ДРОЗДЕНКО В.О.

МЕТОДИ ПІДРАХУНКУ ВАРТОСТІ СТРАХОВИХ КОНТРАКТІВ ПРИ ВІДОМИХ РОЗПОДІЛАХ ЗБИТКІВ

навчально-методичний посібник
з актуарної математики

За загальною редакцією
доктора фіз.-мат. наук, професора
Працьовитого М.В.

НПУ імені М.П. Драгоманова
Київ – 2017

УДК 519.676(075.8)+330.133.7(075.8)
ББК 22.192.9я73+65в641я73
Д 75

Затверджено до друку вченою радою
фізико-математичного факультету НПУ імені М.П. Драгоманова
(протокола № 4 від 23 грудня 2015 року)

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, професор Станжицький О.М.,
зав. каф. загальної математики, Нац. ун-т ім. Т.Г. Шевченка;

кандидат фіз.-мат. наук, професор Гончаренко Я.В.,
фіз-мат. ін-т, НПУ ім. М.П. Драгоманова.

Дрозденко В.О. Методи підрахунку вартості страхових контрактів при відомих розподілах збитків. — Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2017. — vi + 144 с.

Навчальний посібник присвячений аналізу найбільш популярних методів підрахунку вартості страхових контрактів при відомих розподілах збитків відштовхуючись від окремо обраного клієнта страхової компанії, який має певний набір особових характеристик.

В роботі здійснено опис та проведено класифікацію методів/ принципів страхового оцінювання при відомих розподілах збитків. Для кожного з описаних принципів здійснено перевірку ряду бажаних властивостей, якими може володіти або не володіти окремо обраний метод підрахунку вартості страхових контрактів. Для параметричних методів здійснено перевірку властивості монотонності та досліджено граничну поведінку для допустимих значень параметрів. Для методів означених з використанням гладких допоміжних функцій сформульовано та доведено серію характеризаційних теорем, що описують необхідні та достатні умови володіння ними ряду бажаних властивостей.

Розглянуто приклади підрахунків для контрактів з можливістю випадкової появи страхової події для деяких дискретних і неперервних розподілів збитків та представлено таблиці числових ілюстрацій.

Посібник розрахований, в першу чергу, для магістрантів спеціальності "Фінансова математика а також працівників освітніх установ, студентів і аспірантів, які цікавляться питаннями актуарної математики, та фінансистів-практиків, які використовують у своїй діяльності механізми страхового захисту.

Зміст

Вступ

Страхування є важливою складовою нашого повсякденного життя. Фізичні та юридичні особи купують поліси страхування життя, страхування автотранспорту, страхування споруд та приміщень, тощо, у випадках, коли вони погоджуються платити відносно малу фіксовану ціну за захист від випадкових досить значних фінансових та матеріальних втрат, спричинених природними факторами, а також діями третіх осіб.

Деякі форми страхування відомі ще з античних часів. До них слід віднести випадки взаємодопомоги при використанні ресурсів усієї громади для підтримки окремих постраждалих осіб. Так, скажімо, селяни могли допомогти односельцю відновити поголів'я померлої внаслідок хвороб худоби, розраховуючи при цьому на подібну допомогу, у випадках, коли вони теж її потребуватимуть.

Історично першою страховою компанією вважається лондонська кав'ярня, власником якої був Edward Lloyd. Кав'ярню відвідували заможні купці та кораблевласники, які з 1688-го року почали підписувати в ній договори взаємодопомоги на випадок втрати торгових кораблів. Так виникла нині добре відома страхова компанія Lloyd's of London.

Страховий бізнес — це бізнес, що базується на невизначеності майбутнього. Організація такого бізнесу вимагає серйозних математичних знань та навиків. Частина математики, що слугує таким цілям, називається актуарною математикою. 1693-й рік можна вважати роком народження актуарної математики як наукової дисципліни. Саме в цьому році англійський вчений Edmond Halley (той самий, в честь кого названа комета Галея) створив першу в історії таблицю смертності і тим самим заклав основу розвитку теорії страхування життя.

В дев'ятнадцятому столітті в царській Росії виникло досить багато страхових товариств. Разом із цим з'явилися вчені–математики, які на науковому рівні займалися питаннями страхування і розв'язуванням економічних та демографічних задач. Серед таких вчених варто згадати С.Є. Савіча, А.А. Маркова, Є.Є. Слуцького, Д.О. Граве, М.В. Остроградського та В.Я. Буняковського.

Не дивлячись на досить вдалий старт, актуарні моделі були повністтю позбавлені наукової уваги та майже не розвивалися в нашій країні протягом радянського періоду. Це було зумовлено, зокрема, ідеологією країни та державною монополією на страховому ринку. Ситуація почала змінюватися лише після розпаду радянської системи та з появою приватних і акціонерних страхових компаній. Зрозуміло, що за таких обставин вітчизняні актуарна наука та освіта дуже відстали від західних. Варто згадати, що мабуть перший україномовний підручник, див. [10], один із розділів якого присвячений актуарній математиці, з'явився лише в 1995-му році.

Ситуація значно покращилася завдяки проведенню цілого ряду українсько–скандинавських конференцій з актуарної математики та математичної економіки протягом останніх двох десятиліть. Завдяки цьому, в Україні з'явилося досить багато математиків, які на науковому рівні почали займатися колективними моделями страхування, як то класична модель ризику та її численні узагальнення.

Колективні моделі ризику описують діяльність страхових компаній при одночасному розгляді тисяч контрактів. При цьому, як правило, досліджуються питання, пов'язані з ймовірністю банкрутства страхової компанії.

На відміну від колективних, індивідуальні моделі аналізують діяльність страхової компанії, відштовхуючись від конкретного клієнта. Використовуючи індивідуальні моделі, встановлюють, зокрема, вартість страхового контракту для клієнта із певним набором особистих характеристик. Тобто, з точки зору практичних застосувань, індивідуальні моделі ризику є не менш важливі, ніж колективні, проте до цього часу українські математики приділяли їм досить мало наукової уваги.

Навчальний посібник містить в собі практичну складову. Його матеріали можуть використовуватися співробітниками страхових, банківських, інвестиційних та пенсійних установ при застосуванні механізмів страхового захисту. Матеріали посібника також можуть бути включені до фінансово–математичних освітніх програм підготовки актуаріїв та фінансових аналітиків.

Навчальний посібник складається зі вступу, чотирьох розділів, трьох додатків, та списку використаних джерел.

У **першому розділі** проведено оглядовий аналіз доступної вітчизняної та зарубіжної літератури з математики страхування.

У першій частині **другого розділу** здійснено аналіз колективних моделей діяльності страхової компанії таких як класична модель ризику та її узагальнення. Крім класичної моделі описується збурена модель ризику, модель Спаре Андерсена, модель із випадковими преміями, дискретні моделі, а також подані посилання на літературу, де можна знайти інформацію про інші колективні моделі ризику.

У другій частині **другого розділу** проводиться опис можливих методів підрахунку вартості страхових контрактів у випадку відомих розподілів збитків, а також здійснена їх класифікація у залежності від природи контрактів: найпростіші, параметричні, означені з використанням допоміжних функцій. Для параметричних методів здійснено аналіз властивості монотонності та досліджено асимптотичну поведінку описаних методів для допустимих значень параметрів.

У першій частині **третього розділу** проводиться аналіз бажаних властивостей, якими можуть володіти або не володіти принципи підрахунку вартості страхових контрактів, означені в другій частині другого розділу монографії. Серед таких бажаних властивостей вивчаються властивість відсутності необґрунтованої надбавки на ризик, властивість невід'ємності страхової надбавки, властивість адитивності, властивість мультиплікативної інваріантності, властивість консистентності, властивість відсутності грабування та властивість ітеративності. Тут також подана інтерпретація вказаних властивостей з точки зору споживача (страховика, клієнта).

У другій частині **третього розділу** представлено характеризаційні теореми, що стосуються властивостей адитивності, консистентності, ітеративності та мультиплікативної інваріантності для наступних принципів підрахунку вартості страхових контрактів: принципу середнього значення, принципу еквівалентної/нульової корисності страховика та принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта. Показано також, що у випадку звуження принципу середнього значення та принципу нульової корисності клієнта до оцінювання вартості лише строго позитивних ризиків, класи допоміжних функцій, які породжують мультиплікативно–інваріантні премії, є ширшими ніж у загальному випадку.

В третій частині **третього розділу** представлені результати перевірки бажаних властивостей у вигляді сумарної таблиці властивостей.

В четвертій частині **третього розділу** представлена методика оптимізації вартості страхових контрактів шляхом залучення декількох страхових компаній на прикладі експоненційного принципу страхового оцінювання.

У **четвертому розділі** наведені приклади обчислення премій, означених у другому розділі навчального посібника, для контрактів із можливістю випадкової появи страхової події при деяких дискретних та неперервних розподілах виплат.

У **додатку A** наводяться нерівності, які використовуються при доведенні тверджень представлених у посібнику, а саме, нерівність Єнсена, нерівність Ляпунова та нерівність Гельдера. Відповідні твердження сформульовані у вигляді теорем та двох лем, котрі використовуються, зокрема при доведенні характеризаційних тверджень, що стосуються властивостей котрими володіють методи підрахунку вартості страхових контрактів означені з використанням допоміжних функцій.

У **додатку B** представлено власноруч розроблене в середовищі MatLab GUI пілотне програмне забезпечення "Premium Calculator" для аналізу вартості страхових контрактів. Програмне забезпечення розроблене з використанням явних формул оцінювання вартості страхових контрактів для деяких дискретних та неперервних розподілів виплат, представлених в четвертому розділі посібника.

У **додатку C**, використавши програмне забезпечення, представлене в додатку B, наведені числові ілюстрації вартості страхових контрактів з можливістю випадкової появи страхової події у випадках наступних розподілів виплат: виродженого; експоненційного; гіперекспоненційного; рівномірного; зсунутого нормованого пуасонівського.

Розділ 1

Огляд літератури з математики страхування

В даному розділі навчального посібника здійснюється оглядовий аналіз доступної вітчизняної та зарубіжної літератури з математики страхування.

Почнемо з праць незаслужено призабутого фундатора вітчизняної актуарної науки Сергія Савіча, який був не лише провідним вітчизняним експертом, а й добре відомим на міжнародному рівні. Говорять, що Сергій Савіч був одним з ініціаторів заснування, створеної в 1895-му році нині добре відомої міжнародної організації, що має назву International Actuarial Association, яка була створена для розвитку співпраці та обміну досвідом між місцевими актуарними організаціями різних країн. На запит вітчизняних науковців до Міжнародної актуарної асоціації була надіслана наступна інформація стосовно співпраці Сергія Савіча з даною організацією: Сергій Савіч був віце–президентом першого Міжнародного конгресу актуаріїв (Брюссель, 1895-й рік), де пропагував ідею створення Міжнародної актуарної асоціації; був віце–президентом другого Міжнародного конгресу актуаріїв (Лондон, 1898-й рік), де виступав з доповідями "Про обчислення викупної вартості" та "Пенсійні установи в Росії"; віце–президентом третього Міжнародного конгресу актуаріїв (Париж, 1900-й рік), де виступив з доповіддю "Бібліографічна довідка з теорії страхування в Росії"; віце–президентом четвертого Міжнародного конгресу актуаріїв (Нью–Йорк, 1903-й рік); учасником п'ятого (Берлін, 1906-й рік) та шостого (Відень, 1909-й рік) Міжнародних конгресів актуаріїв; віце–президентом сьомого Міжнародного конгресу актуаріїв (Амстердам, 1912-й рік), де виступив із доповіддю "Перестрахування в страхуванні життя"; був відповідальним організатором чергового Міжнародного конгресу актуаріїв (Санкт–Петербург, 1915-й рік), прикрим фактом історії є те, що конгрес в Санкт–Петербурзі був відмінений через Першу світову війну; був учасником восьмого Міжнародного конгресу актуаріїв (Лондон, 1927-й рік), його прізвище фігурує в списку учасників від Франції.

Савіч С.Є. був також яскравою фігурою на вітчизняній арені. Він, зокрема, вів активну педагогічну роботу: протягом декількох років читав "Вищу геометрію" та "Теорію функції комплексної змінної" в Санкт–Петербурзькому університеті; був професором Санкт–Петербурзького електротехнічного інституту та професором Вищих жіночих Бестужівських курсів. Савіч С.Є. був серед організаторів створеного в 1908-му році в Петербурзі товариства страхових знань, яке містило в собі чотири секції: медичну, юридичну, техніко-економічну та математичну. Протягом багатьох років, до революції 1917-го року, та деякий час після революції Савіч С.Є. був незмінним членом Страхового комітету при Міністерстві внутрішніх справ, який здійснював страховий нагляд в Російській імперії. Згодом, після революції 1917-го року Савіч С.Є., як і багато інших талановитих людей того часу, був вимушений покинути Росію та емігрував до Франції.

В 1900-му році Савіч С.Є. публікує свою книгу "ru: Элементарная теория страхования жизни и трудоспособности", див. [13], котра була написана з використанням стандартних позначень теорії страхування життя; згадані стандарти були узгоджені і загальноприйняті на другому Міжнародному конгресі актуаріїв в 1898-му році (тобто, за два роки до опублікування книги), з тих пір не змінювалися і активно використовуються в наш час. Хоч документальних підтверджень цьому, мабуть, не існує, проте згадана книга Савіча С.Є., можливо, є першою в світі книжкою, яка написана з використанням стандартизованих позначень теорії страхування життя.

З метою ознайомлення, наведемо без перекладу інформацію стосовно Сергія Савіча з енциклопедії Брокгауза та Єфрона.

> **Сергей Евгеньевич Савич** родился в 1864 году. Среднее образование получил в 1-й Военной гимназии (1-й Кадетский корпус), а высшее — на математическом отделении физико-математического факультета Санкт–Петербургского университета, где окончил курс в 1886-м году. Несколько лет спустя, защитив диссертацию "О линейных обыкновенных дифференциальных уравнениях с правильными интегралами" на степень магистра чистой математики, начал чтение лекций в университете в качестве приват-доцента, а затем преподавание математики в некоторых высших технических учебных заведениях; в то же время, по поручению различных правительственных учреждений, принимал участие в составлении уставов о поверке расщётов по оборотам страховых обществ, эмеритальных и других пенсионных касс. Кроме диссертации, Савич напечатал несколько заметок по математике и теории страхования жизни в издававшемся одно время студентами математическом журнале (1885-1886), в "Журнале министерства народного просвещения", в "Сборнике института инженеров путей сообщения", в "Bulletin de l'Institut des actuaires francais", в "Трудах I-го и II-го Международных конгрессов актуариев" и других.

Рис. 1.1: В.Я. Буняковський

Праці Савіча не забуті і сьогодні. Так, скажімо, в доповіді Гунара Бенктандера (sw: Gunnar Benktander) на 19-му Міжнародному конгресі актуаріїв (Осло, 1972-й рік) "Частота страхових випадків та страхова премія як функція розміру ризику", яка була присвячена тарифікації при страхуванні від пожеж, було сказано наступне: "Російський професор Сергій Савіч був першим, хто проводив дослідження в цій галузі. Він займався цим у Санкт–Петербурзі ще у 1907-му році. Результати своїх досліджень стосовно цього питання він опублікував у статті *Der Einfluss der Dimensionen des Feuerrisikos auf den Pramiensatz*, яку розмістив у журналі *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft*".

Значний внесок до популяризації актуарних моделей був здійснений також київським професором Дмитром Граве, котрий опублікував три підручники з математики страхування, див. [3], [4], [5].

Іншим київським професором, котрий багато зробив для розвитку та популяризації математичних моделей економіки, був Євген Слуцький. Серед праць Слуцького Є.Є. варто виділити неопубліковану монографію [14] "ru: Теория предельной полезности", котра й досі зберігається у відділі рукописів Національної наукової бібліотеки України ім. В.І. Вернадського.

