3.2.3. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+\sin7x}{\sin3x-\sin5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-2x^2}{3-2x^2}\right)^{7-x^2}$.

3.2.4. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{tg6x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x+2}\right)^{2x-11}$.

3.2.5. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{tg5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{2x-1}$.

3.2.6. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{cos2x-cos^3 2x}{\sin^2 8x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x-1}$.

3.2.7. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{cos^2 4x-5cos4x+4}{x\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{3x+7}{2x+6}\right)^{\frac{5}{x+1}}$.

3.2.8. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-x}{\sin3\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}(2x+5)^{\frac{3}{x+2}}$.

3.2.9. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos3x+1}{tg^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x-2}{2-x}\right)^{\frac{2}{x^2-4}}$.

3.2.10. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin8x+\sin3x}{\sin5x-\sin2x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-8^x}{tg2x}$.

3.2.11. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin x}{tg^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{\frac{4}{x^2-4}}$.

3.2.12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{arctg5x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+7}{2x+9}\right)^{\frac{2}{x+2}}$.

3.2.13. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos^2 x-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{3}{x^2-1}}$.

3.2.14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cosx-cos3x}{\sin^2 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x+3}$.

3.2.15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x}{tg^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^{3x+5}$.

3.2.16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\arccos x\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+5}$.

3.2.17. а) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x-5}{4x+1}\right)^{6x+3}$.

3.2.18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x-\sin 3x}{\sin^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2}{x^2-9}}$.

3.2.19. а) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{tg^2 2x}{\cos 5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x+5}{2x+8}\right)^{\frac{4}{x+3}}$.

3.2.20. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 2\pi x}{\sin \pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}(2x-13)^{\frac{3}{x-7}}$.

3.2.21. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1+\cos 5\pi x}{\cos 4\pi x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x+7}{3x+9}\right)^{\frac{3}{x+2}}$.

3.2.22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{xtg3x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+3}$.

3.2.23. а) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos 5x}{1+\cos 6x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{6x+5}{6x-1}\right)^{4x+3}$.

3.2.24. а) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x-\pi}{tg5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+2}{x+4}\right)^{\frac{5}{x^2-1}}$.

3.2.25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{tg4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{6x}-3^{2x}}{\sin x}$.

3.2.26. а) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{5x}-2^{-x}}{3x}$.

3.2.27. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{cosx-\sin x}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{\frac{3x}{2x^2+3}}$.

3.2.28. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos 3x}{tg^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-4^x}{\sin 2x}$.

3.2.29. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 4x}{tg^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x+3}$.

3.2.30. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x+\pi}{tg 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-9^x}{\sin 4x}$.

3.3. Неперервність та розриви функцій.

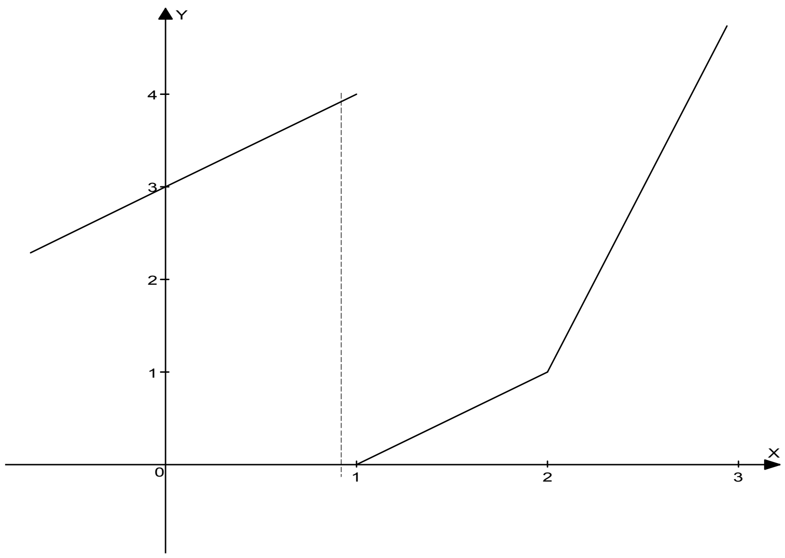
ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д 1: Дослідити на неперервність функцію і побудувати її графік:

$$y=\begin{cases} x+3, & x<1 \\ x-1, & x\in[1;2]. \\ 4x-7, & x>2 \end{cases}$$

Розв'язання:

Зайдемо границі справа та зліва в точках $x=1$ та $x=2$.



Для точки $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0}(x+3)=4,\quad \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0$. Лівостороння та правостороння границі мають різні значення ($4\neq 1$). Отже, функція має розрив у точці $x=1$.

Для точки $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(4x-7)=1;\ \lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x-1)=1$.

Лівостороння та правостороння границі мають однакові значення ($1=1$). Отже, функція неперервна в точці $x=2$.

П р и к л а д 2: Дослідити на неперервність функцію і побудувати її графік:

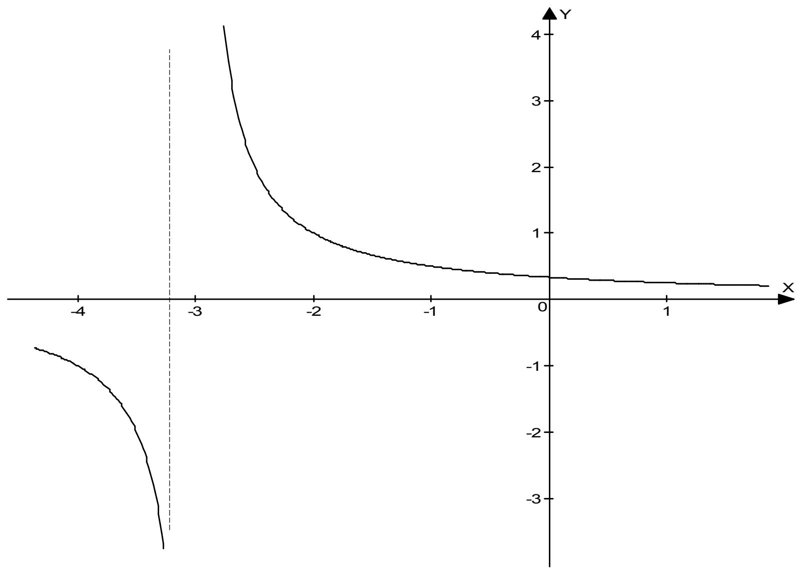
$$y=\frac{1}{3+x},\ \text{при } x\in R.$$

Розв'язання:

Так як $x\neq 3$, то знайдемо границі справа та зліва в точці розриву $x = 3$:

$$\lim_{x\to -3+0} f(x)=\lim_{x\to -3+0}\left(\frac{1}{3+x}\right)=\frac{1}{0}=\infty;\ \lim_{x\to -30} f(x)=\lim_{x\to -3+0}\left(\frac{1}{3+x}\right)=\frac{1}{-0}=-\infty.$$

Отже, маємо розрив II роду.



Індивідуальне завдання

3.3. Дослідити на неперервність функції та побудувати їх графіки:

3.3.1. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; б) $y(x)=\dfrac{3}{2+5^{\frac{1}{x+2}}}$.

3.3.2. а) $y(x)=\dfrac{5x^2-3x-2}{x^2+x-2}$; б) $y(x)=7^{\frac{2}{x+1}}$.

3.3.3. а) $y(x)=\dfrac{5x^2-x-4}{x^2+2x-3}$; б) $y(x)=\dfrac{5}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}$.

3.3.4. а) $y(x)=\dfrac{3x^2+5x-8}{x^2+4x-5}$; б) $y(x)=3^{\frac{2}{x-1}}$.

3.3.5. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2+x-3}$; б) $y(x)=\dfrac{3}{2-5^{\frac{2}{x+2}}}$.

3.3.6. а) $y(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+5x-7}$; б) $y(x)=4^{\frac{1}{x+2}}$.

3.3.7. а) $y(x)=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2+5x-6}$; б) $y(x)=\dfrac{1}{5^{\frac{1}{x}}-4}$.

3.3.8. а) $y(x)=\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+3x-4}$; б) $y(x)=7^{\frac{5}{x+5}}$.

3.3.9. а) $y(x)=\dfrac{4x^2-3x-1}{2x^2+3x-5}$; б) $y(x)=\dfrac{3}{2+5^{\frac{1}{x^2-4}}}$.

3.3.10. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-3x+2}$; б) $y(x)=8^{\frac{2}{x+4}}$.

3.3.11. а) $y(x)=\dfrac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-10}$; б) $y(x)=\dfrac{9}{2+2^{\frac{1}{x^2-1}}}$.

3.3.12. а) $y(x)=\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+2x-1}$; б) $y(x)=8^{\frac{2}{x-4}}$.

3.3.13. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$; б) $y(x)=\dfrac{2-2^{\frac{1}{x-1}}}{2+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

3.3.14. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$; б) $y(x)=2^{\frac{x}{x^2-4}}$.

3.3.15. а) $y(x)=\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-7x+3}$; б) $y(x)=\dfrac{2+2^{\frac{1}{x+1}}}{2+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

3.3.16. а) $y(x)=\dfrac{6x^2-5x-4}{2x^2+3x+1}$; б) $y(x)=2^{\frac{x}{x^2-1}}$.

3.3.17. а) $y(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-9x-5}$; б) $y(x)=\dfrac{2-2^{\frac{1}{x-2}}}{2+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

3.3.18. а) $y(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-9}$; б) $y(x)=3^{\frac{x}{x^2-9}}$.

3.3.19. а) $y(x)=\dfrac{5x^2+8x+3}{5x^2-7x-6}$; б) $y(x)=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-2}}}{1+2^{\frac{1}{x-2}}}$.

3.3.20. а) $y(x)=\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; б) $y(x)=2^{\frac{2}{4x^2-1}}$.

3.3.21. а) $y(x)=\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$; б) $y(x)=\dfrac{4-2^{\frac{1}{x-4}}}{4+2^{\frac{1}{x-4}}}$.

3.3.22. а) $y(x)=\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$; б) $y(x)=4^{\frac{1}{9x^2-1}}$.

3.3.23. а) $y(x)=\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$; б) $y(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}}{2+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

3.3.24. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$; б) $y(x)=3^{\frac{1}{4x^2-9}}$.

3.3.25. а) $y(x)=\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$; б) $y(x)=\dfrac{-2}{2+2^{-\frac{1}{x-1}}}$.

3.3.26. а) $y(x)=\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$; б) $y(x)=13^{\frac{2}{x^2-25}}$.