Книга добре відомого російського математика Андрія Маркова “ru: Исчисление вероятностей”, див. [11], містить главу, що має назку “ru: О страховании жизни”.

Двоє добре відомих українських математиків, а саме, Михайло Остроградський (народився на Полтавщині) та Віктор Буняковський (фото 1.1) (народився на Поділлі) працювали з демографічними моделями вже в 19-му столітті. Остроградський М.О, відомий в першу чергу завдяки своїм фундаментальним працям з теорії інтегрування, в 1847-му році опублікував роботу “ru: О страховании”. Буняковський В.Я. вважається засновником демографічної науки в Російській імперії. Він проводив демографічні дослідження задовго до проведення першого перепису населення в країні. Більш того, як показали дані першого перепису, оцінки Буняковського були досить точними та правдивими. Віктор Буняковський є автором першого російськомовного підручника з теорії ймовірностей, див. [2], один із розділів згаданого підручника стосується саме демографії.

Завершуючи огляд раннього етапу розвитку вітчизняної актуарної науки, наведемо, без перекладу, досить ілюстративне оголошення про створення в дореволюційній Росії товариства страхових знань, яке було опубліковане в журналі “ru: Страховое обозрение” в червні 1908-го року.

> Милостивые государи!
>
> У нижеподписавшихся возникла мысль об учреждении в Санкт–Петербурге общества страховых знаний.
>
> К этой мысли привели их нижеследующие соображения. Расцвет страхования в новейшее время вызван потребностями современной экономической действительности, а также политикой некоторых европейских держав в области рабочего вопроса. Благодетельность страхования ныне общепризнана, круг лиц, стремящихся к той или иний форме его, все расширяется, и ежедневно возникают весьма сложные вопросы в области техники страхования. Теоретическая разработка математических основ страхования является ныне насущной необходимостью, причём многообразие и трудность возникающих вопросов требуют сотрудничества большого круга лиц.
>
> Естественно далее, что развитие страхования возможно лишь при правильной оценке его с экономической точки зрения и при целесообразном страховом законодательстве. Изучение страхования как экономического явления, выяснение задач и пределов деятельности законодателя, постановка контроля и обложения страхования и изучение всех связанных с этим юридических вопросов в области частного и административного права — все эти задачи составляют лишь часть работы современного исследователя страхования. Страхование жизни и трудоспособности тесно связано с медициной, а страхование вещное — с техникой. Анализ того, что уже создано, творческая критика данных условий страхового дела могут успешно вестись отдельными исследователями лишь совместно.
>
> Но расцвет страхования ставит еще и другие задачи. Широкое распространение идеи страхования в литературу и живым словом необходимо для каждой страны; надлежащая подготовка работников страховой профессии необходима для успеха страхового дела. Как выполнить эти задачи без всестороннего освещения вопроса всеми, кто может уяснить его своими теоретическими познаниями или опытом?
>
> Намеченные только что задачи должны одновременно разрабатывать теоретик и практик: теория и опыт должны взаимно пополняться. Практик

даст теоретику материал для изучения и совместно с ним выяснит цели и пути необходимых реформ страхования.

С половины XIX в., когда был основан лондонский Институт актуариев, за границей стали возникать специальные общества для изучения страхования. На международных страховых конгрессах эти общества делились со всеми результатами своей работы и тем способствовали выяснению многих вопросов страхового дела.

До сих пор в России не было такого общества. Между тем рост страхования частного, предположенное государственное страхование, почти полное отсутствие страхового законодательства — все это говорит о необходимости глубокого и всестороннего изучения страхования.

Математик, экономист, юрист, врач, техник, страховой деятель — все должны объединиться для разработки вопросов страхования.

Нижеподписавшиеся считают своим долгом указать в заключении, что цель общества — чисто теоретическая работа в указанном выше направлении.

Предлагая Вам вступить в число членов Общества и препровождая утверждённый в подлежащем порядке Устав Общества нижеподписавшиеся просят Вас на прилагаемом при сём бланке сообщить, угодно ли будет Вам принять наше предложение.

Первое собрание членов общества предполагается назначить в начале июня. О времени и месте собрания будет заблаговременно сообщено отдельными повестками

Остроградский Михаил Александрович (Литейный, 30)

Белоцветов Николай Алексеевич (Гороховая, 4)

Покотилов Александр Дмитриевич (Каменноостровский, 1)

Савич Сергей Евгеньевич (Николаевская, 35)

Напечатано в журнале *Страховое обозрение*, № 6, июнь 1908 г., с. 437.

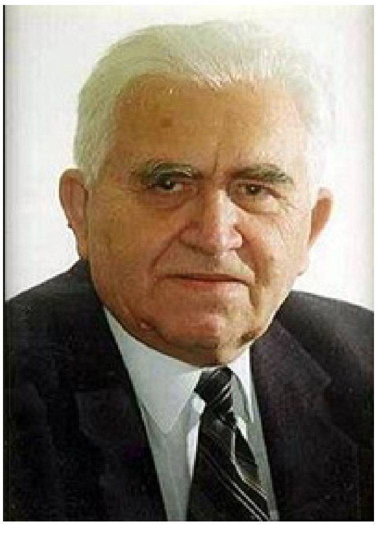

Рис. 1.2: М.Й. Ядренко

Не дивлячись на досить вдалий старт, математичні моделі страхування були позбавлені належної уваги та майже не розвивалися в нашій країні протягом радянського періоду історії. Це було зумовлено, в першу чергу, державною монополією на ринку страхування. Ситуація почала змінюватися лише на початку 90-х років із появою приватних та акціонерних страхових компаній. Позбавлення від наукового вакууму в цій галузі знань на пострадянському просторі почалося, мабуть, з праць Фалин Г.І. і Фалин А.І. [17] та Фалин Г.І. [15]. Пізніше з'явилася книга Фалин Г.І. [16]. Мабуть, першою україномовною книгою, що мала відношення до актуарних розрахунків, був опублікований в 1995-му році підручник [10] викладачів Київського національного університету Леоненка М.М., Мішури Ю.С., Пархоменко В.М. та Ядренка М.Й. (фото 1.2). Серед інших праць науковців на пострадянському просторі, можна згадати роботи: Бенінг В.Є., Корольов В.Ю. [23]; Гусак Д.В. [6]; Гусак Д.В., Кулик О.М., Мішура Ю.С., Пилипенко А.Ю. [7] та [59]; Корольов В.Ю., Бенінг В.Є., Шоргін С.Я. [9]; Мельніков О.В. [12]; Шіряєв А.М. [102]; тощо. Варто зауважити, що добре відомі на Заході праці Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman G.C., Jones D.A., Nesbit C.J. [32], перше видання книги Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. [69] та Lemaire J. [75], [76] були перекладені на російську мову та опубліковані московським математиком Всеволодом Маліновським. Маліновський В.К. був також ініціатором перевидання вищезгаданої книжки Савіча С.Є. [13].

З метою ознайомлення з загальними принципами страхування та методами захисту від різного роду ризиків варто почитати якісні підручники, написані, в першу чергу, для економістів. На нашу думку, для такого ознайомлення добре підходить підручник Vaughan E.J. та Vaughan T. [109], а також підручник Dorfman M.S. [46]. Для ознайомлення з основами саме актуарних розрахунків, можна порадити книгу Booth P.M., Chadburn R., Cooper D., Haberman S., James D. [29] та книгу Taylor G. [106].

Огляд літератури з теорії ризику часто починають з дисертації Філіпа Лундберга (фото 1.3)(sw: Filip Lundberg), див. [78], та праць Харальда Крамера (sw: Harald Cramér), див. [38] та [39]. Ці два дослідники вважаються засновниками колективної теорії ризику.

Іншою відомою книгою, що мала значний вплив на розвиток актуарної науки, є книга Bühlmann H. [33]. Двоє з колишніх аспірантів професора Бюльмана теж написали підручники з математичної теорії ризику, а саме Gerber H.U. [52] та Straub E. [104]. Професор Gerber H.U. є також автором досить вдалого підручника з теорії страхування життя, див. [53], який був перевиданий, зокрема, російською, китайською та німецькою мовами. Gerber H.U. є співавтором ще однієї "класичної" книги, а саме, Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J. [32], котра теж здебільшого стосується теорії страхування життя. Варто згадати внесок ще одного швейцарського математика, котрий опублікував два підручники з даної тематики, а саме, Seal H.L. [98], [99].

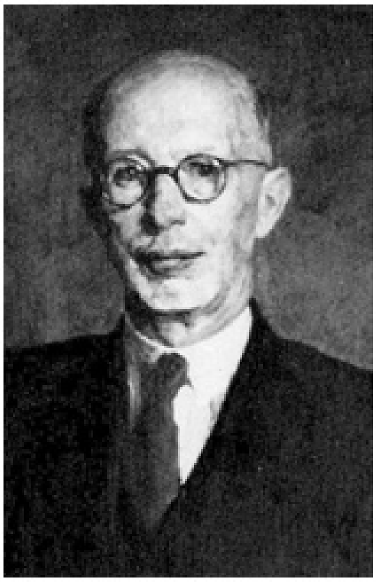

Рис. 1.3: F. Lundberg

Робота з актуарними розрахунками вимагає фундаментальних знань з теорії ймовірностей та математичної статистики, проте часто доводиться застосовувати знання з інших галузей математики. Книга de Vylder F.E. [110], мабуть, виникла як спроба описати в одному підручнику всі математичні результати, які можуть знадобитися практикуючому актуарію. Серед інших праць того ж автора варто згадати підручник з теорії страхування життя de Vylder F.E. [111]. Етьєн де Вільдер також відомий як співредактор часто цитованих матеріалів роботи актуарних конференцій de Vylder F.E., Goovaerts M., Haezendonck J. (редактори) [112], [113], опублікованих видавництвом Kluwer Academic Publishers.

Здібність описувати природні феномени у вигляді математичних моделей та інтерпретація отриманих чисельних результатів є важливою для кожного математика. Вдалим підручником з актуарної математики, який, крім іншого, спонукає до розвитку таких навиків, є підручник Daykin C.D., Pentikäinen T, Pesonen M. [40]. Тейво Пентікейнен також відомий як співавтор більш ранньої книжки, а саме, Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E. [22].

Вчені, що мають глибокі фундаментальні знання в галузі теорії ймовірностей, часто обирають підручники Grandell J. [55], [56] для ознайомлення з аспектами теорії ризику. В якості альтернативи можна відзначити монографію Rotar V.I. [93], що має "типовий радянський стиль" викладення матеріалу і досить вдало та в повному об'ємі описує досягнення світової актуарної науки. З інших подібних робіт відзначимо також роботи: Blom R. [26]; Dickson D.C.M. [44]; Heilmann W.-R. [62]; Johansson J. [66]; Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. [69]; Klugman A.S., Panjer H.H., Willmot G.E. [73]; Kremer E. [74]; Schmidt C.D. [97]; Shang H. [100]; Panjer H.H. [81]; Panjer H.H., Willmot G.E. [83].

Актуарні моделі часто представлені в літературі паралельно з моделями оцінювання вартості вторинних цінних паперів та моделями ринків акцій. Книги Chan W.-S., Tse Y.-C. [36], Lin X.S. [77] та Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. [92] описують актуарні та фінансові феномени з точки зору теорії випадкових процесів. Моделі екстремальних подій як для актуарної так і для фінансової математики добре описані в роботі Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. [47]. Підручник для студентів Mikosch T. [79] теж представляє теорію ризику з точки зору теорії випадкових процесів.

Напівмарковські процеси часто використовуються для моделювання непрацездатності та дослідження контрактів, пов'язаних зі страхуванням здоров'я. Монографії Pitacco E., Denuit M., Haberman S., Olivieri A. [85] та Haberman S., Pitacco E. [60] присвячені опису саме таких моделей. Іншою книгою присвяченою напівмарковським моделям, проте не лише для страхування, а й для фінансів та теорії надійності, є книга Janssen J. та Manca R. [65]. Книга Asmussen S. та Albrecher H. [21], крім іншого, містить багато цікавої інформації стосовно процесів ризику у марковському середовищі.

Моделі страхування життя в літературі часто представлені окремо від моделей страхування майна та контрактів іншого типу, зокрема завдяки тому, що моделі страхування життя містять припущення стосовно тривалості життя застрахованої особи. Проте, типові підходи, що використовуються при оцінюванні контрактів страхування майна, можуть використовуватися також для оцінювання вартості контрактів страхування життя, зокрема, такі підходи доцільно використовувати при груповому страхуванні людей, як то одночасному страхуванні працівників великих промислових підприємств, тощо. Серед робіт з теорії страхування життя, що раніше не згадувалися в даному огляді, безперечно заслуговують уваги наступні: Alm E., Andersson G., von Bahr B., Martin-Löf A. [19]; Andersson G. [20]; Dickson D.S.M., Hardy M.R., Waters H. [45]; Fisher H.F., Young J. [50]; Gupta A.C., Varga T. [58]; Iyer S. [64]); Møller T., Steffensen M. [80]; Promislow S.D. [91]; Wolthuis H. [115]; Zhu Y. [119].

Мабуть, найбільш популярним типом страхування (можливо, після державних контрактів пенсійного типу) є автострахування. Це пов'язано в першу чергу з тим, що таке страхування є обов'язковим у більшості країн. Особливості актуарних розрахунків для автострахування з використанням систем заохочень та покарань (en: bonus-malus systems) добре описані в роботах Boos A. [28] та Lemaire J. [75], [76].

Геометричні випадкові суми часто використовуються для дослідження об'єктів, пов'язаних із процесами ризику. Книга російськомовного автора, котрий тривалий час працював у Данії, Kalashnikov V.V. [70], демонструє методику застосування геометричних випадкових сум, проте не лише до теорії ризику, а й до теорії надійності та теорії масового обслуговування.

Важливим аспектом страхової діяльності є перестрахування, тобто, поділ відповідальності за великі групи ризиків та відповідальності при страхуванні громіздких та коштовних об'єктів між декількома страховими компаніями. Наступна література, крім іншого, містить інформацію з теорії перестрахування та створення страхових резервів: Albrecher H., Teugels J. [18]; Bühlmann H., Gisler A. [35]; Denuit M., Marechal X., Pitrebois S., Walhin J.-F. [43]; Goovaerts M.J., Kaas R., van Heerwarden A.E., Bauwelinckx T. [54]; Kaas R., van Heerwaarden A.E., Goovaerts M.J. [68]; Panjer H.H. [82]; Schmidli H. [95]; Wüthrich M.V., Bühlmann H., Furrer H. [116]; Wüthrich M.V., Merz M. [117].

З особливостями методик статистичного оцінювання для актуарних моделей можна ознайомитись у роботах: Benjamin B., Pollard J.H. [24]; Boland P.J. [27]; Borowiak D.S. [30]; Borowiak D.S., Balakrishnan N., Schucany W.R., Schilling E.G. [31]; Corazza M., Claudio P. [37]; Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R. [42]; Freeman H. [51]; de Jong P., Heller G.Z. [67]; Hogg R.U., Klugman S.A. [63]; Kleiber C., Kotz S. [71]; Klugman S.A. [72]; Tse Y.-C. [108].

Оскільки даний посібник стосується в основному принципів підрахунку страхових премій, то зупинимось коротко на огляді літератури з цих питань. Детальна інформація про нетто принцип може бути знайдена, наприклад, в роботі Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J. [32], про принцип математичного сподівання — Bühlmann H. [33] та Gerber H.U. [52], про принцип дисперсії — Berliner B. [25], про принцип середньоквадратичного відхилення — Denneberg D. [41], про принцип максимальних збитків — de Vylder F.E., Goovaerts M., Haezendonck J. [112], про експоненційний принцип — Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. [69], про принцип Есшера — Yang H. [118], про принцип відрегульований ризиком — Dickson D.C.M. [44], про квантільний принцип — de Vylder F.E. [110], про принцип Ванга — Wang S. [114], про принцип середнього значення — Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. [69], про принципи корисності — Dickson D.C.M. [44].