3.3.27. а) $y(x)=\dfrac{2x^2-x-3}{8x^2-10x-3}$; б) $y(x)=\dfrac{2}{2+2^{-\frac{1}{x-3}}}$.

3.3.28. а) $y(x)=\dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$; б) $y(x)=2^{\frac{1}{25x^2-1}}$.

3.3.29. а) $y(x)=\dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$; б) $y(x)=\dfrac{1}{3+2^{-\frac{1}{x-3}}}$.

3.3.30. а) $y(x)=\dfrac{6x^2-x-2}{3x^2+x-2}$; б) $y(x)=2^{\frac{-2}{x^2-1}}$.

3.4. Основні правила та формули диференціювання.

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y=4x^3-\dfrac{1}{2}x^2+7$; б) $y=\sqrt[7]{x^3}+\dfrac{4}{5x^{13}}$; в) $y=\cos x\cdot\log_9 x$;

г) $y=\dfrac{\arcsin x}{\ln x}$; д) $y=\sqrt{tg\left(x^3-4x\right)}$.

Розв'язання:

Для знаходження похідних функцій користуємося таблицею похідних (Табл. 1 додатку).

а) $y=4x^3-\dfrac{1}{2}x^2+7$.

$$y'=4\cdot3\cdot x^{3-1}-\frac{1}{2}\cdot2\cdot x^{2-1}+0=12x^2-x;$$

б) $y=\sqrt[7]{x^3}+\dfrac{4}{5x^{13}}$.

Скористаємося властивостями степеня $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, $\dfrac{1}{a^m}=a^{-m}$, отримаємо:

$$y=\sqrt[7]{x^3}+\frac{4}{5x^{13}}=x^{\frac{3}{7}}+\frac{4}{5}x^{-13}.$$

Тоді похідна функції $y'=\dfrac{3}{7}\cdot x^{\frac{3}{7}-1}+\dfrac{4}{5}\cdot(-13)\cdot x^{-13-1}=\dfrac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}-\dfrac{52}{5}x^{-14}=\dfrac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}-\dfrac{52}{5x^{14}}$.

в) $y=\cos x\cdot\log_9 x$.

Скористаємося формулою похідної добутку: $(uv)'=u'v+uv'$, тоді

$$y'=(\cos x)'\cdot\log_9 x+\cos x\cdot(\log_9 x)'=-\sin x\cdot\log_9 x+\cos x\cdot\frac{1}{x\ln 9}$$

г) $y=\dfrac{\arcsin x}{\ln x}$.

Скористаємося формулою похідної частки: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, тоді

$$y=\frac{(\arcsin x)'\cdot\ln x-\arcsin x\cdot(\ln x)'}{\ln^2 x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln x-\arcsin x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}.$$

д) $y=\sqrt{tg\left(x^3-4x\right)}$. Враховуючи, що функція складена, то її похідна дорівнюватиме: $y'=\frac{1}{2\sqrt{tg\left(x^3-4x\right)}}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(x^3-4x\right)}\cdot\left(3x^2-4\right).$

Індивідуальне завдання

3.4. Знайти похідні вказаних функцій:

3.4.1. а) $y=4x^5-\frac{1}{2}x^2+2x$; б) $y=e^x\cdot\ln x$;

в) $y=\frac{x^2}{\sin x}$; г) $y=\sqrt[5]{\log_{12}(6x+5)}$.

3.4.2. а) $y=4x^3-\frac{1}{4}x^2+12x$; б) $y=ctgx\cdot\sqrt{x}$;

в) $y=\frac{e^x-5}{\arccos x}$; г) $y=\sqrt{\ln\arccos 2^x}$.

3.4.3. а) $y=\frac{1}{4}x^8-7x^2+2\sqrt{x}$; б) $y=arccosx\cdot\log_5 x$;

в) $y=\frac{4x^4-9x^2}{\sqrt{x}}$; г) $y=\frac{3}{\ln^6\left(2x^2+x\right)}$.

3.4.4. а) $y=4x^6-\frac{1}{14}x^7+3x$; б) $y=cosx\cdot\log_2 x$;

в) $y=\frac{\sqrt{x}}{tgx}$; г) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

3.4.5. а) $y=7+x^2-\frac{1}{5}x^5$; б) $y=tgx\cdot\sqrt[3]{x}$;

в) $y=\frac{5x}{\cos x}$; г) $y=\frac{4x^6-25}{\sqrt{x^4+2x+5}}$.

3.4.6. а) $y=2x^3-\frac{1}{4}x^2-4x$; б) $y=2^x\cdot\sin x$;

в) $y=\frac{e^x}{\cos x}$; г) $y=\sin\sqrt{\ln 8^x}$.

3.4.7. а) $y=4x^2-\frac{2}{3}x^3+2$; б) $y=e^x\cdot arc\sin x$;

в) $y=\frac{x}{\ln x}$; г) $y=\sqrt{\frac{x}{x+4}}$.

3.4.8. а) $y=2x^3-x^2+\frac{1}{x}$; б) $y=\sin x\cdot 3^x$;

в) $y=\frac{tgx}{\sqrt{x}}$; г) $y=\ln arctgx^{5}$.

3.4.9. а) $y=2x^{7}-\frac{1}{6}x^{6}-2$; б) $y=x\cdot\log_{7}x$;

в) $y=\frac{arctgx}{x}$; г) $y=\ln arctg\sqrt{x^{2}+4}$.

3.4.10. а) $y=x^{3}-\frac{1}{7}x^{7}$; б) $y=cosx\cdot\ln x$;

в) $y=\frac{x^{6}-25}{\sqrt{x}}$; г) $y=7^{arctg(\arcsin x-3)}$.

3.4.11. а) $y=x^{3}-\frac{1}{7}x^{7}+7$; б) $y=e^{x}\cdot\sqrt[3]{x}$;

в) $y=\frac{\sqrt{x}}{tgx}$; г) $y=\frac{4x^{6}-25}{\sqrt{x^{4}+2x+5}}$.

3.4.12. а) $y=\sqrt{x^{3}}-\frac{1}{7}x^{7}+2$; б) $y=7^{x}\cdot\sqrt[3]{x}$;

в) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{arctgx}$; г) $y=\sqrt{\frac{\ln^{2}x-x}{4x}}$.

3.4.13. а) $y=\frac{1}{8}x^{8}-2x^{2}+2\sqrt{x}$; б) $y=arccosx\cdot\log_{2}x$;

в) $y=\frac{3x^{4}-9x^{2}}{\sqrt{x^{2}-4}}$; г) $y=\frac{3}{\ln^{5}(4x^{2}+2x)}$.

3.4.14. а) $y=3x^{6}-\frac{1}{21}x^{7}-9x$; б) $y=arccosx\cdot\log_{3}x$;

в) $y=\frac{\sqrt{x}}{tgx}$; г) $y=\frac{9x^{2}-16}{\sqrt{x^{3}+x^{2}-2x+4}}$.

3.4.15. а) $y=7x+3x^{2}-\frac{1}{10}x^{5}$; б) $y=tgx\cdot\sqrt[5]{x}$;

в) $y=\frac{5x^{2}-x}{\cos x}$; г) $y=\frac{4x^{6}-25}{\sqrt{x^{4}+2x+5}}$.

3.4.16. а) $y=2x^{3}-\frac{1}{4}x^{2}-4x$; б) $y=x^{2}\cdot\sin x$;

в) $y=\frac{e^{2x}}{\cos(2x)}$; г) $y=\frac{4x^{4}-9x^{2}}{\sqrt{x^{3}-6x-9}}$.

3.4.17. а) $y=\sqrt{2}x^{2}-\frac{2}{3}x^{3}+2x$; б) $y=e^{x}\cdot arccosx$;

в) $y=\frac{8^{x}}{\cos(8x-8)}$; г) $y=\sqrt{\frac{x}{x+4}}$.

3.4.18. а) $y = 2x^3 - 7x^2 + \frac{3}{x}$; б) $y = \sin x \cdot 7^{x+1}$;

в) $y = \frac{tgx}{\sqrt{x^5 - 5}}$; г) $y = \frac{(3x-2)^2(3x+2)}{\ln\sqrt{x-8}}$.

3.4.19. а) $y = 2x^7 - \frac{1}{6}x^3 - 2x^2$; б) $y = (x^2 + 2x - 1)\cdot \log_7 x$;

в) $y = \frac{arctgx}{x-7}$; г) $y = \ln arctg\sqrt{x^2+4}$.

3.4.20. а) $y = 4x^3 - \frac{1}{7}x^7 + 3\sqrt{x}$; б) $y = (x+1)\cdot \ln x$;

в) $y = \frac{3x^6 - 2x}{\sqrt{x}}$; г) $y = \frac{25x^4 - 16}{\sqrt{3x^2 - 8x + 4}}$.

3.4.21. а) $y = 3x^5 - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + 2x$; б) $y = (3x^3 + 3)\cdot \ln x$;

в) $y = \frac{3x^2 - 3}{\sin x}$; г) $y = \sqrt[3]{\log_2(2x+5)}$.

3.4.22. а) $y = 3x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 11x$; б) $y = tgx \cdot \sqrt{4x}$;

в) $y = \frac{5^x - x^5}{\arcsin x}$; г) $y = \sqrt{\ln\cos 5^x}$.

3.4.23. а) $y = \frac{1}{4}x^8 - 5x^2 + 4\sqrt{x}$; б) $y = arccos(4x)\cdot \log_3 x$;

в) $y = \frac{2x^4 - 9x^2}{\sqrt{4-x}}$; г) $y = \frac{3}{\log^5(2x^2 + 4x)}$.

3.4.24. а) $y = 7x^6 - \frac{1}{4}x^6 + 3x$; б) $y = cosx \cdot \ln x$;

в) $y = \frac{\sqrt{x}}{tg(x^2 2x)}$; г) $y = \sqrt{\sin\sqrt[3]{x-1}}$.

3.4.25. а) $y = 7x + x^2 - \frac{1}{5}x^3$; б) $y = tgx \cdot \sqrt[4]{x - 3x^3}$;

в) $y = \frac{5-x}{\cos(5x)}$; г) $y = \frac{x^6 - 5}{\sqrt{x^3 + 2x - 5}}$.

3.4.26. а) $y = 2x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{7}x$; б) $y = 2^x \cdot \sin(x-2)$;

в) $y = \frac{e^x}{\cos x}$; г) $y = \sin\sqrt{\ln(8^x - x^8)}$.

3.4.27. а) $y = 4x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 2$; б) $y = e^x \cdot arc\sin(e^x)$;

в) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{x+4}{x-4}}$.

3.4.28. а) $y = 2x^3 - x^2 + \dfrac{2}{x}$; б) $y = x^3 \cdot 3^x$;

в) $y = \dfrac{tgx}{\sqrt{3-x}}$; г) $y = \ln\left(tgx^5\right)$.

3.4.29. а) $y = 2x^7 - \dfrac{1}{6}x^6 - 2$; б) $y = \left(x^3 - 9\right)\cdot \log_7 x$;

в) $y = \dfrac{arctgx}{x}$; г) $y = \ln\left(tg\sqrt{x^2+4}\right)$.

3.4.30. а) $y = x^3 - \dfrac{1}{7}x^7$; б) $y = cosx \cdot \ln x$;

в) $y = \dfrac{x^6 - 25}{\sqrt{x-25}}$; г) $y = 7^{tg(\arcsin x + 3)}$.

3.5. Особливі випадки диференціювання.

П р и к л а д : Знайти похідну від вказаних функцій:

а) $\sin(x+y) + \ln(x-y) = 4$; б) $\begin{cases} x = \cos\left(t^2+1\right) \\ y = \sin\left(t^2+1\right) \end{cases}$;

в) $y = \left(x^3 + 3x^2 + 4\right)^{\sin 4x}$; г) $y = \log_{\sin x}(1+\sqrt{x})$.

Розв'язання:

а) $\sin(x+y) + \ln(x-y) = 4$.

Дана функція задана неявно, тому знаходимо похідну від лівої та правої частини, пам'ятаючи, що y є деякою функцією від x:

$$(\sin(x+y) + \ln(x-y))' = 4' \Rightarrow$$

$$\left(\sin(x+y)\right)' + \left(\ln(x-y)\right)' = 0 \Rightarrow \ \cos(x+y)\cdot(1+y') + \frac{1-y'}{x-y} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) + \frac{1}{x-y} + y'(\cos(x+y) - \frac{1}{x-y}) = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\cos(x+y) + \dfrac{1}{x-y}}{\cos(x+y) - \dfrac{1}{x-y}}.$$

б) $\begin{cases} x = \cos\left(t^2+1\right) \\ y = \sin\left(t^2+1\right) \end{cases}$ – функція задана параметрично, тобто у вигляді $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$,

тому її похідна обчислюється за формулою: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\sin\left(t^2+1\right)\cdot 2t}{\cos\left(t^2+1\right)\cdot 2t} = -tg\left(t^2+1\right).$$

в) $y=\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}$.

Функція задана у вигляді $f(x)=u(x)^{v(x)}$, тому прологарифмуємо функцію зліва та справа за основою e:

$\ln y=\ln\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}$, або $\ln y=\sin 4x\cdot\ln\left(x^3+3x^2+4\right)$;

Для знаходження похідної скористаємося формулою добутку:

$$y'\cdot\frac{1}{y}=4\cos 4x\cdot\ln\left(x^3+3x^2+4\right)+\sin 4x\cdot\frac{1}{x^3+3x+4}\cdot\left(3x^2+6x\right);$$

Тоді шукана похідна:

$$y'=4\cos 4x\cdot\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}\cdot\ln\left(x^3+3x^2+4\right)+\sin 4x\cdot\frac{3x^2+6x}{x^3+3x+4}\cdot\left(x^3+3x^2+4\right)^{\sin 4x}.$$

г) $y=\log_{\sin x}(1+\sqrt{x})$. Перейдемо до нової основи логарифма (наприклад e), скориставшись формулою: $\log_a b=\dfrac{\ln b}{\ln a}$, тоді $y=\log_{\sin x}(1+\sqrt{x})$

$$=\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln\sin x}\Rightarrow y'=\frac{(\ln(1+\sqrt{x}))'\cdot\ln\sin x-\ln(1+\sqrt{x})\cdot(\ln\sin x)'}{(\ln\sin x)^2}=$$

$$\frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\sin x-\ln(1+\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{\ln^2\sin x}=$$

$$\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x\ln\sin x-\cos x(1+\sqrt{x})\ln(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})\cdot\sin x\cdot\ln^2\sin x}.$$

Індивідуальне завдання

3.5. Знайти похідну функції, заданої неявно:

3.5.1. $x^2y+xy^2=x^3y^3$;

3.5.2. $arctgy+arcctgx=y$;

3.5.3. $\sin(x-y)=yctgx$;

3.5.4. $\sin(xy)=x^2+y^2$;

3.5.5. $x^3+y^2=4xy$;

3.6.6. $3^x-3^y=3^{x+y}$;

3.5.7. $x\sin y=x^2+y^2$;

3.5.8. $\ln(x+y)+x^2y=1$;

3.5.9. $2^x+2^y=2^{x+y}$;

3.5.10. $\sin x-\cos y=x+y$;

3.5.11. $\sin(xy)+\cos(xy)=y^2$;

3.5.12. $y\sin x=x^2-y^2$;

3.5.13. $x^3y+xy^2=xy^3$;

3.5.14. $artgy+arctgx=xy$;

3.5.15. $x^3+2y^3=5xy$;

3.5.16. $\sin(x+y)+\cos(x+y)=y^3$;

3.5.17. $tgy+ctgx=x+y$;

3.5.18. $3^{x-y}-3^y=3^{x+y}$;

3.5.19. $3x^3+y^3=5x-2y$;

3.5.20. $x+\sin y=x^5y^5$;

3.5.21. $\sin(x+y)+\cos(xy)=11y$;

3.5.22. $e^y\sin x=x^2+y^2$

3.5.23. $\ln y+\ln x=x+y$;

3.5.24. $\sin(x+y)=xy^3$;

3.5.25. $\cos(x+y)=yx^3$;

3.5.26. $tgy+ctgx=e^{x+y}$;

3.5.27. $\ln(x+2y)+\ln x=x+y$;

3.5.28. $e^y+\sin(x+y)=x^2+y^2$;

3.5.29. $\ln y - 2\ln x = 2^{x+y}$;

3.5.30. $\arcsin(x+2y) = xy^3$.

3.6. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

3.6.1. $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 - 4t - 2 \end{cases}$;

3.6.2. $\begin{cases} x = 3t^2 + t - 4 \\ y = t^2 + 6t - 7 \end{cases}$;

3.6.3. $\begin{cases} x = \ln(t^2 + t) \\ y = \log_2(t^2 + 3t - 2) \end{cases}$;

3.6.4. $\begin{cases} x = \ln(t^2 + 2t) \\ y = \log_5(t^2 + t) \end{cases}$;

3.6.5. $\begin{cases} x = \cos(t^2 + t) - \sin t \\ y = \sin(t+1) + \cos 4t \end{cases}$;

3.6.6. $\begin{cases} x = e^t - 7\sin t \\ y = e^{-t} + \dfrac{1}{4}\cos 4t \end{cases}$;

3.6.7. $\begin{cases} x = \cos(t+1) - \sin 4t \\ y = \sin(t+1) + \cos 4t \end{cases}$;

3.6.8. $\begin{cases} x = \cos(t^2 + t) - \sin(4+t) \\ y = \sin(t^2 + t) + \cos 4t \end{cases}$;

3.6.9. $\begin{cases} x = e^t - \sin t \\ y = e^t + \cos 4t \end{cases}$;

36.10. $\begin{cases} x = e -^t - 2\sin t \\ y = e^{-t} + \cos 2t \end{cases}$;

3.6.11. $\begin{cases} x = \ln(t^2 + 2t + 2) - t \\ y = \ln(t^2 + t) + t^2 + t \end{cases}$;

3.6.12. $\begin{cases} x = \log_2(t^2 + 2t) \\ y = \log_5(5 + t^5) \end{cases}$;

3.6.13. $\begin{cases} x = e^{t^2} + e^t \\ y = t^3 - 4t \end{cases}$;

3.6.14. $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = e^{t^3} - 4^t - 2 \end{cases}$;

3.6.15. $\begin{cases} x = 4t^2 + t - t^e \\ y = t^3 - 4t - 2e^t \end{cases}$;

3.6.16. $\begin{cases} x = 2t^2 + 3t - 4t^e \\ y = -t^3 - 4t^2 - 2e^t \end{cases}$;

3.6.17. $\begin{cases} x = \log_3(t^2 + 2t + 2) - 3t \\ y = \log_9(t^2 + t) + 3t^2 + 9t \end{cases}$;

3.6.18. $\begin{cases} x = \ln(t^2 + 2\sqrt{t}) - t \\ y = \ln(t^2 + \sqrt[3]{t}) + t^2 \end{cases}$;

3.6.19. $\begin{cases} x = 2^{t^2} + 4^t \\ y = 2t^3 - 4t \end{cases}$;

3.6.20. $\begin{cases} x = 10^{t^2} + 10^{e^t} \\ y = t^3 - et \end{cases}$;

3.6.21. $\begin{cases} x = \cos(t^3 + 3) - \sin 3t \\ y = \sin(t^2 - 2) + \cos 2t \end{cases}$;

3.6.22. $\begin{cases} x = \arccos(t+1) - \sin 4t \\ y = \arcsin(t+1) + \cos 4t \end{cases}$;

3.6.23. $\begin{cases} x = \cos(t+1) - \arcsin 4t \\ y = \sin(t+1) + \arccos 4t \end{cases}$;

3.6.24. $\begin{cases} x = \sqrt{\cos(t+1)} - \sin 4t \\ y = \sin(t+1) + \sqrt{\cos 4t} \end{cases}$;

3.6.25. $\begin{cases} x = \sqrt{3t^2 + t - 4} \\ y = \sqrt{t^2 + 6t - 7} \end{cases}$;

3.6.26. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t^2 + t} \\ y = \sqrt[5]{t^3 - 4t} \end{cases}$;

3.6.27. $\begin{cases} x = \sqrt{\log_2(t^2 + 2t)} \\ y = \sqrt{\log_5(5 + t^5)} \end{cases}$;

3.6.28. $\begin{cases} x = \left(2^{t^2} + 4^t\right)^{2t} \\ y = \left(2t^3 - 4t\right)^{-2t} \end{cases}$;

3.6.29. $\begin{cases} x = -(\sin 4t)^{t-4} \\ y = (\cos 4t)^{4-t} \end{cases}$;

3.6.30. $\begin{cases} x = \arccos(\sin 4t) \\ y = \arcsin(\cos 4t) \end{cases}$.