Серед вдалих досі не опублікованих рукописів, котрими активно обмінюються науковці, що займаються теорією ризику, варто згадати наступні: Paulsen J. [84]; Schmidli H. [96]; Sherris M. [101].

На завершення згадаємо трьохтомну енциклопедію Teugels J. та Sundt B. (редактори) [107], що оформлена у вигляді корисної підбірки незалежних статей, написаних провідними світовими експертами в цій галузі. Енциклопедія охоплює велику кількість тем та містить розгорнутий список посилань на відповідні джерела в кінці кожної статті. В якості альтернативи, можна порадити десятитомну енциклопедію з історії актуарної справи Haberman S., Sibbett T. (редактори) [61].

Розділ 2

Математичні моделі роботи страхової компанії та принципи підрахунку страхових премій

В даному розділі здійснюється оглядовий аналіз найбільш поширених колективних моделей ризику як то класична модель ризику та її узагальнення. Після чого робиться детальний аналіз індивідуальних моделей ризику, що здебільшого слугують для оцінювання вартості страхових контрактів пов'язаних із конкретно взятим клієнтом.

2.1 Класична модель ризику та її узагальнення

Діяльність сучасної страхової компанії важко собі уявити без математичного моделювання. Традиційний підхід до такого моделювання полягає у використанні так званих колективних моделей ризику. Історично першою такою моделлю була розроблена в 1903-му році шведським математиком Філіпом Лундбергом (sw: Filip Lindberg) у дисертаційній роботі [78] модель, яка сьогодні носить назву класичної моделі ризику.

Класична модель ризику задається наступним чином

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N_\lambda(t)} Z_k, \quad t \geq 0,$$

де: u — це початковий капітал страхової компанії; константа c — це інтенсивність надходження страхових внесків за одиницю часу; потік заявок на виплати моделюється пуасонівським процесом $N_\lambda(t)$, $t \geq 0$, з інтенсивністю λ; послідовність додатних випадкових величин Z_k, $k = 1, 2, \cdots$, — це послідовність заявок на виплати; процес $N_\lambda(t)$, $t \geq 0$, та послідовність Z_k, $k = 1, 2, \cdots$, є незалежними по відношенню одне до одного. Ілюстрація такого процесу ризику подана на рисунку 2.1.

Однією з ключових характеристик класичного процесу ризику з початковим капіталом u є його ймовірність банкрутства на нескінченному проміжку часу задана наступним чином

$$\psi(u) = \mathsf{P}\{\inf_{t \geq 0} U(t) < 0\}.$$

Явні формули для ймовірностей банкрутства в класичній моделі ризику, наскільки нам відомо, отримані лише у випадках сталих виплат, експоненційного розподілу виплат та виплат, що мають розподіл Ерланга з двома ступінями свободи. Тому широкого застосування отримали різного роду апроксимації ймовірностей банкрутства в

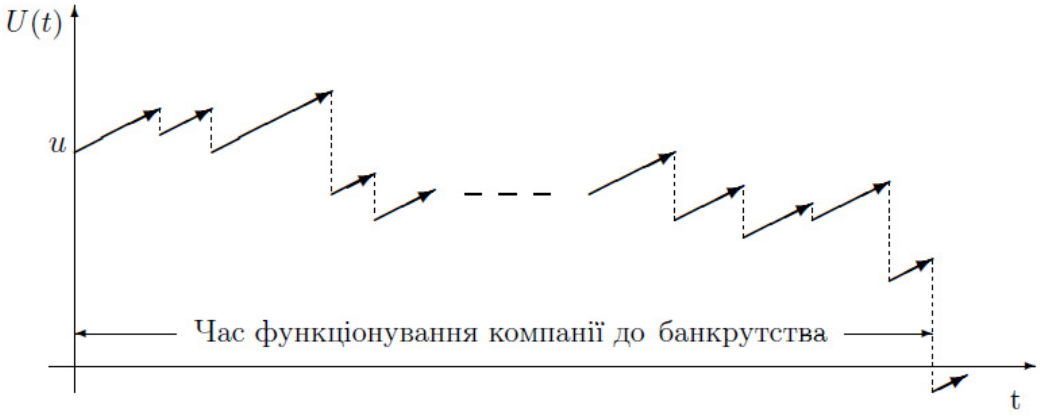

Рис. 2.1: Класичний процес ризику

класичній моделі ризику, як то апроксимація де Вільдера (be: F.E. de Vylder), апроксимація Бікмана–Бовверса (en: J.A. Beekman, N.L. Bowers), дифузійна апроксимація тощо. Більш детально про апроксимації ймовірностей банкрутства в класичній моделі ризику можна почитати, наприклад, в роботі Grandell J. [57].

Збурена модель ризику означається наступним чином

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N_\lambda(t)} Z_k + \beta W(t), \quad t \geq 0.$$

Основні елементи збуреного процесу ризику повністю повторюють класичний процес ризику, проте в даному випадку до процесу додається шумова компонента, яка моделюється за допомогою стандартного вінерівського процесу $W(t)$, $t \geq 0$, для якого приріст $W(t+h) - W(t)$, для $t, h \geq 0$, має нормальний розподіл із нульовим середнім та дисперсією h. В даному випадку параметр $\beta > 0$ задає інтенсивність збурення. Оглядовий аналіз результатів пов'язаних зі збуреним процесом ризику можна знайти, наприклад, в роботі Schmidli H. [94].

Модель Спаре Андерсена. В моделі Спаре Андерсена (en: Sparre Andersen E.), заданій наступним чином

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{R(t)} Z_k, \quad t \geq 0,$$

на відміну від класичного процесу ризику, в якому потік заявок на виплати описується процесом Пуассона $N_\lambda(t)$, $t \geq 0$, відповідний потік описується процесом відновлення $R(t)$, $t \geq 0$. Нагадаємо, що на відміну від пуасонівського процесу в якому інтервали між приростами експоненційно розподілені, інтервали між приростами процесу відновлення є незалежними та однаково розподіленими з довільним спільним розподілом. Детальний опис такої моделі ризику може бути знайдений в роботі Sparre Andersen E. [103].

Моделі з випадковим потоком премій. В класичній моделі ризику потік премій моделювався детерміновано за допомогою лінійної функції. На практиці ж потік премій також є випадковим, що й призвело до виникнення наступної моделі ризику

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{N_\gamma(t)} P_i - \sum_{j=1}^{N_\lambda(t)} Z_j, \quad t \geq 0,$$

де u — це початковий капітал компанії; потік премій моделюється пуасонівським процесом $N_\gamma(t)$, $t \geq 0$, а потік заявок на виплати — пуасонівським процесом $N_\lambda(t)$, $t \geq 0$; послідовності додатних випадкових величин P_i, $i = 1, 2, \cdots$, та Z_i, $i = 1, 2, \cdots$, відображають послідовність премій та заявок на виплати відповідно; крім того припускається, що зазначені пуасонівські процеси, а також послідовності премій та виплат є взаємно незалежними. Детальну інформацію про процеси ризику з випадковими преміями можна знайти в роботі Бойков А.В. [1].

Дискретні моделі. В дискретних моделях часова шкала, як правило, поділяється на інтервали послідовністю точок $T = \{t_1, t_2, t_3, \cdots\}$ після чого поведінка капіталу компанії аналізується в точках послідовності T. Для кожного $t_k \in T$ розглядаємо дискретний процес

$$U(t_k) = u + \sum_{i=1}^{k}(P_i - Z_i) \tag{2.1}$$

де u — це початковий капітал компанії, а P_i та Z_i це відповідно страхові премії та заявки на виплати зібрані протягом часового інтервалу $(t_{i-1}, t_i]$, крім того $t_0 = 0$. Очевидно, що

$$U(t_k) = U(t_{k-1}) + P_k - Z_k, \quad \text{для} \quad k \geq 2.$$

Інколи додаткові грошові потоки такі як дивіденди, позики, інфляція, інвестиції тощо включаються до модельного аналізу діяльності страхової компанії. У такий спосіб сумарна компонента D_i яка відображає грошові потоки відмінні від премій та заявок на виплати часто добавляється до моделі (2.1) і в цьому випадку модель набуває наступного вигляду

$$U(t_k) = u + \sum_{i=1}^{k}(P_i + D_i - Z_i).$$

Дискретні моделі ризику, зокрема ті які описують діяльність страхової компанії протягом обмеженого періоду часу, досить легко піддаються аналізу за допомогою методів Монте-Карло. Більш детально про дискретні моделі ризику можна почитати, наприклад, в роботах Bühlmann H. [33] та Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M. [40].

Інформацію про інші узагальнення класичної моделі ризику як то моделі ризику в марковському середовищі, а також моделі зі знесеннями, відображеннями, бар'єрами, стрибками, дивідендами, інвестиціями тощо можна знайти, наприклад, в роботах Гусак Д.В. [6], Леоненко М.М. та інші [10], Asmussen S., Albrecher H. [21], Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. [47] та Grandell J. [55], [56]. Більш детальну інформацію стосовно літературних джерел містить перший розділ навчального посібника.

На відміну від колективних моделей ризику, що вже досить добре відомі на пострадянському просторі, індивідуальним моделям ризику, і, зокрема, способам оцінювання вартості страхових контрактів, приділялося досить мало уваги вітчизняними науковцями. Саме таким моделям і присвячений даний посібник.

2.2 Найпростіші способи оцінювання

У цьому та наступних параграфах ми проводемо опис можливих методів підрахунку вартості страхових контрактів у випадку відомих розподілів збитків. Для параметричних методів ми здійснюємо аналіз властивості монотонності та досліджуємо асимптотичну поведінку для допустимих значень параметрів.

Для ілюстрації принципів підрахунку премій, вважатимемо, що розмір страхової компенсації, пов'язаної з певною страховою угодою, є випадковою величиною X з функцією розподілу $F_X(x)$. Здебільшого припускається, що випадкова величина X є невід'-ємною, тобто, приймає значення нуль у випадку, коли угода не призводить до страхового випадку та не потребує страхових відшкодувань, і співпадає з розміром відшкодування у разі появи страхового випадку. Від'ємні значення випадкової величини X інколи допускаються та інтерпретуються, як відшкодування, які, з певних причин, можуть надходити від клієнтів до страховиків.

Вартість страхової угоди або, іншими словами, *страхову премію*, тобто ту суму, яку клієнт, при укладанні страхової угоди, платить обраній страховій компанії для покриття ризику X, позначатимемо через $\pi[X]$.

В залежності від конкретних ситуацій, що виникають при укладанні страхових угод, страхові премії класифікуються за принципами (способами) їх підрахунку.

Опишемо найпростіші способи страхового оцінювання. Найбільш очевидним і природним принципом є нетто премія.

Нетто премія (en: net premium) означається як математичне сподівання розміру страхової виплати асоційованої з ризиком X, тобто,

$$\pi_{\text{нетто}}[X] := \mathsf{E}[X].$$

В якості аргументації для нетто премії можна використати закон великих чисел у формі Хінчина, тобто, для послідовності незалежних та однаково розподілених ризиків X_i, $i = \overline{1, +\infty}$, таких, що $\mathsf{E}[X_i] < +\infty$ та довільного $\varepsilon > 0$, виконується граничне співвідношення

$$\lim_{n \to +\infty} \mathsf{P}\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathsf{E}[X_1] \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Іншими словами, при застосуванні нетто принципу для оцінювання вартості страхових контрактів, середній розмір страхової компенсації прямуватиме за ймовірністю до математичного сподівання розміру однієї виплати при збільшенні кількості клієнтів страхової компанії.

Нетто премія — це та "справедлива" ціна, при якій розмір внесків до страхової компанії, за наявністю великої кількості клієнтів, був би "приблизно рівний" розміру виплачених страхових компенсацій. Проте, на практиці, ціна контракту завжди перевищує нетто премію, адже страхові компанії потребують кошти для створення страхових резервів, виплати заробітної плати персоналу, оренди приміщень, сплати податків тощо.

Методи підрахунку премій, що містять вищеперераховані надбавки вартості, називаються *брутто преміями*. Різниця в ціні між брутто та нетто премією називається *надбавкою на ризик* або надбавкою на ведення страхового бізнесу. До брутто премій відносяться премія математичного сподівання, дисперсна премія, премія середньоквадратичного відхилення, а також параметричні премії та премії означені з використанням допоміжних функцій для яких виконується властивість *позитивності страхової надбавки*, тобто, $\pi[X] > \mathsf{E}[X]$.

Більш детально про нетто принцип можна почитати, наприклад, в Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J. [32].

Премія математичного сподівання (en: expected value premium) асоційована з ризиком X, означається наступним чином

$$\pi_{\text{м.с.}(\alpha)}[X] := (1+\alpha)\mathsf{E}[X], \quad \text{для} \quad \alpha > 0. \tag{2.2}$$

В даному методі підрахунку вартості контрактів величина $\mathsf{E}[X]$ — це нетто премія, а $\alpha\mathsf{E}[X]$ — це вищезгадана надбавка на ризик.

Для застосування, більш зрозумілим виглядом формули (2.2) є наступний:

$$\pi_{\text{м.с.}(\alpha_1,\,\alpha_2)}[X] := (1+\alpha_1+\alpha_2)\mathsf{E}[X], \quad \text{для} \quad \min[\alpha_1,\alpha_2] > 0. \tag{2.3}$$

У даному випадку $\mathsf{E}[X]$ — це нетто премія, $\alpha_1\mathsf{E}[X]$ — частина брутто премії, що йде на формування страхових резервів, $\alpha_2\mathsf{E}[X]$ — частина брутто премії, що використовується в адміністративних цілях, таких як виплата зарплати, сплата податків, оренда приміщень тощо.

Практика роботи страхових компаній показує, що досить стандартною є наступна пропорція: нетто премія складає близько шестидесяти відсотків брутто премії, а решта розподіляється більш-менш порівно між резервним та адміністративним фондами.

Більш детально про метод математичного сподівання оцінювання вартості страхових контрактів можна почитати, зокрема, в роботах Bühlmann H. [33] та Gerber H.U. [52].

Принцип дисперсії оцінювання вартості страхових контрактів застосовується у випадках, коли при оцінюванні хочуть враховувати розсіювання ризику X.

Дисперсна премія (en: variance premium) для ризику X означається як

$$\pi_{\text{дисп.}(\alpha)}[X] := \mathsf{E}[X] + \alpha\mathsf{Var}[X], \quad \text{для} \quad \alpha > 0.$$

В наших позначеннях, $\mathsf{Var}[X]$ — це дисперсія (en: variance) випадкової величини X.

Звернемо увагу на те, що при даному способі оцінювання надбавка на ризик є пропорційною дисперсії ризику X.

Більш детально про принцип дисперсії підрахунку вартості страхових контрактів можна почитати, наприклад, в роботі Berliner B. [25].

Альтернативним до принципу дисперсії оцінювання вартості страхових контрактів при врахуванні розсіювання значень ризику X є принцип середньоквадратичного відхилення.

Премія середньоквадратичного відхилення (en: standard deviation premium) для ризику X означається як

$$\pi_{\text{с.к.в.}(\alpha)}[X] := \mathsf{E}[X] + \alpha\sigma[X], \quad \text{для} \quad \alpha > 0.$$

В наших позначеннях $\sigma[X] := \sqrt{\mathsf{Var}[X]}$ — це середньоквадратичне відхилення (en: standard deviation) випадкової величини X.

Звернемо увагу на те, що при даному способі оцінювання надбавка на ризик є пропорційною середньоквадратичному відхиленню ризику X.

Більш детально про принцип середньоквадратичного відхилення підрахунку вартості страхових контрактів можна почитати, зокрема, в роботі Denneberg D. [41].

В подальшому нам потрібні будуть наступні два означення.

Істотний інфімум (en: essential infimum) випадкової величини X з функцією розподілу $F_X(x)$ означається наступним чином

$$\text{ess inf}[X] := \inf\{\delta: \ F_X(\delta) > 0\}.$$

Істотний супремум (en: essential supremum) випадкової величини X з функцією розподілу $F_X(x)$ означається наступним чином

$$\text{ess sup}[X] := \sup\{\delta: \ F_X(\delta) < 1\}.$$

Ще одним досить простим способом оцінювання вартості страхових контрактів є принцип максимальних збитків.