3.7. Знайти похідну функції, користуючись правилом логарифмування:

3.7.1. $y=\left(\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^{x-4}$; **3.7.2.** $y=(1-\cos 2x)^{x^2-2}$;

3.7.3. $y=(x^2+3x-1)^{x+4}$; **3.7.4.** $y=(e^x+\cos x)^x$;

3.7.5. $y=\left(e^{4x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)^{e^x}$; **3.7.6.** $y=(1+x^2)^{4x}$;

3.7.7. $y=(x-10)^{x+10}$; **3.7.8.** $y=(\log_x 7)^{tgx}$;

3.7.9. $y=(x^3+x^2)^{\cos x}$; **3.7.10.** $y=\left(3+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$;

3.7.11. $y=\left(3+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x^2-x}}$; **3.7.12.** $y=(x^3+3x^2+4)^{\sqrt{x-3x^2}}$;

3.7.13. $y=\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)^{\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)}$; **3.7.14.** $y=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)^{\sqrt{4x-3}}$;

3.7.14. $y=\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)^{(x-2x^2)}$; **3.7.15.** $y=\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)^{\sqrt{x}}$;

3.7.16. $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$; **3.7.17.** $y=\left(4x^5-\frac{1}{2}x^2+2x\right)^{x}$;

3.7.18. $y=(e^x\cdot\ln x)^{\sqrt{x}}$; **3.7.19.** $y=\left(4x^3-\frac{1}{4}x^2+12x\right)^{x-1}$;

3.7.20. $y=(ctgx\cdot\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$; **3.7.21.** $y=arccosx\cdot\log_5 x$

3.7.22. $y=(\log_5 x)^{\sqrt[3]{x}}$; **3.7.23.** $y=(arccosx)^{\log_5 x}$;

3.7.24. $y=\left(\frac{1}{4}x^8-7x^2+2\sqrt{x}\right)^{\sin x}$; **3.7.25.** $y=(cosx)^{\log_2 x}$;

3.7.26. $y=(\log_2 x)^{tgx}$; **3.7.26.** $y=\left(\sqrt{\sin\sqrt{x}}\right)^{x}$;

3.7.27. $y=(tgx)^{\sqrt[3]{x}}$; **3.7.28.** $y=(2^x)^{\sin x}$;

3.7.29. $y=x^{\log_7 x}$; **3.7.30.** $y=(\sin x)^{3^x}$.

3.6. Диференціал функції. Застосування диференціалу до наближеного обчислення функції.

П р и к л а д 1: Знайти наближено значення функції $y=\sqrt[3]{5x^2+10x+5}$ при $x=4{,}03$.

Розв'язання:

Значення функції обчислимо за формулою: $y \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$.
Нехай $x_0 = 4$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 0{,}03$.

$y(x_0) = \sqrt[3]{5 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 + 5} = \sqrt[3]{125} = 5$;

$y' = \dfrac{10x+10}{3\sqrt[3]{(5x^2+10x+5)}}$; $y'(4) = \dfrac{10 \cdot 4 + 10}{3\sqrt[3]{(5 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 + 5)}} = \dfrac{50}{3 \cdot 25} = \dfrac{2}{3}$;

$y \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x = 5 + \dfrac{2}{3} \cdot 0{,}03 = 5{,}01$.

П р и к л а д 2: Знайти наближено $\sin 63^\circ$.

Розв'язання:

Значення функції обчислимо за формулою: $y \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$.

Нехай $y = \sin x$, $x = 63^\circ$, $x = 60^\circ$, тоді $\Delta x = x - x_0 = 3^\circ = \dfrac{3 \cdot 3{,}14}{180} = 0{,}052$.

$y(x_0) = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$;

$y'(60^\circ) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$;

$\sin 60^\circ \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x = 0{,}866 + 0{,}5 \cdot 0{,}052 = 0{,}892$.

Індивідуальне завдання

3.8. Обчислити наближено значення функцій за допомогою диференціала:

3.8.1. $4{,}02^5$;	**3.8.2.** $\sqrt[3]{128}$;	**3.8.3.** $\sin 43^\circ$;
3.8.4. $1{,}02^8$;	**3.8.5.** $\sqrt{50}$;	**3.8.6.** $tg46^\circ$;
3.8.7. $ctg61^\circ$;	**3.8.8.** $\sqrt[5]{33}$;	**3.8.9.** $\cos 29^\circ$;
3.8.10. $\sin 64^\circ$;	**3.8.11.** $\cos 62^\circ$;	**3.8.12.** $1{,}01^3$;
3.8.12. $\sqrt[3]{9}$;	**3.8.14.** $\cos 86^\circ$;	**3.8.15.** $\sqrt{15}$;
3.8.16. $\sqrt[4]{15}$;	**3.8.17.** $\cos 46^\circ$;	**3.8.18.** $2{,}01^3$;
3.8.19. $0{,}97^3$;	**3.8.20.** $\cos 2^\circ$;	**3.8.21.** $\sqrt{66}$;
3.8.22. $\sqrt[3]{28}$;	**3.8.23.** $tg47^\circ$;	**3.8.24.** $0{,}96^5$;
3.8.25. $\sqrt[4]{81}$;	**3.8.26.** $tg40^\circ$;	**3.8.27.** $\sqrt{120}$;
3.8.28. $\sqrt[3]{68}$;	**3.8.29.** $tg32^\circ$;	**3.8.30.** $1{,}02^5$.

3.7. Застосування похідної до дослідження динаміки функції

П р и к л а д : Дослідити функцію і побудувати її графік: $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання:

1. Елементарні дослідження:

Область визначення функції : $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.
Точки перетину графіка функції з осями координат:
$(0;0)$ − єдина точка перетину з віссю абсцис та ординат.

Функція непарна, так як: $y(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}$. Отже графік функції симетричний відносно початку координат.

2. <u>Дослідження точок розриву:</u>

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{-0}=\infty;\ \lim_{x\to -1-0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty;\ \lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{-0}=-\infty.$$

Отже, $x=-1$ і $x=1$ − вертикальні асимптоти.

3. <u>Знаходження похилих асимптот:</u>

Похилі асимптоти визначатимемо за формулою: $y=kx+b$. Для цього знайдемо невідомі коефіцієнти k і b:

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-1}=\left[\frac{0}{\infty}\right]=0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Тоді рівняння асимптоти набуватиме вигляду: $y=0$.

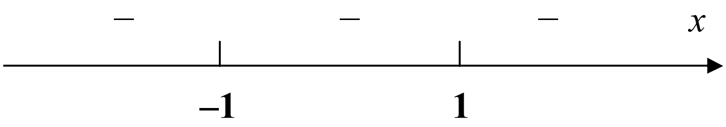
4. <u>Дослідження функції на монотонність:</u>

Знайдемо першу похідну функції:

$$y'=\frac{(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-2x^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}=-\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}.$$

Прирівняємо першу похідну до нуля: $-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}=0$.

Так як рівняння не має розв'язків, то критичних точок першого роду не має. Тому на числовій осі *0X* позначаємо лише точки розриву функції:



Отже, функція спадає на всій області визначення.

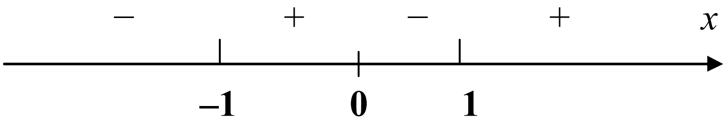
5. <u>Дослідження на опуклість та ввігнутість:</u>

Знайдемо другу похідну функції:

$$y''=\frac{-2x\cdot(x^2-1)^2+(1+x^2)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x\cdot(x^2-1)\cdot(-x^2+1-2+2x^2)}{(x^2-1)^4}=$$

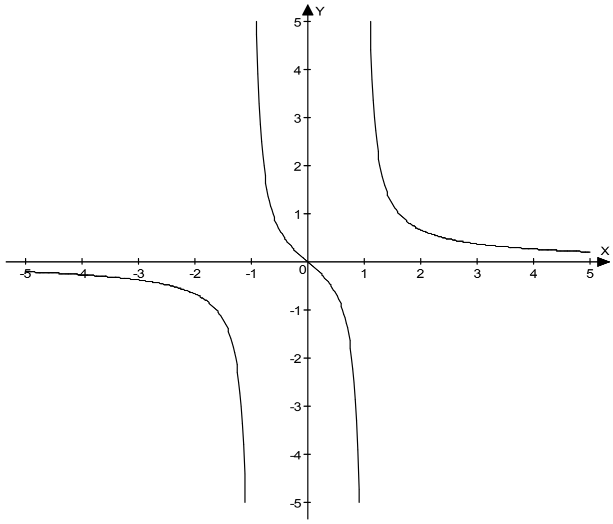
$$=\frac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-4)^3}.$$

Прирівняємо другу похідну до нуля: $\dfrac{2x\cdot\left(x^2-2x-1\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0$, $x=0$ − критична точка другого роду. Визначимо знаки другої похідної на отриманих інтервалах:



Отже, функція опукла вниз на проміжках: $x\in(-1;0)\cup(1;\infty)$, опукла вгору − $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$. Точка (0; 0) – точка перегину.

6. Побудова графіка функції:



Індивідуальне завдання

3.9. Дослідити функцію і побудувати її графік:

3.9.1. $y=\dfrac{x}{x+2}$;	**3.9.2.** $y=\dfrac{4x}{x+2}$;	**3.9.3.** $y=\dfrac{x}{x+2}$;
3.9.4. $y=\dfrac{x}{(x-2)^2}$;	**3.9.5.** $y=\dfrac{x}{x^2-9}$;	**3.9.6.** $y=\dfrac{x}{x^2+9}$;
3.9.7. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2}$;	**3.9.8.** $y=\dfrac{x^2-1}{x}$;	**3.9.9.** $y=\dfrac{3x}{x^2-4}$;
3.9.10. $y=\dfrac{x+2}{x^2-1}$;	**3.9.11.** $y=\dfrac{x}{(x-2)^2}$;	**3.9.12.** $y=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$;
3.9.13. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$;	**3.9.14.** $y=\dfrac{x-1}{x^2}$;	**3.9.15.** $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$;
3.9.16. $y=\dfrac{x-1}{x^2}$;	**3.9.17.** $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;	**3.9.18.** $y=\dfrac{5x}{x+5}$;
3.9.19. $y=\dfrac{x-2}{x^2}$;	**3.9.20.** $y=\dfrac{x^2+9}{x^2-9}$;	**3.9.21.** $y=\dfrac{4+x}{x+1}$;
3.9.22. $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$;	**3.9.23.** $y=\dfrac{x-1}{(x-2)x}$;	**3.9.24.** $y=\dfrac{4}{x+x^2}$;

3.9.25. $y=\dfrac{x-1}{x^3}$; **3.9.26.** $y=\dfrac{x}{(x-2)(x-1)}$; **3.9.27.** $y=\dfrac{4-x}{x+2}$;

3.9.28. $y=\dfrac{x+1}{x(x-1)}$; **3.9.29.** $y=\dfrac{x+1}{(x+2)(x-1)}$; **3.9.30.** $y=\dfrac{1}{x(x-2)}$.