Премія максимальних збитків (en: maximum loss premium) для ризику X означається наступним чином

$$\pi_{\text{макс.зб.}}[X] := \sup\{\delta : \ F_X(\delta) < 1\}.$$

Премія максимальних збитків — це не що інше як істотний супремум розміру страхової компенсації. Іншими словами, премія максимальних збитків демонструє верхню допустиму межу розміру страхової компенсації, тобто: $\mathsf{P}\{X > \pi_{\text{макс.зб.}}[X]\} = 0$, а також, для будь-якого $\varepsilon > 0$, маємо $\mathsf{P}\{X > \pi_{\text{макс.зб.}}[X] - \varepsilon\} > 0$.

Премія максимальних збитків виникає як границя: *експоненційної премії* при $\alpha \to +\infty$; *квантільної премії* при $\varepsilon \to 0_+$; *премії Есшера* при $\alpha \to +\infty$; *премії відрегульованої ризиком* при $\rho \to +\infty$.

Додаткові відомості про принцип максимальних збитків можна знайти в роботі de Vylder F.E., Goovaerts M., Haezendonck J. [112].

2.3 Параметричні способи оцінювання

Одним із найпростіших способів параметричного оцінювання є експоненційна премія, яка виникає при розгляді принципів означених з використанням допоміжних функції та виділяється в окремий випадок завдяки наявності бажаних властивостей якими принципи, що базуються на допоміжних функціях, взагалі кажучи, не володіють, наприклад, властивості адитивності.

Експоненційна премія (en: exponential premium) для ризику X означається як

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] := \frac{1}{\alpha}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]), \quad \text{для} \quad \alpha > 0.$$

Експоненційний принцип (з параметром β, для наведених нижче представлень функцій $v(x)$, $U(x)$ та $u(x)$) є частковим випадком: принципу середнього значення при $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$; принципу еквівалентної/нульової корисності страховика при $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$; та принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта при $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$.

Наступне твердження ілюструє монотонність експоненційної премії як функції параметра α.

Твердження 2.1. *Для будь-якого ризику X експоненційна премія є неспадною функцією параметра α, тобто,*

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha_1)}[X] \ \le \ \pi_{\text{експ.}(\alpha_2)}[X], \quad \textit{для} \quad \alpha_2 > \alpha_1 > 0. \tag{2.4}$$

Доведення. Звернемо увагу на те, що функція $v(x) = x^{\alpha_2/\alpha_1}$ для будь-яких $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ є опуклою вниз функцією на інтервалі $x \in [0, +\infty)$. Тобто, для будь-якої невід'ємної випадкової величини Z виконується нерівність Єнсена, див. Додаток A, а саме $v(\mathsf{E}[Z]) \le \mathsf{E}[v(Z)]$. Покладемо $Z := e^{\alpha_1 X}$, тоді

$$\begin{aligned}(\mathsf{E}[e^{\alpha_1 X}])^{\alpha_2} &= (\mathsf{E}[Z])^{\alpha_2} = ((\mathsf{E}[Z])^{\alpha_2/\alpha_1})^{\alpha_1} = (v(\mathsf{E}[Z]))^{\alpha_1} \\ &\le (\mathsf{E}[v(Z)])^{\alpha_1} = (\mathsf{E}[(e^{\alpha_1 X})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}])^{\alpha_1} = [\mathsf{E}(e^{\alpha_2 X})]^{\alpha_1},\end{aligned}$$

або в більш компактній формі

$$(\mathsf{E}[e^{\alpha_1 X}])^{\alpha_2} \ \le \ (\mathsf{E}[e^{\alpha_2 X}])^{\alpha_1}. \tag{2.5}$$

Звернемо увагу на те, що

$$(\mathsf{E}[e^{\alpha_1 X}])^{\alpha_2} > 0 \quad \text{та} \quad (\mathsf{E}[e^{\alpha_2 X}])^{\alpha_1} > 0,$$

тому, прологарифмувавши нерівність (2.5), отримуємо

$$\alpha_2 \log(\mathsf{E}[e^{\alpha_1 X}]) \ \leq \ \alpha_1 \log(\mathsf{E}[e^{\alpha_2 X}]). \tag{2.6}$$

Поділивши нерівність (2.6) на $\alpha_1\alpha_2$, маємо

$$\begin{aligned} \pi_{\text{експ.}(\alpha_1)}[X] &= \frac{1}{\alpha_1}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha_1 X}]) \ \leq \ \frac{1}{\alpha_2}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha_2 X}]) \\ &\leq \pi_{\text{експ.}(\alpha_2)}[X], \quad \text{для} \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2, \end{aligned}$$

тобто, нерівність (2.4) дійсно має місце. □

Варто зауважити, що нерівність (2.5) є частковим випадком *нерівності Ляпунова*, див. Додаток A, а саме

$$(\mathsf{E}[|Z|^{\alpha_1}])^{1/\alpha_1} \leq (\mathsf{E}[|Z|^{\alpha_2}])^{1/\alpha_2}, \quad \text{для} \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2, \tag{2.7}$$

яка виконується для довільної випадкової величини Z. Нерівність (2.5) слідує з нерівності (2.7), якщо покласти $Z := e^X$.

Звернемо увагу на те, що нерівність (2.4) перетворюється в строгу рівність, тобто,

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha_1)}[X] = \pi_{\text{експ.}(\alpha_2)}[X] = \mathsf{E}[X], \quad \text{для} \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2,$$

у випадку виродженої випадкової величини X.

Наступна теорема ілюструє зв'язок експоненційної премії з нетто премією.

Теорема 2.1. *Якщо для X існує $\varepsilon > 0$, таке, що $\mathsf{E}[|Xe^{\varepsilon X}|] < +\infty$, то*

$$\lim_{\alpha \to 0_+} \pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] = \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Доведення. Покажемо спочатку, що з умови $\mathsf{E}[|Xe^{\varepsilon X}|] < +\infty$ слідує, що $\mathsf{E}[e^{\varepsilon X}] < +\infty$. Дійсно, використавши нерівності

$$\mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{|X|\geq 1\}}|Xe^{\varepsilon X}|] \leq \mathsf{E}[|Xe^{\varepsilon X}|] < +\infty,$$

маємо

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[e^{\varepsilon X}] &= \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{|X|<1\}}\, e^{\varepsilon X}] + \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{|X|\geq 1\}}\, e^{\varepsilon X}] \\ &\leq e^{\varepsilon} + \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{|X|\geq 1\}}|Xe^{\varepsilon X}|] \ < \ +\infty. \end{aligned}$$

Умова $\mathsf{E}[e^{\varepsilon X}] < +\infty$ є достатньою для зміни порядку диференціювання та інтегрування наступного степенного ряду в околі нуля

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}\mathsf{E}[e^{\alpha X}]\bigg|_{\alpha=0} &= \frac{d}{d\alpha}\mathsf{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\alpha X)^k}{k!}\right]\Bigg|_{\alpha=0} = \mathsf{E}\left[\frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\alpha X)^k}{k!}\right]\Bigg|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha^k \mathsf{E}[X^{k+1}]}{k!}\Bigg|_{\alpha=0} = \mathsf{E}[X]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Звернемо увагу на те, що для будь-якого ризику X виконуються рівності

$$\mathsf{E}[e^{\alpha X}]\big|_{\alpha=0} = 1 \quad \text{та} \quad \log\left(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]\big|_{\alpha=0}\right) = 0. \tag{2.9}$$

Зауважимо, що умова $\mathsf{E}[|Xe^{\varepsilon X}|] < +\infty$, для $\varepsilon > 0$, є достатньою для диференційовності функції $\mathsf{E}[e^{\alpha X}]$ в околі нуля, а функція $\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}])$ буде диференційовною як суперпозиція диференційовних функцій, тому, використавши тотожності (2.8) та (2.9), отримуємо

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0_+} \pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] &= \lim_{\alpha\to 0_+} \frac{\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]) - \log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]|_{\alpha=0})}{\alpha} \\
&= \frac{d}{d\alpha}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}])\bigg|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\mathsf{E}[e^{\alpha X}]\bigg|_{\alpha=0} : \mathsf{E}[e^{\alpha X}]\bigg|_{\alpha=0} \\
&= \mathsf{E}[X] = \pi_{\text{нетто}}[X].
\end{aligned}$$

Це завершує доведення теореми 2.1. $\square$

Зауваження 2.1. *Із твердження 2.1 та теореми 2.1 випливає, що експоненційна премія при $\alpha > 0$ більша за нетто премію. Тому властивість монотонності експоненційної премії є дуже важливою. Вона показує, що експоненційний принцип підрахунку вигідний для страховика, причому зі збільшенням α ця вигода зростає.*

Наступна теорема демонструє зв'язок експоненційної премії із премією максимальних збитків.

Теорема 2.2. *Для будь-якого ризику X виконується рівність*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] = \text{ess sup}[X].$$

Доведення. Покажемо спочатку, що для будь-якого ризику X та довільного допустимого значення α експоненційна премія не перевищуватиме істотного супремуму розміру страхової компенсації, тобто,

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] \le \text{ess sup}[X]. \tag{2.10}$$

Варто зауважити, що достатньо показати виконання нерівності (2.10) у випадку $\text{ess sup}[X] < +\infty$, бо в противному разі нерівність (2.10) виконуватиметься автоматично. В зазначеному випадку отримуємо

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] = \frac{1}{\alpha}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]) \;\le\; \frac{1}{\alpha}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha\ \text{ess sup}[X]}]) = \text{ess sup}[X].$$

З іншого боку, для будь-якого ризику X та довільної константи c, такої, що $c < \text{ess sup}[X]$, виконуються нерівності

$$\mathsf{P}\{X \ge c\} > 0 \quad \text{та} \quad \mathsf{E}[e^{\alpha X}] \ge e^{\alpha c}\mathsf{P}\{X \ge c\}. \tag{2.11}$$

Використавши нерівності (2.11), маємо

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]) \;&\ge\; \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\log(e^{\alpha c}\mathsf{P}\{X \ge c\}) = \\
&= \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\alpha}[\log(e^{\alpha c}) \;+\; \log(\mathsf{P}\{X \ge c\})] = c.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Комбінуючи нерівність (2.10) з нерівністю (2.12) та перейшовши до границі, маємо

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] \in \bigcap_{c<\text{ess sup}[X]} [c,\ \text{ess sup}[X]] = \{\text{ess sup}[X]\}.$$

Це завершує доведення теореми 2.2. $\square$

З нерівності (2.10) випливає, що експоненційна премія прямуватиме до істотного супремуму знизу при $\alpha \to +\infty$.

Зауваження 2.2. *Невід'ємність випадкової величини X не використовувалась при доведенні теореми* 2.2, *тому співвідношення*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} \log \left(\mathsf{E}[e^{\alpha X}] \right) = \text{ess sup}[X]$$

виконується для довільної випадкової величини X.

Іншим, часто–вживаним, параметричним принципом оцінювання вартості страхових контрактів є принцип Есшера.

Премія Есшера (en: Esscher premium) для ризику X означається наступним чином

$$\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] := \mathsf{E}[Xe^{\alpha X}]/\mathsf{E}[e^{\alpha X}], \quad \text{для} \quad \alpha \geq 0.$$

Очевидно, що при $\alpha = 0$, премія Есшера еквівалентна нетто премії.

Премія Есшера — це не що інше, як математичне сподівання перетворення Есшера випадкової величини X, тобто математичне сподівання величини $Xe^{\alpha X}/\mathsf{E}[e^{\alpha X}]$.

Зауважимо, що перетворення Есшера означається для $\alpha \in \mathbb{R}$, проте, обмеження $\alpha \geq 0$ в означенні премії Есшера вводиться для отримання деяких корисних властивостей такого способу страхового оцінювання.

Перетворення Есшера (en: Esscher transform) було вперше представлене в літературі шведським математиком Фредріком Есшером (sw: Fredrik Esscher) в роботах [48] та [49]. Мабуть вперше, як метод підрахунку страхових премій, усереднене перетворення Есшера було описане швейцарським математиком Хансом Бюльманом (ch: Hans Bühlman) в роботі [34]. Огляд відомих результатів, пов'язаних із перетворенням Есшера, здійснений, зокрема, в роботі Yang H. [118].

Наступне твердження демонструє монотонність премії Есшера як функції параметра α.

Твердження 2.2. *Нехай для ризику X виконується умова*

$$\sup\{\delta : \mathsf{E}[X^2 e^{\delta X}] < +\infty\} \ =: \ \alpha^*[X] \ > \ 0,$$

тоді

$$\mathsf{E}[X] \quad \leq \quad \pi_{\text{Есшер}(\alpha_1)}[X] \leq \pi_{\text{Есшер}(\alpha_2)}[X], \quad \textit{для} \quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha^*[X].$$

Доведення. Спочатку покажемо, що з умови $\mathsf{E}[X^2 e^{\delta X}] < +\infty$, для деякого $\delta > 0$, слідує умова $\mathsf{E}[|Xe^{\delta X}|] < +\infty$, для того ж δ. Дійсно, використавши нерівності

$$\mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{|X| \geq 1\}} X^2 e^{\delta X}] \leq \mathsf{E}[X^2 e^{\delta X}] < +\infty,$$

та беручи до уваги те, що функція $xe^{\delta x}$ спадає на інтервалі $(-\infty, \, -1/\delta)$, зростає на інтервалі $(-1/\delta, \, +\infty)$, а, отже, функція $f(x) := |xe^{\delta x}|$ на інтервалі $[-1, \, 1]$ досягає свого максимуму або в точці $x = -1$, або в точці $x = 1$, або в точці $x = -1/\delta$ (якщо $-1/\delta \in [-1, \, 1]$), отримуємо

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[|Xe^{\delta X}|] \ &= \ \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{|X|<1\}} \, |Xe^{\delta X}|] + \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{|X| \geq 1\}} \, |Xe^{\delta X}|] \ \leq \\ &\leq \ \max\{f(-1), \, f(1), \, f(-1/\delta)\} + \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{|X| \geq 1\}} X^2 e^{\delta X}] \ < \ +\infty. \end{aligned}$$

Аналогічно можна показати, що з умови $\mathsf{E}[X^2 e^{\delta X}] < +\infty$ слідує умова $\mathsf{E}[e^{\delta X}] < +\infty$.

Умова $\mathsf{E}[X^2 e^{\delta X}] < +\infty$ є достатньою для диференційовності функції $\mathsf{E}[Xe^{\alpha X}]$ на інтервалі $\alpha \in [0, \delta)$, а умова $\mathsf{E}[|Xe^{\delta X}|] < +\infty$ є достатньою для диференційовності функції $\mathsf{E}[e^{\alpha X}]$ на інтервалі $\alpha \in [0, \delta)$, тому в сукупності умова $\mathsf{E}[X^2 e^{\delta X}] < +\infty$ є достатньою для диференційовності премії Есшера на інтервалі $\alpha \in [0, \delta)$.

Розглянемо похідну

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathsf{E}\left[Xe^{\alpha X}\right]}{\mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right]}\right)' &= \frac{\left(\mathsf{E}\left[Xe^{\alpha X}\right]\right)' \mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right]}{\left(\mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right]\right)^2} - \frac{\mathsf{E}\left[Xe^{\alpha X}\right]\left(\mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right]\right)'}{\left(\mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right]\right)^2} \\ &= \frac{\mathsf{E}\left[X^2 e^{\alpha X}\right]\mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right] - \mathsf{E}\left[Xe^{\alpha X}\right]\mathsf{E}\left[Xe^{\alpha X}\right]}{\left(\mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right]\right)^2} \geq 0.\end{aligned}$$

Остання нерівність випливає з *нерівності Гельдера*, див. Додаток А, якщо обрати $p = q = 2$, $Z_1 = \sqrt{X^2 e^{\alpha X}}$, та $Z_2 = \sqrt{e^{\alpha X}}$.