МОДУЛЬ 4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ

4.1. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: знайти невизначені інтеграли:

а) $\int\left(5x^3-\dfrac{1}{4}x^4+2x-1\right)dx$; б) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{7}{x^3})dx$; в) $\int\cos(9x-4)dx$;

г) $\int\dfrac{\ln x}{x}dx$; д) $\int\ln x\cdot dx$.

Розв'язання:

Для знаходження невизначеного інтеграла користуємося таблицею інтегралів (табл. 2 додатку).

а) $\int\left(5x^3-\dfrac{1}{4}x^4+2x-1\right)dx=5\int x^3dx-\dfrac{1}{4}\int x^4dx+2\int xdx-\int dx=$

$=\dfrac{5x^{3+1}}{3+1}-\dfrac{x^{4+1}}{4(4+1)}+\dfrac{2x^{1+1}}{1+1}-x+C=\dfrac{5x^4}{4}-\dfrac{x^5}{20}+x^2-x+C.$

б) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{7}{x^3})dx=\int\sqrt{x}dx+\int\sqrt[3]{x^5}dx-\int\dfrac{7}{x^3}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{5}{3}}dx-7\int x^{-3}dx=$

$=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\dfrac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}-7\int x^{-3}dx=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\dfrac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}-7\cdot\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\dfrac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}-7\dfrac{x^{-2}}{-2}+C=$

$=7\cdot\dfrac{x^{-2}}{-2}+C=\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+\dfrac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{x^8}+\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}+C.$

в) $\int\cos(9x-4)dx=\left|\begin{array}{l}9x-4=t\\ 9dx=dt\\ dx=\dfrac{1}{9}dt\end{array}\right|=\int\cos t\cdot\dfrac{1}{9}dt=\dfrac{1}{9}\int\cos t\cdot dt=\dfrac{1}{9}\sin t+C=$

$=\dfrac{1}{9}\sin(9x-4)+C.$

(У даному випадку користувалися заміною змінної).

г) $\int\dfrac{\ln x}{x}dx=\left|\ln x=t\Rightarrow\dfrac{dx}{x}=dt\right|\Rightarrow\int t\cdot dt=\dfrac{1}{2}t^2+C=\dfrac{1}{2}\ln^2x+C.$

(У даному випадку користувалися заміною змінної).

д) $\int\ln xdx=\left|\begin{array}{c}\ln x=u;\dfrac{dx}{x}=du\\ dx=dv;x=v\end{array}\right|=x\ln x-\int x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot dx=x\ln x-\int dx+C=x\cdot\ln x-x+C.$

(В даному випадку користувалися формулою інтегрування частинами: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

4.1.1. а) $\int (10\sqrt[5]{x^2} + 2\sqrt{x} + \frac{3}{x})dx$; б) $\int x^2 \sqrt{x^3 - 4}dx$; в) $\int \ln(x+1)dx$.

4.1.2. а) $\int (10\sqrt{x} + \frac{1}{7}\sqrt{x^2} + \cos x)dx$; б) $\int x^5 \sqrt{x^6 - 9}dx$; в) $\int \frac{x}{cos^2 5x}dx$.

4.1.3. а) $\int (\frac{1}{5}\sqrt[5]{x} + 5\sqrt{x} + \cos x)dx$; б) $\int \frac{3dx}{(3+2x)^2 + 1}$; в) $\int \sqrt{x}\ln(3x)dx$.

4.1.4. а) $\int (10\sqrt[4]{x^5} - \sqrt{x} + \frac{3}{x})dx$; б) $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 4}dx$; в) $\int \sqrt{x}\ln(5x)dx$.

4.1.5. а) $\int \left(2\sqrt[5]{x^7} - \frac{1}{6}\sqrt[7]{x^6} - 2\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{(3-4x)^2 - 1}$; в) $\int \frac{x}{cos^2 9x}dx$.

4.1.6. а) $\int (4x^2 - 7x + 2)dx$; б) $\int \frac{\cos(x^2+1)}{x}dx$; в) $\int \frac{x}{cos^2 7x}dx$.

4.1.7. а) $\int (3\sqrt[5]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x})dx$; б) $\int \cos(5x+5)dx$; в) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

4.1.8. а) $\int (10\sqrt[7]{x^4} + 12\sqrt{x} + \sin x)dx$; б) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; в) $\int xe^{3x}dx$.

4.1.9. а) $\int (4\sqrt[7]{x^3} + 2\sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{x})dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}dx$; в) $\int (x+10)e^{10x}dx$;

4.1.10. а) $\int (\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[10]{x} + \frac{4}{x})dx$; б) $\int \frac{2}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}dx$; в) $\int (2-x)^2 sin7xdx$.

4.1.11. а) $\int (\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}})dx$; б) $\int \frac{2}{x\sqrt{\ln x}}dx$; в) $\int (4-x)^2 sin2xdx$.

4.1.12. а) $\int (7x^2 + \frac{1}{\sqrt[9]{x^5}} + 6)dx$; б) $\int \frac{2}{x\ln^6 x}dx$; в) $\int x^2 cos4xdx$.

4.1.13. а) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}})dx$; б) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}dx$; в) $\int x^2 cos5xdx$.

4.1.14. а) $\int (\sqrt[7]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}})dx$; б) $\int \frac{2}{x\ln^2 x}dx$; в) $\int x^2 cosxdx$.

4.1.15. а) $\int (\sqrt[9]{x} - \frac{1}{\sqrt[7]{x^{12}}})dx$; б) $\int \frac{e^x}{e^x + 4}dx$; в) $\int (x+3)^2 e^{2x}dx$.

4.1.16. а) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}})dx$; б) $\int e^{6-4x}dx$; в) $\int \frac{x}{cos^2 4x}dx$.

4.1.17. а) $\int (\sqrt[11]{x} - \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}})dx$; б) $\int x^2 \sqrt{x^3 - 9}dx$; в) $\int \frac{x}{\sin^2 3x}dx$.

4.1.18. а) $\int \left(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^4} + 1\right)dx$; б) $\int \frac{x^4}{x^5 + 1}dx$; в) $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

4.1.19. а) $\int \left(4\sqrt[7]{x^8} + \frac{1}{3x^3} + 2\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$; в) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

4.1.20. а) $\int (\sqrt[7]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2x)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2(3 - 4x)}$; в) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$.

4.1.21. а) $\int (\frac{1}{3}x^2 + \sqrt[3]{3x} + \frac{4}{\sqrt{x}})dx$; б) $\int 5^{\frac{x}{4}+1} dx$; в) $\int \left(x^2 - 2x\right) cosxdx$.

4.1.22. а) $\int (10x + \frac{1}{7}\sqrt[3]{x^2} + \cos x)dx$; б) $\int \frac{dx}{1 - 3x}$; в) $\int (x - 2)^2 cosxdx$.

4.1.23. а) $\int (\frac{1}{5}\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x} + \cos x)dx$; б) $\int \frac{dx}{(3 - 4x)^2 + 1}$; в) $\int (6 - 4x) sinxdx$.

4.1.24. а) $\int (10\sqrt[3]{x^5} - \sqrt{x} + \frac{3}{x})dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$; в) $\int \left(3x + x^2\right) sinxdx$.

4.1.25. а) $\int \left(2\sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{6}\sqrt[5]{x^6} - 2\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{3 - 8x}$; в) $\int (6 - 2x) sinxdx$.

4.1.26. а) $\int \left(4\sqrt[3]{x^2} - 7\sqrt{x} + 2\right)dx$; б) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 4}dx$; в) $\int x^2 \ln x dx$.

4.1.27. а) $\int (3\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt{x} + \frac{5}{x})dx$; б) $\int \frac{1}{x \ln^5 x}dx$; в) $\int \left(x^2 + 2x - 1\right)e^x dx$.

4.1.28. а) $\int (10\sqrt[3]{x^4} + 12\sqrt{x} + \sin x)dx$; б) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$; в) $\int xe^{2x+1} dx$.

4.1.29. а) $\int (4\sqrt{x^3} + 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x})dx$; б) $\int \frac{4x^3}{x^4 + 1}dx$; в) $\int (2x + 1)e^x dx$.

4.1.30. а) $\int (\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{3x} + \frac{4}{x})dx$; б) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$; в) $\int xe^x dx$.

4.2. Інтегрування виразів, що містять в знаменнику квадратний тричлен. Інтегрування раціональних дробів

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}}$; в) $\int \frac{2x - 17}{(2x + 5)(x - 3)}dx$.

Розв'язання:

Для прикладів а) та б) виділимо із квадратного тричлена повний квадрат:

а) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$.

$x^2+4x+8=x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2-2^2+8=(x+2)^2+4=(x+2)^2+2^2$. Тоді:

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+2^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+C.$$

б) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

$2-6x-9x^2=-(9x^2+6x-2)=-((3x)^2+2\cdot 3x+1-1-2)=-(3x+1)^2+3=$
$=\sqrt{3}^2-(3x+1)^2$. Тоді:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\sqrt{3}^2-(3x+1)^2}}=\frac{1}{3}arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

в) $\int\frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)}dx$.

Нехай,

$$\frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)}\equiv\frac{A}{2x+5}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(2x+5)}{(2x+5)(x-3)}=\frac{Ax-3A+2Bx+5B}{(2x+5)(x-3)}=$$
$$=\frac{(A+2B)x+(5B-3A)}{(2x+5)(x-3)}\Rightarrow\begin{cases}A+2B=2\\5B-3A=-17\end{cases}.$$

Розв'язавши отриману систему, маємо $A=4$, $B=-1$. Тобто дріб можна представити у вигляді суми дробів: $\frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)}=\frac{4}{2x+5}+\frac{-1}{x-3}$, а заданий інтеграл у вигляді суми інтегралів:

$$\int\frac{2x-17}{(2x+5)(x-3)}dx=\int\frac{4dx}{2x+5}+\int\frac{-dx}{x-3}=4\int\frac{dx}{2x+5}-\int\frac{dx}{x-3}=\frac{4}{2}\ln|2x+5|-\ln|x-3|+\ln|C|=$$
$$=\ln|2x+5|^2-\ln|x-3|+\ln|C|=\ln\left|\frac{C(2x+5)^2}{x-3}\right|.$$

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

4.2.1. а) $\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$; б) $\int\frac{3x-4}{x^2-x}dx$.