Це завершує доведення теореми 2.2. □

Зауважимо, що у випадку виродженої випадкової величини X, має місце рівність

$$\mathsf{E}[X] = \pi_{\text{Есшер}(\alpha_1)}[X] = \pi_{\text{Есшер}(\alpha_2)}[X], \quad \text{для} \quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2.$$

Зауваження 2.3. *Із твердження 2.2 випливає, що для премії Есшера має місце аналог зауваження 2.1 сформульованого для експоненційної премії.*

Для премії Есшера має місце наступне граничне співвідношення.

Теорема 2.3. *Для будь-якого ризику X справедлива рівність*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] = \text{ess sup}[X].$$

Доведення. Покажемо спочатку, що для будь-якого $\alpha \geq 0$ премія Есшера не перевищуватиме істотного супремуму розміру страхової компенсації. Достатньо довести це у випадку ess $\sup[X] < +\infty$, бо в противному разі твердження виконується автоматично. Маємо

$$\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] = \frac{\mathsf{E}[Xe^{\alpha X}]}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]} \leq \frac{\text{ess sup}[X]\,\mathsf{E}[e^{\alpha X}]}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]} = \text{ess sup}[X]. \tag{2.13}$$

Виберемо сталу c таким чином, що $c < \text{ess sup}[X]$. Надалі нам потрібні будуть наступні співвідношення

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[Xe^{\alpha X}] &= \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X\geq c\}}\, Xe^{\alpha X}] + \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X<c\}}\, Xe^{\alpha X}] \\ &\geq c\,\mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X\geq c\}}\, e^{\alpha X}] + \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X<c\}}\, Xe^{\alpha X}] \\ &\geq c\,(\mathsf{E}[e^{\alpha X}] - \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X<c\}}\, e^{\alpha X}]) + \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X<c\}}\, Xe^{\alpha X}] \\ &\geq c\,\mathsf{E}[e^{\alpha X}] - c\, e^{\alpha c} + \mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X<c\}}\, Xe^{\alpha X}]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Покажемо, що для будь-якого ризику X має місце співвідношення

$$\frac{c\, e^{\alpha c}}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]} \to 0, \quad \text{при} \quad \alpha \to +\infty. \tag{2.15}$$

Нехай $\varepsilon > 0$ таке, що $c + \varepsilon < \text{ess sup}[X]$, тоді, скориставшись нерівністю

$$\mathsf{E}[e^{\alpha X}] \geq e^{\alpha(c+\varepsilon)}\mathsf{P}\{X \geq c + \varepsilon\} > 0, \tag{2.16}$$

отримуємо

$$\left|\frac{c\,e^{\alpha c}}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]}\right| \;\le\; \frac{|c|\,e^{\alpha c}}{e^{\alpha(c+\varepsilon)}\mathsf{P}\{X \ge c+\varepsilon\}} \;=\; \frac{|c|\,e^{-\alpha\varepsilon}}{\mathsf{P}\{X \ge c+\varepsilon\}} \to 0, \quad \text{при} \quad \alpha \to +\infty,$$

тобто, граничне співвідношення (2.15) дійсно має місце.

Покажемо також, що для будь-якого ризику X,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X<c\}}\, X e^{\alpha X}]}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]} \ge 0. \tag{2.17}$$

Для цього звернемо увагу на те, що функція $xe^{\alpha x}$ спадає на інтервалі $x \in (-\infty, -1/\alpha)$, зростає на інтервалі $x \in (-1/\alpha, +\infty)$, досягає свого мінімуму $-1/(\alpha e)$ в точці $x = -1/\alpha$ та приймає від'ємні значення при $x < 0$.

Розглянемо окремо випадки $c \ge 0$ та $c < 0$.

У випадку $c \ge 0$ оцінимо функцію $\mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X<c\}}\, Xe^{\alpha X}]$ знизу мінімальним значенням функції $xe^{\alpha x}$ на $\mathbb{R}$, тобто $-1/(\alpha e)$, тоді

$$\frac{\mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X<c\}}\, Xe^{\alpha X}]}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]} \;\ge\; \frac{-1/(\alpha e)}{e^{\alpha c}\mathsf{P}\{X \ge c\}} \to 0, \quad \text{при} \quad \alpha \to +\infty.$$

У випадку $c < 0$, для достатньо великих α, а саме, для $\alpha \ge -1/c$, функція $xe^{\alpha x}$ спадатиме на інтервалі $(-\infty, c)$ і прийматиме мінімальне значення на цьому інтервалі в точці c. Тому функція $\mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X<c\}}\, Xe^{\alpha X}]$ може бути оцінена знизу значенням $c\,e^{\alpha c}$. Скориставшись нерівністю (2.16), отримуємо

$$\frac{\mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X<c\}}\, Xe^{\alpha X}]}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]} \;\ge\; \frac{c\,e^{\alpha c}}{e^{\alpha(c+\varepsilon)}\mathsf{P}\{X \ge c+\varepsilon\}} \;=\; \frac{ce^{-\alpha\varepsilon}}{\mathsf{P}\{X \ge c+\varepsilon\}} \to 0, \quad \text{при} \quad \alpha \to +\infty.$$

Тобто, граничне співвідношення (2.17) дійсно має місце.

Скомбінувавши нерівності (2.14) зі співвідношеннями (2.15) та (2.17), маємо

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] \;=\; \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\mathsf{E}[Xe^{\alpha X}]}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]} \;\ge\; \lim_{\alpha\to+\infty} \left[c - \frac{c\,e^{\alpha c}}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]} + \frac{\mathsf{E}[\mathbf{1}_{\{X<c\}}\, Xe^{\alpha X}]}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]}\right] \;\ge\; c.$$

Перейшовши до границі в нерівності (2.13) та об'єднавши її зі щойно отриманою нерівністю, остаточно отримуємо

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] \in \bigcap_{c<\text{ess sup}[X]} [c, \text{ess sup}[X]] = \{\text{ess sup}[X]\}.$$

Це завершує доведення теореми 2.3. □

Зауваження 2.4. *Невід'ємність випадкової величини X не використовувалась у доведенні теореми* 2.3*, отже, граничне співвідношення*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\mathsf{E}[Xe^{\alpha X}]}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]} = \text{ess sup}[X] \tag{2.18}$$

виконується для довільної випадкової величини X.

Зауваження 2.5. *Звернемо увагу на те, що для довільної випадкової величини X виконується також наступне граничне співвідношення*

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \frac{\mathsf{E}[Xe^{\alpha X}]}{\mathsf{E}[e^{\alpha X}]} = \text{ess inf}[X]. \tag{2.19}$$

Наступним популярним параметричним принципом страхового оцінювання є принцип відрегульований ризиком.

Премія відрегульована ризиком (en: risk adjusted premium) для ризику X, *зконцентрованого на невід'ємній півосі*, з функцією розподілу $F_X(x)$ означається наступним чином

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] := \int\limits_0^{+\infty} [\mathsf{P}\{X > x\}]^{1/\rho} dx = \int\limits_0^{+\infty} [1 - F_X(x)]^{1/\rho} dx.$$

Параметр $\rho \geq 1$ часто називають *ризиковим індексом* (en: risk index).

В якості аргументації застосування принципу відрегульованого ризиком звернемо увагу на те, що даний принцип співпадає з нетто принципом у випадку $\rho = 1$ та є строго більшим за математичне сподівання розміру страхової компенсації при $\rho > 1$ у випадку невиродженого ризику.

Наступне твердження ілюструє монотонність премії відрегульованої ризиком як функції параметра ρ.

Твердження 2.3. *Для будь-якого невід'ємного ризику X премія відрегульована ризиком є неспадною функцією параметра ρ, тобто,*

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho_1)}[X] \ \leq \ \pi_{\text{від.риз.}(\rho_2)}[X], \quad \textit{для} \quad 1 \leq \rho_1 < \rho_2. \tag{2.20}$$

Доведення. Дійсно, проінтегрувавши на невід'ємній півосі нерівність

$$[1 - F_X(x)]^{1/\rho_1} \leq [1 - F_X(x)]^{1/\rho_2}, \quad \text{для} \quad 1 \leq \rho_1 < \rho_2,$$

яка, незалежно від вибору невід'ємного ризику X, виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$, отримуємо нерівність (2.20). $\square$

Звернемо увагу на те, що нерівність (2.20) перетворюється в строгу рівність, тобто,

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho_1)}[X] = \pi_{\text{від.риз.}(\rho_2)}[X] = \mathsf{E}[X], \quad \text{для} \quad 1 \leq \rho_1 < \rho_2,$$

у випадку виродженої невід'ємної випадкової величини X.

Наступна теорема демонструє збіжність премії відрегульованої ризиком до істотного супремуму розміру страхової компенсації.

Теорема 2.4. *Для будь-якого невід'ємного ризику X виконується граничне співвідношення*

$$\lim_{\rho \to +\infty} \pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] = \text{ess sup}[X]. \tag{2.21}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що для будь-якого невід'ємного ризику X та довільного $\rho \geq 1$, має місце нерівність

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] \leq \text{ess sup}[X]. \tag{2.22}$$

Дійсно, використавши нерівність $[1 - F_X(x)]^{1/\rho} \leq 1$, маємо

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] = \int\limits_0^{+\infty} [1 - F_X(x)]^{1/\rho} dx \leq \int\limits_0^{\text{ess sup}[X]} dx = \text{ess sup}[X].$$

У випадку виродженого невід'ємного ризику X, тобто коли $0 \le \text{ess inf}[X] = \text{ess sup}[X]$, твердження теореми 2.4 виконується. Дійсно, в цьому випадку маємо

$$\lim_{\rho \to +\infty} \pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] = \lim_{\rho \to +\infty} \int\limits_0^{\text{ess sup}[X]} [1-0]^{1/\rho} dx = \text{ess sup}[X].$$

Нехай тепер $0 \le \text{ess inf}[X] < \text{ess sup}[X]$. Тоді, для довільної константи c, такої, що $\text{ess inf}[X] < c < \text{ess sup}[X]$, виконуються нерівності

$$0 < [1 - F_X(c)]^{1/\rho} < 1, \quad \text{для} \quad \rho \ge 1. \tag{2.23}$$

Скориставшись тим, що $F_X(x)$ є неспадною функцією, та використавши нерівності (2.23), отримуємо

$$\begin{aligned} \pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] &= \int\limits_0^{+\infty} [1 - F_X(x)]^{1/\rho} dx > \int\limits_0^{c} [1 - F_X(x)]^{1/\rho} dx \\ &> [1 - F_X(c)]^{1/\rho} \cdot c \to c, \quad \text{при} \quad \rho \to +\infty. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Перейшовши до границі в нерівності (2.22) та скомбінувавши її з нерівністю (2.24), маємо

$$\lim_{\rho \to +\infty} \pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] \in \bigcap_{\text{ess inf}[X] < c < \text{ess sup}[X]} [c, \ \text{ess sup}[X]] = \{\text{ess sup}[X]\},$$

що й завершує доведення теореми 2.4. □

Зауваження 2.6. *З нерівності (2.22) слідує, що премія відрегульована ризиком прямуватиме до істотного супремуму знизу.*

Деяку альтернативну інформацію стосовно принципу відрегульованого ризиком можна знайти в роботі Dickson D.C.M. [44].

Квантільний підхід до аналізу розподілів ризиків, теж інколи використовується при оцінюванні вартості страхових контрактів.

Квантільна премія (en: percentile premium) для ризику X та довільного $\varepsilon \in (0, 1]$ означається так, що ймовірність перевищення величиною страхової компенсації розміру страхової премії не перевищує ε, тобто,

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X] := \inf\{\delta : \ F_X(\delta) > 1 - \varepsilon\}.$$

Як бачимо, квантільна премія — це $(1-\varepsilon)$-квантіль розподілу $F_X(x)$. Тобто, при заключенні страхових контрактів із квантільною премією при малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$, страхова компанія з великою ймовірністю не розориться.

З деякими особливостями квантільного принципу можна ознайомитись, наприклад, в роботі de Vylder F.E. [110].

2.4 Принципи означені з використанням допоміжних функцій

В цьому параграфі проведемо оглядовий аналіз декількох способів оцінювання вартості страхових контрактів означених із використанням допоміжних монотонних неперервних функцій.

Природним узагальненням принципу відрегульованого ризиком є принцип Ванга. Принцип Ванга названий на честь китайського математика, котрий вперше запропонував таке узагальнення принципу відрегульованого ризиком в роботі Wang S. [114].

Премія Ванга (en: Wang's premium) для невід'ємного ризику X є узагальненням *премії відрегульованої ризиком* та означається так

$$\pi_{\text{Ванг}}[X] := \int\limits_0^{+\infty} g(1 - F_X(x))dx$$

для деякої зростаючої та опуклої вгору функції $g(\cdot)$, що відображає інтервал $[0, 1]$ на себе (тобто на інтервал $[0, 1]$).

Легко бачити, що у випадку $g(x) = x^{1/\rho}$, для $\rho \geq 1$, *премія Ванга* еквівалентна *премії відрегульованій ризиком.* В якості прикладу функції $g(\cdot)$, відмінної від $g(x) = x^{1/\rho}$, можна обрати $g(x) = \sin(\pi x/2)$.

Частовживаним принципом, що базується на певному класі допоміжних гладких функцій є принцип середнього значення.

Премія середнього значення (en: mean value premium) для ризику X задана за допомогою функції $v(x) \in C^2(\mathbb{R})$, такої, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$, означається як розв'язок рівняння

$$v(\pi_{\text{с.з.}}[X]) = \mathsf{E}[v(X)]. \tag{2.25}$$

Аргументація для принципу середнього значення трохи прихована в нерівності Єнсена $v(\mathsf{E}[X]) \leq \mathsf{E}[v(X)]$, тобто, отримана в такий спосіб премія буде не меншою за математичне сподівання розміру страхової компенсації.

Більш детально про принцип середнього значення підрахунку вартості страхових контрактів можна почитати, наприклад, в роботі Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. [69].

Принципи корисності. Страхова індустрія існує тому, що клієнти страхових компаній погоджуються платити ціну за позбавлення від ризику X, яка перевищує нетто премію. Це можна пояснити в термінах теорії корисності. Потенційний клієнт страхової компанії, часто навіть не усвідомлюючи цього, при прийнятті економічних рішень завжди розглядає значення $u(\omega)$ для свого поточного капіталу, а не саме значення ω; в наших позначеннях $u(\cdot)$ — це функція корисності капіталу клієнта, тобто, зростаюча та опукла вгору функція. Роблячи вибір між двома випадковими втратами X_1 та X_2, клієнт порівнює очікувані залишкові корисності $\mathsf{E}[u(\omega - X_1)]$ та $\mathsf{E}[u(\omega - X_2)]$ та обирає втрату, що призводить до більшого очікуваного залишкового капіталу.

Користуючись подібною аргументацією, клієнт погоджується заплатити ціну $P_{\text{клієнт}}$ за позбавлення від ризику X, якщо

$$u(\omega - P_{\text{клієнт}}) \;=\; \mathsf{E}[u(\omega - P_{\text{клієнт}})] \;\geq\; \mathsf{E}[u(\omega - X)].$$

Максимальна ціна, яку ми позначатимемо P_+, яку клієнт погоджується заплатити за покриття ризику X, знаходиться з рівняння

$$u(\omega - P_+) \;=\; \mathsf{E}[u(\omega - X)]. \tag{2.26}$$

Такий метод оцінювання вартості страхових контрактів називається *принципом еквівалентної корисності клієнта*; отриману в такий спосіб премію позначатимемо $\pi_{\text{е.к.к.}}[X] \;:=\; P_+$.

Інколи функцію корисності обирають так, що значення $u(0)$ відображає корисність капіталу клієнта в момент укладання страхової угоди. В таких випадках рівняння (2.26) замінюють рівнянням

$$u(-\pi_{\text{н.к.к.}}[X]) \;=\; \mathsf{E}[u(-X)], \tag{2.27}$$

а відповідний метод оцінювання називають *принципом нульової корисності клієнта.*

З іншого боку, страхова компанія з власною функцією корисності капіталу $U(\cdot)$, тобто, зростаючою опуклою вгору функцією та власним капіталом на момент укладання страхової угоди W, погодиться прийняти ризик X за ціною $P_{\text{страховик}}$, якщо

$$U(W) \;=\; \mathsf{E}[U(W)] \;\le\; \mathsf{E}[U(W + P_{\text{страховик}} - X)].$$

Мінімальна ціна, яку ми позначатимемо P_{-}, за якою страхова компанія погодиться прийняти ризик X, знаходиться з рівняння

$$U(W) = \mathsf{E}[U(W + P_{-} - X)]. \tag{2.28}$$

Такий метод оцінювання вартості страхових контрактів називається *принципом еквівалентної корисності страховика*; отриману в такий спосіб премію позначатимемо $\pi_{\text{е.к.с.}}[X] \;:=\; P_{-}$.

Інколи функцію корисності обирають так, що значення $U(0)$ відображає корисність капіталу страховика на момент укладання страхової угоди. В таких випадках рівняння (2.28) замінюють рівнянням

$$U(0) = \mathsf{E}[U(\pi_{\text{н.к.с.}}[X] - X)], \tag{2.29}$$

відповідний метод оцінювання називають *принципом нульової корисності страховика.*

Тривалий аналіз роботи багатьох страхових компаній (див., наприклад, Dickson D.C.M. [44]) показує, що наступні функції найчастіше використовуються в якості функцій корисності (список представлено в термінах корисності страховика, проте ті ж самі функції можна використовувати в якості функцій корисності клієнта, замінивши $U(\cdot)$ на $u(\cdot)$):

лінійна	$U(x) = ax + b$	для $a > 0$;
квадратична	$U(x) = -(\alpha - x)^2$	для $x < \alpha$;
логарифмічна	$U(x) = \log(\alpha + x)$	для $x > -\alpha$;
експоненційна	$U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$	для $\min[\alpha, \beta] > 0$;
степенева	$U(x) = x^{\alpha}$	для $x > 0$, та $0 < \alpha \le 1$.

У випадках, коли вибрана для оплати премія $\pi[X]$ належить інтервалу $P_{-} < \pi[X] < P_{+}$, як страховик, так і клієнт покращать свої очікувані корисності шляхом підписання страхової угоди.

Розділ 3

Властивості принципів підрахунку премій та характеризаційні теореми

В даному розділі проведено аналіз бажаних властивостей, як з точки зору клієнта так і страховика, якими можуть володіти або не володіти принципи підрахунку вартості страхових контрактів, означені в другому розділі навчального посібника. Серед таких бажаних властивостей в третьому розділі посібника розглядаються: властивість відсутності необґрунтованої надбавки на ризик, властивість невід'ємності страхової надбавки, властивість адитивності, властивість мультиплікативної інваріантності, властивість консистентності, властивість відсутності грабування та властивість ітеративності.

В другій частині розділу представлено характеризаційні теореми для декількох принципів підрахунку вартості страхових контрактів, означених із використанням гладких допоміжних функцій. Дані теореми стосуються властивостей адитивності, консистентності, ітеративності і мультиплікативної інваріантності та покривають принцип середнього значення, принцип еквівалентної/нульової корисності страховика та принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта. Результати перевірки бажаних властивостей представлено у вигляді сумарної таблиці властивостей.

На завершення, в розділі демонструється методика оптимізації вартості страхових контрактів шляхом залучення декількох страхових компаній на прикладі експоненційного принципу страхового оцінювання.

3.1 Перевірка виконання бажаних властивостей

Перевірку ряду бажаних властивостей, якими може володіти або не володіти окремо обраний спосіб підрахунку вартості страхових контрактів почнемо з перевірки відсутності необгрунтованої надбавки на ризик для кожного з методів страхового оцінювання означеного в другому розділі монографії.

Відсутність необґрунтованої надбавки на ризик. Говоритимемо, що принцип підрахунку вартості страхових контрактів володіє *властивістю відсутності необґрунтованої надбавки на ризик* (en: no unjustified risk loading property), якщо для будь-якого допустимого виродженого ризику $X^C_{\text{виродж.}}$, тобто, $\mathsf{P}\{X^C_{\text{виродж.}} = C\} = 1$, для деякої константи $C \in \mathbb{R}$ або $\mathbb{R}^+$, має місце рівність $\pi[X^C_{\text{виродж.}}] = C$.

Таким чином, якщо страхова компанія підраховує вартість страхових контрактів за принципом, що володіє даною властивістю, то вона поступає чесно, по відношенню до клієнта. Ніяких додаткових стягнень, не пов'язаних безпосередньо з ризиками, з клієнта страхова компанія не проводить.

Отже, з точки зору клієнта, властивість відсутності необґрунтованої надбавки на ризик є надзвичайно важливою і вигідною для нього.

Проаналізуємо її виконання, чи не виконання для розглянутих вище принципів підрахунку страхових контрактів.

Дана властивість, очевидно, *виконується* для *нетто принципу.*

Так як для виродженого строго позитивного ризику $X^C_{\text{вироdж.}}$ має місце нерівність $\pi_{\text{м.с.}}[X^C_{\text{виродж.}}] = (1+\alpha)C > C$, для всіх $\alpha > 0$, то властивість *не виконується* для *принципу математичного сподівання.*

Завдяки рівності $\mathsf{Var}[X^C_{\text{виродж.}}] = \sigma[X^C_{\text{виродж.}}] = 0$, властивість відсутності необґрунтованої надбавки на ризик *виконується* для *принципу дисперсії* та *принципу середньо-квадратичного відхилення.*

Властивість *виконується* також для *принципу максимальних збитків*, адже

$$\pi_{\text{макс.зб.}}[X^C_{\text{виродж.}}] = \sup\{\delta : F_{X^C_{\text{виродж.}}}(\delta) < 1\} = C.$$

Властивість відсутності необґрунтованої надбавки на ризик очевидним чином *виконується* для *експоненційного принципу* та принципу Есшера.

Принцип відрегульований ризиком теж *володіє* властивістю, що досліджується, адже для будь-якого невід'ємного ризику $X^C_{\text{виродж.}}$

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X^C_{\text{виродж.}}] = \int\limits_0^C [1-0]^{1/\rho} dx = \int\limits_0^C dx = C.$$

Відсутність необґрунтованої надбавки на ризик виконується також для *квантільного принципу*, адже в даному випадку, для будь-якого $\varepsilon \in (0, 1]$, виконується

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X^C_{\text{виродж.}}] = \inf\{\delta : F_{X^C_{\text{виродж.}}}(\delta) > 1-\varepsilon\} = C.$$

Дана властивість *виконується* також для *принципу Ванга.* Дійсно, для будь-якої зростаючої та опуклої вгору функції $g : [0,1] \to [0,1]$ та будь-якого невід'ємного виродженого ризику $X^C_{\text{виродж.}}$, маємо

$$\pi_{\text{Ванг}}[X^C_{\text{виродж.}}] = \int\limits_0^C g(1-0)dx = \int\limits_0^C dx = C.$$

Властивість, що досліджується, *виконується* для *принципу середнього значення*, адже

$$\pi_{\text{с.з.}}[X^C_{\text{виродж.}}] = v^{-1}(\mathsf{E}[v(X^C_{\text{виродж.}})]) = v^{-1}(v(C)) = C.$$

Рівняння (2.28) для будь-якого початкового капіталу W та будь-якої допустимої функції корисності страховика $U(\cdot)$, у випадку виродженого ризику $X^C_{\text{виродж.}}$ набуває вигляду

$$U(W) \quad = \quad U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X^C_{\text{виродж.}}] - C). \tag{3.1}$$

Оскільки $U'(\cdot) > 0$, то з рівняння (3.1) слідує, що

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X^C_{\text{виродж.}}] = C.$$

Тобто, властивість *виконується* для *принципу еквівалентної/нульової корисності страховика.*

Рівняння (2.26) для будь-якого початкового капіталу ω та будь-якої допустимої функції корисності клієнта $u(\cdot)$, у випадку виродженого ризику $X^C_{\text{виродж.}}$ набуває вигляду

$$u(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X^C_{\text{виродж.}}]) \;\; = \;\; u(\omega - C). \tag{3.2}$$

Оскільки $u'(\cdot) > 0$, то з рівняння (3.2) слідує, що

$$\pi_{\text{е.к.к.}}[X^C_{\text{виродж.}}] = C.$$

Тобто, властивість також *виконується* для *принципу еквівалентної/ нульової корисності клієнта.*

Наступною важливою властивістю принципів підрахунку премій є властивість невід'ємності страхової надбавки.

Невід'ємність страхової надбавки. Говоритимемо, що принцип підрахунку вартості страхових контрактів володіє *властивістю невід'ємності страхової надбавки* (en: non-negative loading property), якщо для будь-якого допустимого ризику X розмір отриманої премії є не меншим за математичне сподівання розміру страхової компенсації, тобто, $\pi[X] \geq \mathsf{E}[X]$.

Очевидно, що дана властивість є вигідною для страхової компанії, оскільки у цьому випадку, при наявності великої кількості клієнтів, з ймовірністю близькою до одиниці, не вся премія йде на виплату страхової компенсації. Певна її частина залишається у компанії.

Властивість невід'ємності страхової надбавки, очевидно, *виконується* для *нетто принципу*, *принципу математичного сподівання*, *принципу дисперсії*, *принципу середньоквадратичного відхилення* та *принципу максимальних збитків.*

Властивість *виконується* також для *експоненційного принципу.* Дійсно, використовуючи нерівність Єнсена для опуклої вниз функції, маємо

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] \;=\; \frac{1}{\alpha}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]) \;\geq\; \frac{1}{\alpha}\log(e^{\alpha \mathsf{E}[X]}) \;=\; \mathsf{E}[X].$$

Дослідимо дану властивість для принципу Есшера. Згідно твердження 2.2, маємо, що якщо для деякого ризику X виконується нерівність $\alpha^*[X] > 0$, то премія Есшера для ризику X є неспадною функцією параметра α для $\alpha \in [0, \alpha^*[X])$. Крім того, для будь-якого ризику X, у випадку $\alpha = 0$, премія Есшера еквівалентна нетто премії. Отже, *у випадку* $\alpha^*[X] > 0$, *премія Есшера володіє* властивістю невід'ємності страхової надбавки *для* $\alpha \in [0, \alpha^*[X])$. Звернемо увагу на те, що у випадку невід'ємного обмеженого зверху ризику X, тобто такого, що $\operatorname{ess\,inf}[X] \geq 0$ та $\operatorname{ess\,sup}[X] < +\infty$, (розгляду саме таких X достатньо для більшості практичних застосувань) $\alpha^*[X]$ приймає значення $+\infty$. Тобто, у *випадку невід'ємного та обмежкного зверху ризику X премія Есшера* для ризику X *володіє* властивістю невід'ємності страхової надбавки *для всіх* $\alpha \geq 0$.

У випадку невід'ємного ризику X, для $\rho \geq 1$ маємо

$$\mathsf{E}[X] \;=\; \int\limits_0^\infty [1 - F_X(x)]dx \;\leq\; \int\limits_0^\infty [1 - F_X(x)]^{1/\rho}dx \;=\; \pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X],$$

тобто, *принцип відрегульований ризиком* підрахунку вартості страхових контрактів також *володіє* властивістю невід'ємності страхової надбавки.

Покажемо тепер, що квантільний принцип не володіє властивістю невід'ємності страхової надбавки. Для цього розглянемо ризик X, що приймає значення a_1 та a_2 (вважатимемо, що $a_1 < a_2$) з ненульовими ймовірностями p_1 та p_2 відповідно. Виберемо ε так, що $\varepsilon > p_2$, тоді

$$\mathsf{E}[X] \;=\; p_1 a_1 + p_2 a_2 \;>\; p_1 a_1 + p_2 a_1 \;=\; a_1 \;=\; \pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X],$$

тобто, властивість *не виконується* для *квантільного принципу.*

Так як для зростаючої опуклої вгору функції $g : [0, 1] \to [0, 1]$ виконується нерівність $g(y) \geq y$ для всіх $y \in [0, 1]$, то для будь-якого невід'ємного ризику X, маємо

$$\pi_{\text{Ванг}}[X] \ = \ \int_0^\infty g(1 - F_X(x))dx \ \geq \ \int_0^\infty [1 - F_X(x)]dx \ = \ \mathsf{E}[X],$$

тобто, властивість *виконується* для *принципу Ванга.*

Комбінуючи рівняння (2.25) для опуклої вниз зростаючої функції $v(\cdot)$ з нерівністю Єнсена $v(\mathsf{E}[X]) \leq \mathsf{E}[v(X)]$, робимо висновок, що властивість невід'ємності страхової надбавки *виконується* для *принципу середнього значення.*

Застосувавши нерівність Єнсена для опуклої вгору функції, з рівняння (2.28) отримуємо

$$U(W) \quad \leq \quad U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X] - \mathsf{E}[X]). \tag{3.3}$$

Так як $U'(\cdot) > 0$, то з нерівності (3.3) слідує $\pi_{\text{е.к.с.}}[X] \geq \mathsf{E}[X]$. Тобто, властивість *виконується* для *принципу еквівалентної/нульової корисності страховика.*

Застосувавши нерівність Єнсена для опуклої вгору функції, з рівняння (2.26) отримуємо

$$u(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X]) \quad \leq \quad u(\omega - \mathsf{E}[X]). \tag{3.4}$$

Так як функція $u'(\cdot) > 0$, то з нерівності (3.4) слідує, що $\pi_{\text{е.к.к.}}[X] \geq \mathsf{E}[X]$. Тобто, властивість також *виконується* для *принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта.*

Наступною природною властивістю принципів підрахунку премій є властивість адитивності.

Адитивність. Говоритимемо, що принцип підрахунку вартості страхових контрактів володіє *властивістю адитивності* (en: additivity property), якщо для будь-яких двох допустимих незалежних ризиків X_1 та X_2 виконується рівність $\pi[X_1 + X_2] = \pi[X_1] + \pi[X_2]$.

Властивість адитивності очевидно *виконується* для *нетто принципу*, *принципу математичного сподівання*, *дисперсного принципу* і *не виконується* для *принципу середньоквадратичного відхилення.*

Властивість *виконується* також для *принципу максимальних збитків.* Дійсно, якщо для двох незалежних ризиків X_1 та X_2 виконуються рівності $\text{ess sup}[X_i] = +\infty$, для $i = \overline{1, 2}$, то $\text{ess sup}[X_1 + X_2] = +\infty$, тобто, властивість виконується. Якщо ж хоча б для одного з них, скажімо для X_2, має місце нерівність $\text{ess sup}[X_2] < +\infty$, то

$$\begin{aligned}
\pi_{\text{макс.зб.}}[X_1 + X_2] \quad &= \quad \sup\{x : \ F_{X_1}(x - \text{ess sup}[X_2]) < 1\} \\
&= \quad \sup\{\sigma + \text{ess sup}[X_2] : \ F_{X_1}(\sigma) < 1\} \\
&= \quad \sup\{\sigma : \ F_{X_1}(\sigma) < 1\} + \text{ess sup}[X_2] \\
&= \quad \pi_{\text{макс.зб.}}[X_1] + \pi_{\text{макс.зб.}}[X_2].
\end{aligned}$$

Очевидно також, що властивість адитивності виконується для експоненційного принципу та принципу Есшера.