4.2.2. а) $\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$; б) $\int\frac{x+3}{(2x-1)(3x+2)}dx$.

4.2.3. а) $\int\frac{1}{x^2+6x+5}dx$; б) $\int\frac{17x+13}{(2x+1)(3x+2)}dx$.

4.2.4. а) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$; б) $\int\frac{21-x}{(x-5)(x+3)}dx$.

4.2.5. а) $\int\frac{1}{4x^2-4x+5}dx$; б) $\int\frac{5x-7}{(x+1)(x-2)}dx$.

4.2.6. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$; б) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

4.2.7. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$; б) $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$.

4.2.8. а) $\int \frac{dx}{9x^2+6x+4}$; б) $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx$.

4.2.9. а) $\int \frac{dx}{x^2+6x+4}$; б) $\int \frac{x-9}{x^2+6x+5}dx$.

4.2.10. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+3-x^2}}$; б) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.

4.2.11. а) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}dx$; б) $\int \frac{x^5+4x-8}{x^3-4x}dx$.

4.2.12. а) $\int \frac{dx}{16x^2+16x+4}$; б) $\int \frac{2x^2+x-4}{x(x+2)}dx$.

4.2.13. а) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+2x+2}}dx$; б) $\int \frac{2x^2-4x+1}{x(5x-1)}dx$.

4.2.14. а) $\int \frac{dx}{9x^2+6x-4}$; б) $\int \frac{-14x-18}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$.

4.2.15. а) $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2+2x}}dx$; б) $\int \frac{x^2+5x+8}{(x+4)(x+3)}dx$.

4.2.16. а) $\int \frac{1}{4x^2-8x+5}dx$; б) $\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

4.2.17. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+12x-9x^2}}$; б) $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$.

4.2.18. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-4x^2}}$; б) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$.

4.2.19. а) $\int \frac{dx}{x^2+6x+4}$; б) $\int \frac{1}{(1+x^2)^4}dx$.

4.2.20. а) $\int \frac{dx}{x^2+10x+4}$; б) $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$.

4.2.21. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{10x+3-x^2}}$; б) $\int \frac{2x-3}{x^2-7x+12}dx$.

4.2.22. а) $\int \frac{dx}{8x^2+16x+4}$; б) $\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}dx$.

4.2.23. а) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+8x+2}}dx$; б) $\int \frac{x^4}{(x+2)(x^2-1)}dx$.

4.2.24. а) $\int \frac{dx}{25x^2+20x-4}$; б) $\int \frac{-14x-18}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$.

4.2.25. а) $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2+4x}}dx$; б) $\int \frac{x^2+5x+8}{(x+4)(x+3)}dx$.

4.2.26. а) $\int \frac{1}{8x^2-8x+5}dx$; б) $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)}dx$.

4.2.27. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+18x-9x^2}}$; б) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$.

4.2.28. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-16x^2}}$; б) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx$.

4.2.29. а) $\int \frac{dx}{25x^2+6x+4}$; б) $\int \frac{1}{(1+x^2)x}dx$.

4.2.30. а) $\int \frac{dx}{9x^2+10x+4}$; б) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$.

4.3. Інтегрування деяких тригонометричних виразів

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: знайти інтеграли:

а) $\int sin3xcos7xdx$; б) $\int \frac{dx}{2sinx-cosx}$;

в) $\int sin^2xdx$; г) $\int sin^3xcos^2xdx$.

Розв'язання:

а) $\int sin3xcos7xdx = \frac{1}{2}\int (sin(3-7)x + sin(3+7)x)dx = \frac{1}{2}\int (sin(-4)x + sin10x)dx =$

$= -\frac{1}{2}\int sin4xdx + \int sin10xdx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}cos4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}cos10x + C = \frac{1}{8}cos4x - \frac{1}{20}cos10x +$
$+C$;

б) використаємо універсальну тригонометричну підстановку $t = tgx$. Звідки $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$, $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Тоді:

$$\int \frac{dx}{2sinx-cosx} = \int \frac{\frac{2dx}{1+t}}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dx}{1+t}}{\frac{4t-1+t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+4t-1} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2-5} =$$

$$= 2\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C;$$

в) $\int sin^2xdx = \int \frac{1}{2}(1-cos2x)dx = \frac{1}{2}\left(\int dx - \int cos2xdx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}sin2x\right) + C = \frac{x}{2} -$

$= \frac{x}{2} - \frac{sin2x}{4} + C$;

г) $\int sin^3xcos^2xdx = \int sin^2xsinxcos^2xdx = \int\left(1-cos^2x\right)\cdot cos^2xd(cosx) =$

$= \int cos^2xd(cosx) - \int cos^4xd(cosx) = \frac{sin^3x}{3} - \frac{sin^4x}{4} + C$.

Індивідуальне завдання

Знайти невизначені інтеграли:

4.3.1. а) $\int sin2xsin\frac{2x}{3}dx$; б) $\int \frac{dx}{sinx}$.

в) $\int cos^5xdx$; г) $\int cos^4(2x)dx$;

4.3.2. а) $\int sin6xcos2xdx$; б) $\int \frac{dx}{1+4sinx}$.

в) $\int cos^7xdx$; г) $\int cos^4(4x)dx$;

4.3.3. а) $\int cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{4}dx$; б) $\int \frac{dx}{2+cosx}$.

в) $\int cos^4(3x)dx$; г) $\int \frac{cos^3x}{sin^4x}dx$;

4.3.4. а) $\int sin6xcos2xdx$; б) $\int \frac{dx}{5+4sinx}$.

в) $\int sin^2 2xdx$; г) $\int sin^4xcos^3xdx$;

4.3.5. а) $\int cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{3}dx$; б) $\int \frac{dx}{5+2sinx}$.

в) $\int sin^2 2xdx$; г) $\int sin^2xcos^3xdx$;

4.3.6. а) $\int sin5xsin2xdx$; б) $\int \frac{dx}{2+3cosx}$.

в) $\int cos^2 4xdx$; г) $\int sin^5xcos^4xdx$;

4.3.7. а) $\int sin2xcos5xdx$; б) $\int \frac{dx}{3sinx+2cosx}$.

в) $\int cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$; г) $\int sin^3xcos^4xdx$;

4.3.8. а) $\int cos5xcos2xdx$; б) $\int \frac{dx}{1+cosx}$.

в) $\int cos^4 3xdx$; г) $\int cos^5 2xdx$;

4.3.9. а) $\int cosxcos3xdx$; б) $\int \frac{dx}{1+cosx}$.

в) $\int cos^2 3xdx$; г) $\int \frac{sin^3 x}{cos^2 x}dx$;

4.3.10. а) $\int cos9xcos3xdx$; б) $\int \frac{dx}{2+cosx}$.

в) $\int cos^5 xdx$; г) $\int sin^9 xcos^3 xdx$;

4.3.11. а) $\int sin(2x)sin\left(\frac{x}{3}\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{2+sinx}$.

в) $\int cos^3(4x)dx$; г) $\int cos^4(10x)dx$;

4.3.2. а) $\int sin(16x)cos(2x)dx$; б) $\int \frac{dx}{1+2sinx}$.

в) $\int cos^7 xdx$; г) $\int cos^4(4x)dx$;

4.3.13. а) $\int cos\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{3x}{4}\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{2+cosx}$.

в) $\int cos^4(5x)dx$; г) $\int \frac{cos^3 x}{sin^2 x}dx$;

4.3.14. а) $\int sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{5+4sinx}$.

в) $\int sin^2(3x)dx$; г) $\int sinxcos^3 xdx$;

4.3.15. а) $\int cos\frac{x}{6}cos\frac{x}{3}dx$; б) $\int \frac{dx}{5+sinx}$.

в) $\int sin^2(12)xdx$; г) $\int sin^2 xcos^7 xdx$;

4.3.16. а) $\int sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{1+3cosx}$.

в) $\int cos^2 8xdx$; г) $\int sin^5 xcos^3 xdx$;

4.3.17. а) $\int sin(12x)cos(2x)dx$; б) $\int \frac{dx}{sinx+cosx}$.

в) $\int cos^2\left(\frac{x}{4}\right)dx$; г) $\int sin^3 xcos^5 xdx$;

4.3.18. а) $\int sin(3x)sin(5x)dx$; б) $\int \frac{dx}{2+sinx}$.

в) $\int sin^2(2x)dx$; г) $\int sin^3(2x)dx$;

4.3.19. а) $\int cos(x)cos(3x)dx$; б) $\int \frac{dx}{1+cosx}$.

в) $\int cos^2(10x)dx$; г) $\int \frac{sin^3 x}{cos^4 x}dx$;

4.3.20. а) $\int cos9xcos13xdx$; б) $\int \frac{dx}{5+cosx}$.

в) $\int cos^4(10x)dx$; г) $\int sin^9 xcosxdx$;

4.3.21. а) $\int sin(2x)sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{sinx}$.

в) $\int cos^4(12x)dx$; г) $\int cos^3(2x)dx$;

4.3.22. а) $\int sin6xcos12xdx$; б) $\int \frac{dx}{3+sinx}$.

в) $\int cos^7 xdx$; г) $\int cos^4(4x)dx$;

4.3.23. а) $\int cos\frac{x}{8}cos\frac{x}{4}dx$; б) $\int \frac{dx}{1+2cosx}$.

в) $\int cos^2(7x)dx$; г) $\int \frac{cos^3 x}{sin^2 x}dx$;

4.3.24. а) $\int sin(x)cos(7x)dx$; б) $\int \frac{dx}{5+4sinx}$.

в) $\int sin^2(4x)dx$; г) $\int sin^2 xcos^3 xdx$;

4.3.25. а) $\int cos\left(\frac{x}{6}\right)cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{3+2sinx}$.

в) $\int sin^2(8x)dx$; г) $\int sinxcos^3 xdx$;

4.3.26. а) $\int sin(5x)sin(2x)dx$; б) $\int \frac{dx}{2+3cosx}$.

в) $\int cos^2(4x)dx$; г) $\int sin^5 xcos^4 xdx$;

4.3.27. а) $\int sin2xcos5xdx$; б) $\int \frac{dx}{sinx+2cosx}$.

в) $\int cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$; г) $\int sin^3 xcos^3 xdx$;

4.3.28. а) $\int sin(13x)sin(5x)dx$; б) $\int \frac{dx}{4+sinx}$.

в) $\int sin^2(16x)dx$; г) $\int sin^3(12)xdx$;

в) $\int cos^4 3xdx$; г) $\int cos^5 2xdx$;

4.3.29. а) $\int cos(7x)cos(3x)dx$; б) $\int \frac{dx}{1+4cosx}$.

в) $\int cos^2(5x)dx$; г) $\int \frac{sin^3 x}{cos^2 x}dx$;

4.3.30. а) $\int cos(9x)cos(3x)dx$; б) $\int \frac{dx}{2+cosx}$.

в) $\int cos^5(2x)dx$; г) $\int sin^7 xcos^3 xdx$;

4.4. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: знайти інтеграли:

а) $\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$; б) $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+cosx}$; г) $\int\limits_{0}^{1} arcsinxdx$.

Розв'язання:

а) $\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x-4}}=\int\limits_{-1}^{7}(3x+4)dx=\frac{1}{3}\frac{(3x+4)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{-1}^{7}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\Bigg|_{-1}^{7}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{25}-\sqrt{1}\right)=2\frac{2}{3}$;

б) $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}=\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{9-(x-2)^2}=arcsin\frac{x-2}{3}\Bigg|_{2}^{5}=arcsin1-arcsin0=\frac{\pi}{2}$;

в) скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою $t=tgx$. Знайдемо $cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ і нові межі інтегрування $t_1=0$ при $x_1=0$, та $t_2=1$ при $x_2=\frac{\pi}{2}$. Тоді:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+cosx}=\int\limits_{0}^{1}\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\qquad arctg\frac{1}{\sqrt{3}}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0=\frac{\pi}{3\sqrt{3}};$$

г) виконаємо інтегрування частинами:

$$\int\limits_{0}^{1} arcsinxdx=\left|\begin{matrix} u=arcsinx, & dv=dx \\ du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v=x\end{matrix}\right|=xarcsinx\Bigg|_{0}^{1}-\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=1\cdot arcsin1-$$

$$0\cdot arcsin0+\sqrt{1-x^2}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}-1.$$

Індивідуальне завдання

Знайти визначені інтеграли:

4.4.1. а) $\int\limits_{-2}^{3}\left(2x^3+x^2-5\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi} cos\frac{3x}{2}cos\frac{x}{2}dx$.

4.4.2. а) $\int\limits_{2}^{3}\left(4x^3+x^2+5\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi} cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{4}dx$.

4.4.3. а) $\int_{-2}^{2}(x^3+4x)dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{cos^2x}$.

4.4.4. а) $\int_{-1}^{2}(x^3+2x^2-1)dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{cos^2x}$.

4.4.5. а) $\int_{1}^{2}(2x^3+x^2-9)dx$; б) $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$.

4.4.6. а) $\int_{1}^{3}(2x^3-5x^2+9)dx$; б) $\int_{2}^{-13}\frac{dx}{\sqrt{(3-x)}}$.

4.4.7. а) $\int_{1}^{3}(x^3-5x^2+9x)dx$; б) $\int_{2}^{-13}\frac{dx}{\sqrt{(3-x)^3}}$.

4.4.8. а) $\int_{1}^{3}(x^3-5x^2+9x)dx$; б) $\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{(1+x)}}$.

4.4.9. а) $\int_{-1}^{3}(x^3-5x^2+9x)dx$; б) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+5}$.

4.4.10. а) $\int_{-1}^{3}(x^3+x^2+4x)dx$; б) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2+4x+3}$.

4.4.11. а) $\int_{1}^{2}(e^x+x^2+4x)dx$; б) $\int_{2}^{3}\frac{xdx}{x^2+1}$.

4.4.12. а) $\int_{0}^{1}\left(e^x+4x^2+\frac{1}{2}x\right)dx$; б) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$.

4.4.13. а) $\int_{1}^{4}(x^2+\sqrt{x}+4x)dx$; б) $\int_{0}^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

4.4.14. а) $\int_{1}^{9}\left(x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}+4x\right)dx$; б) $\int_{1}^{2}\frac{xdx}{x^2+5x+4}$.

4.4.15. а) $\int_{-1}^{3}\left(5x^3+\frac{1}{2}x^2+4\right)dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}sin^2xdx$.

4.4.16. а) $\int_{0}^{5}\left(\frac{1}{25}x^5+x^4+4x^2\right)dx$; б) $\int_{4}^{9}\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x}+1}$.

4.4.17. а) $\int_{-2}^{-1}(x^2-7x+2)dx$; б) $\int_{0}^{2}\frac{x+3}{x^2+4}dx$.

4.4.18. а) $\int_{1}^{4}(4x+2\sqrt{x}+\frac{3}{x})dx$; б) $\int_{0}^{\pi}sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}dx$.

4.4.19. а) $\int_{1}^{25}2x^2+12\sqrt{x}+x)dx$; б) $\int_{-0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

4.4.20. а) $\int\limits_{1}^{27} \left(2\sqrt[3]{x^2} - 7x + 2\right)dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+cosx}$.

4.4.21. а) $\int\limits_{1}^{27} (\sqrt[3]{x} + 4 + \frac{5}{x})dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} xe^{x} dx$.

4.4.22. а) $\int\limits_{1}^{125} (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{125}x^5 - 2x)dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cosx - cos^3x}dx$.

4.4.23. а) $\int\limits_{1}^{64} (\sqrt[4]{x} - \frac{1}{64}x^4 - 2)dx$; б) $\int\limits_{1}^{2} x\ln xdx$.

4.4.24. а) $\int\limits_{1}^{25} (10x - \sqrt{x} + \frac{3}{x})dx$; б) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$.

4.4.25. а) $\int\limits_{1}^{9} (4\sqrt{x} + 2x + \frac{1}{x})dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx$.

4.4.26. а) $\int\limits_{1}^{4} (\frac{1}{4}x^4 - 5\sqrt{x} - x)dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} x^2e^{-2x}dx$.

4.4.27. а) $\int\limits_{1}^{8} (2x + \frac{1}{7}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}x^2)dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} xcosxdx$.

4.4.28. а) $\int\limits_{1}^{9} (x^2 + \sqrt[3]{3x} + \frac{4}{\sqrt{x}})dx$; б) $\int\limits_{1}^{2} x\ln\left(x+1\right)dx$.

4.4.29. а) $\int\limits_{1}^{8} (x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2x)dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - 1\right)sin2xdx$.

4.4.30. а) $\int\limits_{1}^{16} (\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{x})dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

4.5. Геометричне застосування визначеного інтеграла

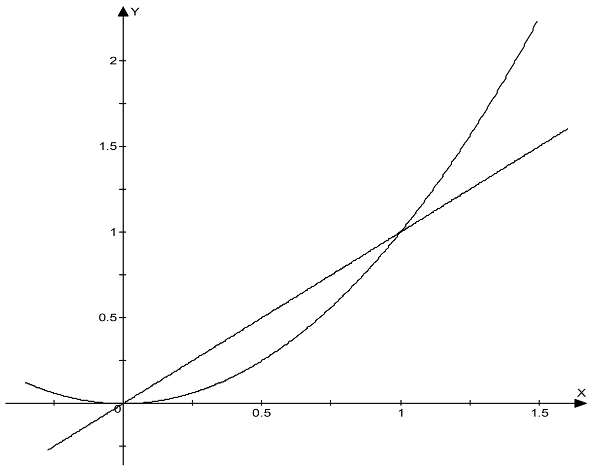
ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: за допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями $y = x^2,\ \ y = x$. Зобразити фігуру в системі координат.

Розв'язання:

Побудуємо фігуру, площу якої необхідно знайти, та визначимо площу обмеженої кривими фігури. Точки перетину кривих $x = 0$ та $x = 1$, тому межі інтегрування: від 0 до 1:

$$S = \int\limits_{0}^{1} xdx - \int\limits_{0}^{1} x^2dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(кв.од.)$$



Індивідуальне завдання

Обчислити площу фігур, що обмежені лініями. Зробити малюнки:

4.5.1. $y=1-x^2$; $y=x^2-7$.

4.5.2. $4y=x^2$; $y^2=4x$.

4.5.3. $y=x^2+4x$; $y=x+4$.

4.5.4. $y=e^x$; $y=e^{-x}$; $x=1$.

4.5.5. $y=9-x^2$; $y=2x+1$.

4.5.6. $y=x^2$; $y=2-x^2$.

4.5.7. $y=x^2$; $y=2-x$.

4.5.8. $xy=9$; $y=6$; $x=0$; $y=0$.

4.5.9. $y^2=x$; $y=x-6$.

4.5.10. $xy=4$; $x=1$; $x=0$; $y=0$.

4.5.11. $y=-x^2$; $x+y+2=0$.

4.5.12. $y=x^2$; $y=8-x^2$.

4.5.13. $y=-x^2$; $y=5x^2-6$.

4.5.14. $xy=3$; $x+y=4$.

4.5.15. $y^2=2x^2$; $y=x$.

4.5.16. $y=x^2$; $x=y^2$.

4.5.17. $y^2=2x+1$; $x=1$.

4.5.18. $y^2=1-x$; $x=-3$.

4.5.19. $y^2=2x+1$; $x-y=7$.

4.5.20. $y=x^2-4$; $x=5$.

4.5.21. $y=3x^2-6x$; $x=0$; $x=4$.

4.5.22. $x^2-3y=4$; $x^2+y=8$.

4.5.23. $y=x^2+3$; $y=2x$.

4.5.24. $y=2x^2$; $y=x$.

4.5.25. $y=x^2-4$; $y=3x$.

4.5.26. $y=-x^2+4$; $y=3x$.

4.5.26. $y=x^2-4x$; $y=-3$.

4.5.26. $y=x^2-4x$; $y=5$.

4.5.27. $y=-x^2+4x$; $y=-5$.

4.5.28. $y=-x^2+4x$; $y=3$.

4.5.29. $y=x^2-2$; $y=x$.

4.5.30. $xy=4$; $x+y=5$.

4.6. Рівняння з відокремлюваними змінними

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Розв’язати диференціальні рівняння:

а) $xdx+ydy=0$; б) $\sqrt{x}y'=y^2x^3$.

Розв’язання:

а) $xdx+ydy=0$.

В заданому рівнянні змінні відокремлені. Інтегруючи обидві частини рівняння одержимо: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=\frac{C}{2}$, або $x^2+y^2=C$ – загальний розв’язок рівняння.

б) $\sqrt{x}y'=y^2x^3$.

Так як $y'=\frac{dx}{dy}$, то рівняння набуватиме виду: $\sqrt{x}\frac{dx}{dy}=y^2x^3$.