Покажемо, що дана властивість, взагалі кажучи, *не виконується* для *принципу відрегульованого ризиком* Розглянемо ризик X_1, що приймає значення 0 та a_1 з ймовірностями 1/2 та 1/2 та незалежний по відношенню до нього ризик X_2, що приймає значення 0 та a_2 з ймовірностями 1/2 та 1/2. Вважатимемо також, що $a_1 < a_2$. Тоді ризик $X_1 + X_2$ прийматиме значення 0, a_1, a_2, $a_1 + a_2$ з ймовірностями 1/4, 1/4, 1/4, 1/4. Нехай $\rho = 2$, тоді $\pi_{\text{від.риз.}(2)}[X_i] = a_i/\sqrt{2}$ для $i = \overline{1,2}$. З іншого боку, для ризику $X_1 + X_2$ маємо

$$\begin{aligned}\pi_{\text{від.риз.}(2)}[X_1 + X_2] &= \frac{a_1(\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)}{2} + \frac{a_2}{\sqrt{2}} \\ &\neq \pi_{\text{від.риз.}(2)}[X_1] + \pi_{\text{від.риз.}(2)}[X_2].\end{aligned}$$

Дану властивість не має також *квантільний принцип*. Дійсно, розглянемо ризик X_1, що прийматиме значення 0 та $a_1 > 0$ з ймовірностями 1/2 та 1/2 та незалежний з ним ризик X_2, що прийматиме значення 0 та $a_2 > 0$ з ймовірностями 1/2 та 1/2. Вважатимемо також, що $a_1 < a_2$. Тоді ризик $X_1 + X_2$ прийматиме значення 0, a_1, a_2, $a_1 + a_2$ з ймовірностями 1/4, 1/4, 1/4, 1/4. Оберемо ε таким, що $1/4 < \varepsilon \le 1/2$, тоді

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X_i] = \inf\{\delta :\ F_{X_i}(\delta) > 1 - \varepsilon\} = a_i, \quad \text{для} \quad i = \overline{1,2},$$

з іншого боку, для ризику $X_1 + X_2$ маємо

$$\begin{aligned}\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X_1 + X_2] &= \inf\{\delta :\ F_{X_1+X_2}(\delta) > 1 - \varepsilon\} = a_2 \\ &\neq \pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X_1] + \pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X_2].\end{aligned}$$

З невиконання властивості адитивності для принципу відрегульованого ризиком слідує, що властивість адитивності, взагалі кажучи, *не виконується* також і для *принципу Ванга.*

Для того щоб показати, що *принцип середнього значення*, взагалі кажучи, *не володіє* властивістю адитивності, достатньо розглянути випадок у якому є два незалежних, однаково розподілених ризики X_1 та X_2, що приймають значення 0 та 1 з ймовірностями 1/2 та 1/2 та функцію $v(x) = (x + 1)^2$, означену для $x > -1$.

Для демонстрації того, що властивість адитивності, взагалі кажучи, *не виконується* для *принципу еквівалентної/нульової корисності страховика/клієнта* достатньо розглянути два незалежні однаково розподілені ризики X_1 та X_2, що приймають значення 0 та 1 з ймовірностями 1/2 та 1/2, а також функції корисності $U(x) = u(x) = -(5 - x)^2$.

Мультиплікативна інваріантність. Говоритимемо, що метод підрахунку вартості страхових контрактів володіє *властивістю мультиплікативної інваріантності* (en: scale invariance property), якщо для будь-якого допустимого ризику X та будь-якої позитивної дійсної константи Θ виконується рівність $\pi[\Theta X] = \Theta\pi[X]$.

Легко бачити, що властивість мультиплікативної інваріантності *виконується* для *нетто принципу*, *принципу математичного сподівання* та *принципу середньоквадратичного відхилення* і *не виконується* для *дисперсного принципу.*

Властивість *має місце* для *принципу максимальних збитків*, бо

$$\begin{aligned}\pi_{\text{макс.зб.}}[\Theta X] &= \sup\{\delta :\ F_{\Theta X}(\delta) < 1\} \\ &= \sup\{\Theta\sigma :\ F_X(\sigma) < 1\} \\ &= \Theta \cdot \sup\{\sigma :\ F_X(\sigma) = 1\} = \Theta\pi_{\text{макс.зб.}}[X].\end{aligned}$$

Для того щоб показати, що властивість *не виконується* для *експоненційного принципу*, розглянемо ризик X, що має розподіл Пуассона з параметром λ. Для такого ризику маємо

$$\mathsf{E}[e^{\alpha X}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda e^{\alpha})^k}{k!} = \exp(\lambda e^{\alpha} - \lambda).$$

Проробивши схожі маніпуляції, для довільного $\Theta > 0$ отримуємо

$$\mathsf{E}[e^{\alpha\Theta X}] \;=\; \exp(\lambda e^{\alpha\Theta} - \lambda).$$

Звідси випливає вищесформульоване твердження.

Мультиплікативна інваріантність очевидним чином *не виконується* для *принципу Есшера.*

Однак, ця властивість *виконується* для *принципу відрегульованого ризиком.* Дійсно, в даному випадку, для будь-якого невід'ємного ризику X, та будь-якої позитивної константи Θ, отримуємо

$$\begin{aligned}
\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[\Theta X] &= \int\limits_0^{+\infty} [1 - F_{\Theta X}(x)]^{1/\rho} dx \;=\; \int\limits_0^{+\infty} [1 - F_X(x/\Theta)]^{1/\rho} dx \\
&= \Theta \int\limits_0^{+\infty} [1 - F_X(x/\Theta)]^{1/\rho} d\left(\frac{x}{\Theta}\right) \;=\; \Theta\, \pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X].
\end{aligned}$$

Аналогічними міркуваннями можна показати, що мультиплікативна інваріантність має місце також і для *принципу Ванга.* Покажемо, що властивість *виконується* для *квантільного принципу.* Дійсно, будь-якого ризику X та будь-якого $\varepsilon \in (0,\,1]$, отримуємо

$$\begin{aligned}
\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[\Theta X] &= \inf\{\delta :\; F_{\Theta X}(\delta) > 1 - \varepsilon\} \\
&= \inf\{\Theta\sigma :\; F_X(\sigma) > 1 - \varepsilon\} \\
&= \Theta \cdot \inf\{\sigma :\; F_X(\sigma) > 1 - \varepsilon\} \;=\; \Theta \cdot \pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X].
\end{aligned}$$

Властивість мультиплікативної інваріантності взагалі кажучи *не виконується* для *принципу еквівалентної/нульової корисності страховика/клієнта*, а також *принципу середнього значення*, бо згадана властивість не виконується для експоненційного принципу який є частковим випадком щойно згаданих принципів.

Консистентність. Говоритимемо, що метод підрахунку вартості страхових контрактів володіє *властивістю консистентності* (en: consistency property), якщо для будь-якого допустимого ризику X та будь-якої константи $c \in \mathbb{R}$ або $\mathbb{R}^+$ має місце рівність $\pi[c + X] = c + \pi[X]$.

Ця властивість має очевидний страховий зміст: збільшення ризику на c одиниць веде до автоматичного збільшення на c одиниць премії.

Легко бачити, що властивість консистентності *виконується* для *нетто принципу, дисперсного принципу, принципу середньоквадратичного відхилення* та *принципу максимальних збитків* і *не виконується* для *принципу математичного сподівання.*

Покажемо, що властивість консистентності *виконується* для *експоненційного принципу.* Дійсно, в даному випадку маємо

$$\begin{aligned}
\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[c + X] &= \frac{1}{\alpha}\log(e^{\alpha c}) + \frac{1}{\alpha}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]) \\
&= c + \frac{1}{\alpha}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]) \;=\; c + \pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X].
\end{aligned}$$

Аналогічно можна показати виконання даної властивості для *принципу Есшера.*

Покажемо, що властивість виконується для *принципу відрегульованого ризиком.* Дійсно, в даному випадку для будь-якого невід'ємного ризику X та довільної сталої

$c \in \mathbb{R}^+$, маємо

$$\begin{aligned}\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[c+X] &= \int\limits_0^c dx + \int\limits_c^{+\infty} [1 - F_X(x-c)]^{1/\rho} d(x-c) \\ &= c + \int\limits_0^{+\infty} [1 - F_X(x)]^{1/\rho} dx \;=\; c + \pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X].\end{aligned}$$

Дана властивість *виконується* для *квантільного принципу*, бо

$$\begin{aligned}\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[c+X] &= \inf\{\delta : \; F_{c+X}(\delta) > 1-\varepsilon\} \\ &= \inf\{\sigma + c : \; F_X(\sigma) > 1-\varepsilon\} \\ &= c + \inf\{\sigma : \; F_X(\sigma) > 1-\varepsilon\} \;=\; c + \pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X].\end{aligned}$$

Консистентність *виконується* також і для *принципу Ванга*, адже

$$\begin{aligned}\pi_{\text{Ванг}}[c+X] &= \int\limits_0^c dx + \int\limits_c^{+\infty} g(1 - F_X(x-c)) d(x-c) \\ &= c + \int\limits_0^{+\infty} g(1 - F_X(x)) dx \;=\; c + \pi_{\text{Ванг}}[X].\end{aligned}$$

Принцип середнього значення, взагалі кажучи, *не володіє* властивістю консистентності. Для демонстрації цього факту достатньо розглянути ризик X, що приймає значення 1 та 2 з ймовірностями $1/2$ та $1/2$ і функцію $v(x) = x^2$, означену для $x > 0$, та взявши $c = 1$.

Оскільки для будь-якого ризику X, будь-якої константи $c \in \mathbb{R}$, будь-якої допустимої $U(\cdot)$ та $W \geq 0$ справедливі тотожності

$$U(W) \;=\; \mathsf{E}[U(W + (\pi_{\text{е.к.с.}}[c+X] - c) - X)] \;=\; \mathsf{E}[U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X] - X)]$$

то з урахуванням $U'(\cdot) > 0$, маємо

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[c+X] - c = \pi_{\text{е.к.с.}}[X], \quad \text{або} \quad \pi_{\text{е.к.с.}}[c+X] = \pi_{\text{е.к.с.}}[X] + \mathrm{c},$$

тобто, властивість консистентності *виконується* для *принципу еквівалентної/нульової корисності страховика.*

Для демонстрації того, що властивість консистентності, взагалі кажучи, не виконується для принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта, достатньо розглянути ризик X, що приймає значення 0 та 1 з ймовірностями $1/2$ та $1/2$ і функцію корисності $u(x) = -(5-x)^2$, поклавши при цьому $c = 1$.

Відсутність грабування. Говоритимемо, що метод підрахунку вартості страхових контрактів володіє *властивістю відсутності грабування* (en: no rip-off property), якщо для будь-якого допустимого ризику X має місце нерівність $\pi[X] \leq \operatorname{ess\,sup}[X]$, тобто, отримана премія не перевищує істотного супремуму розміру страхової компенсації.

Властивість, очевидно, *виконується* для *нетто принципу.*

Для демонстрації того, що властивість відсутності грабування *не виконується* для *принципу математичного сподівання*, достатньо розглянути довільний невід'ємний вироджений ризик.

Для демонстрації того, що властивість *не виконується* для *дисперсного принципу* та *принципу середньоквадратично відхилення*, розглянемо ризик X, що приймає лише два значення, а саме 1 та 2 з ймовірностями 1/2 та 1/2. В даному випадку маємо

$$\pi_{\text{дисп.}(\alpha)}[X] \;=\; \frac{3}{2}+\frac{\alpha}{4} \;>\; \text{ess sup}[X] \;=\; 2, \quad \text{для} \quad \alpha > 2,$$

$$\pi_{\text{с.к.в.}(\alpha)}[X] \;=\; \frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2} \;>\; \text{ess sup}[X] \;=\; 2, \quad \text{для} \quad \alpha > 1.$$

Властивість відсутності грабування *виконується* для *принципу максимальних збитків*, *експоненційного принципу*, *принципу Есшера*, *принципу відрегульованого ризиком*, *квантільного принципу*, *принципу Ванга*, *принципу середнього значення*, адже

$$\pi_{\text{макс.зб.}}[X] \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \sup\{\delta:\; F_X(\delta)<1\} \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \text{ess sup}[X],$$

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] \;=\; \frac{1}{\alpha}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]) \;\le\; \frac{1}{\alpha}\log(\mathsf{E}[e^{\alpha(\text{ess sup}[X])}]) \;=\; \text{ess sup}[X],$$

$$\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] \;=\; \frac{\mathsf{E}\left[Xe^{\alpha X}\right]}{\mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right]} \;\le\; \frac{\text{ess sup}[X]\,\mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right]}{\mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right]} \;=\; \text{ess sup}[X],$$

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] \;=\; \int\limits_0^{\text{ess sup}[X]} [1-F_X(x)]^{1/\rho}dx \;\le\; \int\limits_0^{\text{ess sup}[X]} dx \;=\; \text{ess sup}[X],$$

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X] \;=\; \inf\{\delta:\; F_X(\delta)>1-\varepsilon\} \;\le\; \sup\{\delta:\; F_X(\delta)<1\} \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \text{ess sup}[X],$$

$$\pi_{\text{Ванг}}[X] = \int\limits_0^{\text{ess sup}[X]} g(1-F_X(x))dx \le \int\limits_0^{\text{ess sup}[X]} dx = \text{ess sup}[X],$$

$$\pi_{\text{с.з.}}[X] \;=\; v^{-1}(\mathsf{E}[v(X)]) \;\le\; v^{-1}(\mathsf{E}[v(\text{ess sup}[X])]) \;=\; \text{ess sup}[X].$$

З рівняння (2.28), врахувавши строгу монотонність функції $U(\cdot)$, отримуємо $U(W) \ge U(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X]-\text{ess sup}[X])$. Звідки слідує, що $\pi_{\text{е.к.с.}}[X] \le \text{ess sup}[X]$, тобто, властивість *виконується* для *принципу еквівалентної/нульової корисності страховика*.

В свою чергу, з рівняння (2.26), врахувавши монотонність функції $u(\cdot)$, отримуємо $u(\omega-\pi_{\text{е.к.к.}}[X]) \ge u(\omega-\text{ess sup}[X])$. З отриманої нерівності слідує $\pi_{\text{е.к.к.}}[X] \le \text{ess sup}[X]$, тобто, властивість відсутності грабування *виконується* також для *принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта*.

Ітеративність. Говоритимемо, що метод підрахунку вартості страхових контрактів володіє *властивістю ітеративності* (en: iterativity property), якщо для будь-яких двох допустимих ризиків X та Y виконується рівність $\pi\left[\pi[X|Y]\right] = \pi[X]$.

Завдяки ітеративності математичного сподівання, властивість ітеративності *виконується* для *нетто принципу*.