Відокремимо змінні, помноживши ліву та праву частину виразу на $\frac{dy}{x^3}$, тобто:

$$\frac{\sqrt{x}}{x^3}dx=y^2dy,$$

Дане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними: $x^{-\frac{5}{2}}dx=y^2dy$. Інтегруючи обидві частини рівняння одержимо:

$$\int x^{-\frac{5}{2}}dx=\int y^2dy,$$

$$\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}+C=\frac{y^3}{3}\Rightarrow y=\sqrt[3]{C-\frac{2}{x\sqrt{x}}}$$ – загальний розв’язок рівняння.

Індивідуальне завдання

Знайти загальний розв’язок диференціальних рівнянь:

4.6.1. $y'=\sqrt[3]{x^5y^2}$; **4.6.2.** $y'=y\sqrt[5]{x^3y^2}$; **4.6.3.** $y'=\sqrt[7]{x^5y^2}$;

4.6.4. $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}$; **4.6.5.** $\sqrt[3]{x}y'=y^2$; **4.6.6.** $y'=\sqrt[3]{x^5y^2}$;

4.6.7. $y'=y\sqrt[3]{xy^2}$; **4.6.8.** $y'=y\sqrt[4]{xy}$; **4.6.9.** $y'=e^{x+y}$;

4.6.10. $\sqrt{xy}y'=y^2$; **4.6.11.** $y'=y\sqrt[4]{x^3y}$; **4.6.12.** $\sqrt[3]{x}y'=\sqrt[4]{y}x$;

4.6.13. $xy'=\sqrt[3]{x^5y^2}$; **4.6.14.** $y'=y\sqrt[5]{x^3y^2}$; **4.6.15.** $xy'=\sqrt[7]{x^5y^2}$;

4.6.16. $\frac{dx}{x^3}=\frac{dy}{y^3}$; **4.6.17.** $\sqrt[4]{x}y'=y^2$; **4.6.18.** $xy'=\sqrt[3]{x^5y^2}$;

4.6.19. $xy'=y\sqrt[3]{xy^2}$; **4.6.20.** $xy'=y\sqrt[4]{xy}$; **4.6.21.** $xy'=e^{x+y}$;

4.6.22. $\sqrt{xy}y'=xy^2$; **4.6.23.** $xy'=y\sqrt[4]{x^3y}$; **4.6.24.** $\sqrt[3]{x}y'=\sqrt[4]{y}$;

4.6.25. $\sqrt{x}y'=y^2$; **4.6.26.** $y'=\sqrt[4]{x^3y}$; **4.6.27.** $y'=\sqrt[4]{y}x$;

4.6.28. $y'=\sqrt[3]{x^4y^2}$; **4.6.29.** $y'=y\sqrt[5]{x^3}$; **4.6.30.** $y'=\sqrt[7]{x^5y}$;

4.7. Однорідні диференційні рівняння

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = \frac{y}{x} + tgx$.

Розв'язання:

Дане рівняння є однорідним, тому скористаємося заміною $y = xu$, тоді похідна $y' = u + xu'$. Підставимо покладену заміну у задане рівняння:

$u + xu' = \frac{xu}{x} + tg\frac{xu}{x}$, або $u + xu' = u + tgu$;

$ctgudu = \frac{dx}{x}$ – рівняння є диференційним з відокремлюваними змінними.

Інтегруючи обидві частини рівняння одержимо:

$\ln|sinu| = \ln|x| + \ln C$;

$\ln|sinu| = \ln|Cx|$;

$sinu = Cx \Rightarrow u = arcsin(Cx)$.

Так як $y = xu$, то $y = xarcsin(Cx)$ – загальний розв'язок рівняння.

Індивідуальне завдання

Розв'язати диференціальні рівняння:

4.7.1. $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$.

4.7.2. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

4.7.3. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

4.7.4. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

4.7.5. $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

4.7.6. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

4.7.7. $xdx - ydy = ydy$.

4.7.8. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.

4.7.9. $y - 2xy' = y$.

4.7.10. $\left(x^2 + xy + y^2\right)dx = x^2 dy$.

4.7.11. $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

4.7.12. $y' = \frac{y+x}{x}$.

4.7.13. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$.

4.7.14. $ydx + 2\left(\sqrt{xy} - x\right)dy$.

4.7.15. $\left(xy' - y\right)arctg\frac{y}{x} = x$.

4.7.16. $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = xdy$.

4.7.17. $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

4.7.18. $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$.

4.7.19. $xy' - y = x\cos\frac{y}{x}$.

4.7.20. $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2 dy = 0$.

4.7.21. $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'$.

4.7.22. $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4$.

4.7.23. $\left(xy' - y\right)ctg\frac{y}{x} = x$.

4.7.24. $\left(y + \sin\frac{2y}{x}\right)dx - xdy = 0$.

4.7.25. $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$.

4.7.26. $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$.

4.7.27. $xy' - y = xctg\frac{y}{x}$.

4.7.28. $ydx + 4\left(\sqrt{xy} - x\right)dy$.

4.7.29. $\left(xy' - y\right)arcctg\frac{y}{x} = x$.

4.7.29. $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = xdy$.

4.8. Лінійні диференційні рівняння

ПРАКТИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

П р и к л а д: Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = 2y + x$.

Розв'язання:

Дане рівняння є лінійним, так як y і y' у однаковому степені (першому). Тому скористаємося заміною $y = uv$ і $y' = u'v + uv'$. Тоді:

$u'v + uv' = 2uv + x$,

$v\left(u' + 2u\right) = x - uv'$,

$$\begin{cases} u' + 2u + 0, \\ x - uv' = 0, \end{cases}$$

Розв'яжемо окремо перше рівняння системи:

$u' + 2u = 0$,

$\frac{du}{dx} + 2u = 0, \quad \Big| \cdot \frac{dx}{u}$,

$\frac{du}{u} + 2dx = 0$,

$\int \frac{du}{u} + 2\int dx = 0$,

$\ln u + 2x = 0 \Rightarrow u = e^{-2x}$.

Отриманий вираз підставимо в друге рівняння системи:

$x - uv' = 0 \Rightarrow x - e^{-2x}v' = 0$,

$x - e^{-2x} \cdot \frac{dv}{dx} = 0, \quad \Big| \cdot \frac{dx}{e^{-2x}}$,

$xe^{2x}dx - dv = 0$,

$\int xe^{2x}dx - \int dv = 0$.

Обчислимо частинами перший інтеграл:

$$\int xe^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & \dfrac{e^{2x}}{2} = v \end{matrix} \right| = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^2 x}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

Тоді, $\dfrac{xe^{2x}}{2} - \dfrac{e^{2x}}{4} + C = v$.

З поставленої умови: $y = uv = e^{-2x}(\dfrac{xe^{2x}}{2} - \dfrac{e^{2x}}{4} + C) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{C}{e^{2x}}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Індивідуальне завдання

Розв'язати диференціальні рівняння:

4.8.1. $2y = x(xy' - 1)\ln x$;

4.8.2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

4.8.3. $xy' = y\ln y$;

4.8.4. $xy' - 2y = 2x^4$;

4.8.5. $(xy + e^x)dy = xdy$;

4.8.6. $y' + y = x$;

4.8.7. $x^2 y' + xy + 1 = 0$;

4.8.8. $y = x(y' - xcosx)$;

4.8.9. $y' - y = e^x$;

4.8.10. $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$;

4.8.11. $y' - \dfrac{1}{x}y = x\ln x$;

4.8.12. $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$;

4.8.13. $y' + 2y = e^{2x}$;

4.8.14. $y' - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{1 - \sin^2 x}$;

4.8.15. $xy' + y = xe^{x^2}$;

4.8.16. $2y = x(xy' - 1)\ln x$;

4.8.17. $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

4.8.18. $y' = -3y = e^{-2x}$;

4.8.19. $y = x(y' - xcosx)$;

4.8.20. $2xy' - y = -x$;

4.8.21. $y' + 2y = e^{2x}$;

4.8.22. $2y = x(xy' - 1)\ln x$;

4.8.23. $xy' = y\ln y$;

4.8.24. $y' + 3x = xe^{-3x}$;

4.8.25. $(xy + e^x)dy = xdy$;

4.8.26. $2y = x(xy' - 1)\ln x$;

4.8.27. $y' - y = e^{-x}$;

4.8.28. $xy' - 2y = 2x^4$;

4.8.29. $y' - y = e^{-x}$;

4.8.30. $2xy' - y = -x$;

ДОДАТКИ

Таблиця 1

Основні правила диференціювання

функція	похідна
$y = c \cdot u$	$y' = c \cdot u'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

Основні формули диференціювання

№	функція	похідна	№	функція	похідна
1.	$y = C(const)$	$y' = 0$	2.	$y = x$	$y' = 1$
3.	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	4.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5.	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	6.	$y = e^x$	$y' = e^x$
7.	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	8.	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
9.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	10.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
11.	$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	12.	$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13.	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14.	$y = arccosx$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15.	$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	16.	$y = arcctgx$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Таблиця 2

Таблиця невизначених інтегралів

1.	$\int dx = x + C$	2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ (n \neq -1)$
3.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5.	$\int e^x dx = e^x + C$	6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
7.	$\int \cos x dx = \sin x + C$	8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	10.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\ \frac{x}{a} + C$
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a - x^2}} = \arcsin\ \frac{x}{a} + C$	12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\| v + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C$
13.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C$	14.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + C$

Правила інтегрування

$\int (u + v + w) dx = \int u dx + \int v dx + \int w dx$
$\int u dv = uv + \int v du$
$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$
$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx + b)$

Список рекомендованої літератури

1. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. − Біла Церква. – 2005 – 280 с.

2. Мельниченко О.П. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. / О.П. Мельниченко − Біла Церква.– 2011.– с.

3. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. / Р.Л. Шевченко, О.П. Мельниченко, В.А. Непочатенко − Біла Церква. – 2015 – 280 с.

2. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика, ч. І. − К., 2001.

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. − М.: Физ-матгиз, 1959.

4. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. − М.: Физ-матгиз, 1963.

5. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. − К., 1999.

6. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. − М.: Физ-матгиз, 1972.

7. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. − М.: Наука, 1986.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Вища математика

Збірник завдань для виконання індивідуальних робіт та методичні рекомендації для їх виконання для студентів денної форми навчання економічних спеціальностей

Мельниченко Олена Петрівна

Редактор

Комп'ютерна верстка

Здано до складання 20.12.2017. Підписано до друку
Формат Умовних аркушів Тираж 100. Зам. РВУКВ, Оперативний сектор поліграфії БНАУ 09117, Біла Церква, Соборна пл., 8, тел. 33-11-01.