Таблиця 3.1

Ілюстративний приклад

	$X=1$	$X=2$
$Y=3$	1/4	1/4
$Y=4$	1/4	1/4

Для того щоб показати, що властивість ітеративності *не виконується* для *принципу математичного сподівання*, використаємо дані з таблиці 3.1. Порахувавши звичайну та повторну премію математичного сподівання, бачимо, що

$$\pi_{\text{м.с.}(\alpha)}[\pi_{\text{м.с.}(\alpha)}[X|Y]] \;=\; \frac{3}{2}(1+\alpha)^2 \;\neq\; \frac{3}{2}(1+\alpha) \;=\; \pi_{\text{м.с.}(\alpha)}[X].$$

Для ілюстрації *невиконання* властивості для *дисперсного принципу*, використаємо дані з таблиці 3.2. В даному випадку маємо

$$\pi_{\text{дисп.}(\alpha)}[\pi_{\text{дисп.}(\alpha)}[X|Y]] \;=\; \frac{4}{3}+\frac{2\alpha}{9}+\frac{2\alpha^2}{27}+\frac{\alpha^3}{81} \;\neq\; \frac{4}{3}+\frac{2\alpha}{9} \;=\; \pi_{\text{дисп.}(\alpha)}[X].$$

Таблиця 3.2

Ілюстративний приклад

	$X=1$	$X=2$
$Y=3$	1/6	1/3
$Y=4$	1/2	0

Використаємо той же самий вибір величин X та Y з таблиці 3.2, для того щоб показати, що властивість ітеративності *не виконується* для *принципу середньоквадратичного відхилення.*

$$\pi_{\text{с.к.в.}(\alpha)}[\pi_{\text{с.к.в.}(\alpha)}[X|Y]] \;=\; \frac{4}{3}+\frac{(2+\sqrt{2})\alpha}{6}+\frac{\alpha^2}{3\sqrt{2}} \;\neq\; \frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}\alpha}{3} \;=\; \pi_{\text{с.к.в.}(\alpha)}[X].$$

Однак дана властивість *виконується* для *принципу максимальних збитків*, бо

$$\begin{aligned}\pi_{\text{макс.зб.}}[\pi_{\text{макс.зб.}}[X|Y]] \;&=\; \sup\{\delta:\ F_{\pi_{\text{макс.зб.}}[X|Y]}(\delta)<1\}\\ &=\; \sup\{\delta: F_X(\delta)<1\} \;=\; \pi_{\text{макс.зб.}}[X].\end{aligned}$$

Покажемо, що властивість *виконується* для *експоненційного принципу*

$$\begin{aligned}\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X|Y]] \;&=\; \frac{1}{\alpha}\log\mathsf{E}[e^{\alpha\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X|Y]}] \;=\; \frac{1}{\alpha}\log\mathsf{E}[\exp(\alpha\frac{1}{\alpha}\log\mathsf{E}[e^{\alpha X}|Y])]\\ &=\; \frac{1}{\alpha}\log\mathsf{E}[\mathsf{E}[e^{\alpha X}|Y]] \;=\; \frac{1}{\alpha}\log\mathsf{E}[e^{\alpha X}] \;=\; \pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X].\end{aligned}$$

Для того щоб показати, що властивість ітеративності *не виконується* для *принципу Есшера*, використаємо розподіл з таблиці 3.2. Маємо

$$\mathsf{E}\left[\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X|Y]e^{\alpha\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X|Y]}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+4e^\alpha}{1+2e^\alpha}\cdot e^{\alpha\frac{1+4e^\alpha}{1+2e^\alpha}}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^\alpha,$$

$$\mathsf{E}\left[e^{\alpha\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X|Y]}\right] \;=\; \frac{1}{2}\cdot e^{\alpha\frac{1+4e^\alpha}{1+2e^\alpha}}+\frac{1}{2}\cdot e^\alpha,$$

тобто, повторна премія Есшера в даному випадку рівна

$$\begin{aligned}\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X|Y]] \;&=\; \frac{\mathsf{E}\left[\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X|Y]e^{\alpha\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X|Y]}\right]}{\mathsf{E}\left[e^{\alpha\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X|Y]}\right]}\\ &\neq\; \pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] \;=\; \frac{1+4e^\alpha}{1+2e^\alpha}.\end{aligned}$$

Таблиця 3.3

Ілюстративний приклад

	$X=1$	$X=2$
$Y=3$	$1/6$	$1/9$
$Y=4$	$1/2$	$2/9$

Для ілюстрації того, що *принцип відрегульований ризиком не володіє* властивістю ітеративності, використаємо дані з таблиці 3.3, поклавши при цьому $\rho = 2$.

$$\begin{aligned}\pi_{\text{від.риз.}(2)}[\pi_{\text{від.риз.}(2)}[X|Y]] &= 1+\sqrt{4/13}+\left(\sqrt{2/5}-\sqrt{4/13}\right)\cdot\sqrt{5/18}\\ &\neq 1+\sqrt{1/3} = \pi_{\text{від.риз.}(2)}[X].\end{aligned}$$

Для того щоб показати, що властивість ітеративності *не виконується* для *квантільного принципу*, розглянемо наступний контрприклад. Припустимо, що випадкова величина Y рівномірно розподілена на відрізку $[0,\, 1]$, а величина $X|Y$ рівномірно розподілена на відрізку $[0,\, Y]$. Випадкова величина $X|Y$ має наступну умовну функцію розподілу

$$F_{X|Y=y}(x) = \mathsf{P}\{X \le x|Y=y\} = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad x \ge y,\\ \frac{x}{y} & \text{для} \quad 0 \le x < y,\\ 0 & \text{для} \quad x < 0.\end{cases}$$

Але

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{X|Y=y}(x)dF_Y(y) = \int\limits_0^1 F_{X|Y=y}(x)dF_Y(y) = \int\limits_0^1 F_{X|Y=y}(x)dy.$$

Оскільки $F_{X|Y=y}(x) = 0$, при $x<0$, для всіх $y \in [0,1]$, то, маємо

$$F_X(x) = \int\limits_0^1 F_{X|Y=y}(x)dy = 0, \quad \text{при} \quad x < 0.$$

Аналогічно, оскільки $F_{X|Y=y}(x) = 1$, при $x \ge 1$, для всіх $y \in [0,1]$, то

$$F_X(x) = \int\limits_0^1 F_{X|Y=y}(x)dy = 1, \quad \text{при} \quad x \ge 1.$$

Знайдемо тепер значення функції розподілу $F_X(x)$ в точках $x \in [0,1)$. Врахувавши, що

$$F_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad y \le x,\\ \frac{x}{y} & \text{для} \quad y > x,\end{cases} \qquad \text{для} \quad y \in [0,1],$$

то, для $x \in [0,1)$, отримуємо

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int\limits_0^1 F_{X|Y=y}(x)dy = x + \int\limits_x^1 \frac{x}{y}dy = x + x\log(y)\Big|_{y=x}^1\\ &= x + x\log(1) - x\log(x) = x - x\log(x).\end{aligned}$$

Тоді, для будь-якого $\varepsilon \in (0, 1]$,

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X|Y] \;=\; \inf\{\delta : \; F_{X|Y}(\delta) > 1-\varepsilon\} \;=\; \inf\left\{\delta : \; \frac{\delta}{Y} > 1-\varepsilon\right\} = (1-\varepsilon)Y.$$

Випадкова величина $(1-\varepsilon)Y$ має наступну функцію розподілу

$$F_{(1-\varepsilon)Y}(y) \;=\; F_Y\left(y/(1-\varepsilon)\right),$$

тому, повторна квантільна премія має наступний вигляд

$$\begin{aligned}\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X|Y]] \;&=\; \inf\left\{\delta : \; F_Y\left(\delta/(1-\varepsilon)\right) > 1-\varepsilon\right\} \\ &=\; \inf\left\{\delta : \; \frac{\delta}{1-\varepsilon} > 1-\varepsilon\right\} \;=\; (1-\varepsilon)^2.\end{aligned}$$

Використавши отримане представлення для функції розподілу величини X, обчислюємо безумовну квантільну премію для ризику X

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X] \;=\; \inf\{\delta : \; F_X(\delta) > 1-\varepsilon\} \;=\; \inf\{\delta : \; \delta - \delta\log(\delta) > 1-\varepsilon\},$$

так як $\delta = (1-\varepsilon)^2$ не є розв'язком рівняння $\delta - \delta\log(\delta) = 1-\varepsilon$, то

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X|Y]] \;\neq\; \pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X],$$

тобто, квантільний принцип не володіє властивістю ітеративності.

З невиконання властивості ітеративності для принципу відрегульованого ризиком випливає також її *невиконання* для *принципу Ванга.*

Разом з тим властивість ітеративності *виконується* для *принципу середнього значення.* Дійсно, в даному випадку маємо

$$\begin{aligned}\pi_{\text{с.з.}}[\pi_{\text{с.з.}}[X|Y]] \;&=\; v^{-1}\left(\mathsf{E}[v(\pi_{\text{с.з.}}[X|Y])]\right) \;=\; v^{-1}\left(\mathsf{E}[\mathsf{E}[v(X|Y)]]\right) \\ &=\; v^{-1}\left(\mathsf{E}[\mathsf{E}[v(X)|Y]]\right) \;=\; v^{-1}\left(\mathsf{E}[v(X)]\right) \;=\; \pi_{\text{с.з.}}[X].\end{aligned}$$

Для того щоб продемонструвати, що принцип *нульової корисності страховика*, а як наслідок, і *принцип еквівалентної корисності страховика*, взагалі кажучи, *не володіють* властивістю ітеративності, використаємо дані з таблиці 3.2 та оберемо $U(x) = -(3-x)^2$. Неважко перевірити, що в даному випадку повторна премія нульової корисності страховика знаходиться з рівняння

$$-9 \;=\; -\left(3 - P_- + \frac{14-\sqrt{79}}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - (3 - P_- + 1)\cdot\frac{1}{2},$$

розв'язком якого не є $\pi_{\text{н.к.с.}}[X] = (13-\sqrt{79})/3$, тобто, властивість ітеративності, взагалі кажучи, не виконується для принципів корисності страховика.

Покажемо, що властивість ітеративності *виконується* для *принципу еквівалентної корисності клієнта*, а як наслідок, і для *принципу нульової корисності клієнта.* Дійсно, в даному випадку, для будь-яких двох ризиків X та Y, будь-якого початкового капіталу клієнта ω та будь-якої допустимої функції корисності клієнта $u(x)$, отримуємо

$$\begin{aligned}\pi_{\text{е.к.к.}}[\pi_{\text{е.к.к.}}[X|Y]] \;&=\; -u^{-1}(\mathsf{E}[u(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X|Y])]) + \omega \\ &=\; -u^{-1}(\mathsf{E}[u(\omega + u^{-1}(\mathsf{E}[u(\omega - X)|Y]) - \omega)]) + \omega \\ &=\; -u^{-1}(\mathsf{E}[\mathsf{E}[u(\omega - X)|Y]]) + \omega \\ &=\; -u^{-1}(\mathsf{E}[u(\omega - X)]) + \omega \;=\; \pi_{\text{е.к.к.}}[X].\end{aligned}$$

3.2 Характеризаційні теореми

В цьому підрозділі розглядаються характеризаційні теореми для декількох принципів підрахунку вартості страхових контрактів, означених з використанням допоміжних функцій. Представлені теореми стосуються властивостей адитивності, консистентності, ітеративності і мультиплікативної інваріантності і покривають принцип середнього значення, принцип еквівалентної/нульової корисності страховика та принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта.

Декілька разів, у межах доведення теорем, розглядається бернулівська випадкова величина X, яка приймає значення t (тут t — це ненульовий дійсний параметр) та 0 з ймовірностями p та $1-p$ відповідно. Будучи випадковою функцією параметрів p та t, ризик X у межах даного підрозділу позначатиметься X_p^t. Для доведення тверджень, що стосуються властивості адитивності, знадобиться бернулівська випадкова величина Y, незалежна по відношенню до ризику X_p^t, яка прийматиме значення h (тут h — це ненульовий дійсний параметр) та 0 з ймовірностями q та $1-q$ відповідно. Як випадкова функція параметрів h та q величина Y позначатиметься Y_q^h. Крім цього, для доведення тверджень, що стосуються лише строго позитивних ризиків знадобиться бернулівська випадкова величина X_p^ε, яка прийматиме значення $\varepsilon > 0$ та 1 з ймовірностями p та $1-p$ відповідно.

3.2.1 Принцип середнього значення

В цьому параграфі представлено характеризаційні теореми для згаданих вище чотирьох властивостей, якими може володіти або не володіти принцип середнього значення.

Звернемо увагу на те, що принцип середнього значення є інваріантним по відношенню до лінійних перетворень функції $v(x)$, тобто, принцип, що базується на функції $v(x)$ та принцип, що базується на функції $\bar{v}(x) := l_1 v(x) + l_2$, для $l_1 > 0$, породжуватимуть ідентичні премії. Тут умова $l_1 > 0$ накладається з метою збереження припущення додатності першої похідної функції $\bar{v}(x)$.

З метою спрощення обчислень в процесі пошуку необхідних та достатніх умов володіння властивостями адитивності та консистентності, спочатку отримуватимемо всі допустимі представлення у випадку коли відповідна властивість виконується для нормованої функції

$$\bar{v}(x) := l_1 v(x) + l_2, \quad \text{де } l_1 = 1/v'(0) \quad \text{та} \quad l_2 = -v(0)/v'(0), \tag{3.5}$$

а потім повертатимемося до вихідної функції $v(x)$.

Звернемо також увагу на те, що щойно означена нормована допоміжна функція $\bar{v}(x)$ задовольняє наступні граничні умови

$$\bar{v}(0) = 0, \quad \bar{v}'(0) = 1 \quad \text{та} \quad \bar{v}''(0) = \kappa, \tag{3.6}$$

для деякої дійсної константи $\kappa \geq 0$.

З метою уникнення повторів у тексті, нам потрібні будуть наступні дві леми.

Лема 3.1. **(a)** *Принцип середнього значення, що базується на функції $v(x) = ax + b$, для $a > 0$, еквівалентний нетто принципу.* **(b)** *Принцип середнього значення, що базується на функції $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, еквівалентний експоненційному принципу з параметром β.*

В справедливості обох тверджень леми 3.1 легко переконатися за допомогою безпосередньої перевірки.

Лема 3.2. *Принцип середнього значення для бернулівського ризику X_p^t задовольняє наступні тотожності:*

$$(\mathbf{a})\ \pi_{\text{с.з.}}[X_0^t] = 0; \qquad (\mathbf{b})\ \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = \frac{v(t)-v(0)}{v'(0)};$$

$$(\mathbf{c})\ \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = \bar{v}(t); \qquad (\mathbf{d})\ \frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = -\kappa\,\bar{v}^2(t).$$

Доведення. Вихідне рівняння (2.25) для бернулівського ризику X_p^t набуватиме наступного вигляду

$$v(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]) \;=\; pv(t) + (1-p)v(0). \tag{3.7}$$

Підставивши $p = 0$ в (3.7), отримуємо

$$v(\pi_{\text{с.з.}}[X_0^t]) \;=\; v(0). \tag{3.8}$$

Оскільки $v'(\cdot) > 0$, то з рівняння (3.8) слідує тотожність **(a)** леми 3.2

$$\pi_{\text{с.з.}}[X_0^t] \;=\; 0. \tag{3.9}$$

Диференціюючи (3.7) по p, отримаємо

$$v'(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t] = v(t) - v(0). \tag{3.10}$$

Підставляючи значення $p = 0$ в (3.10), отримуємо

$$v'(\pi_{\text{с.з.}}[X_0^t]) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0}\right) = v(t) - v(0). \tag{3.11}$$

Оскільки $v(\cdot)$ є строго зростаючою, то $v'(0) > 0$. Тому, взявши до уваги тотожність (3.9), з (3.11) отримуємо тотожність **(b)** леми 3.2

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = \frac{v(t)-v(0)}{v'(0)}. \tag{3.12}$$

Тоді з (3.12) та (3.6) випливає тотожність **(c)** леми 3.2

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = \bar{v}(t). \tag{3.13}$$

Продиференціювавши (3.10) по p, отримуємо

$$v''(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\right)^2 + v'(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]) \cdot \frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t] = 0. \tag{3.14}$$

Із рівняння (3.14), при $p = 0$, з використанням (3.9) та (3.13), а також граничних умов (3.6) отримуємо тотожність **(d)** леми 3.2

$$\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = -\kappa\,\bar{v}^2(t). \tag{3.15}$$

Це завершує доведення леми 3.2 □

Теорема 3.1. *Принцип середнього значення володіє властивістю адитивності тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax+b$, для $a > 0$, або $v(x) = \alpha e^{\beta x}+\gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Зауважимо, що клас функцій $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, містить у собі, зокрема, всі функції виду $v(x) = \tau^x$, для деякої дійсної сталої $\tau > 1$.

Доведення. Почнемо з доведення твердження достатності. У випадку $v(x) = ax+b$, при $a > 0$, для будь-яких двох незалежних ризиків X_1 та X_2, з рівняння (2.25) слідує

$$a\pi_{\text{с.з.}}[X_1 + X_2] + b \;=\; \mathsf{E}[a(X_1 + X_2) + b],$$

тобто, використовуючи твердження **(a)** леми 3.1, отримуємо

$$\pi_{\text{с.з.}}[X_1 + X_2] \;=\; \mathsf{E}[X_1] + \mathsf{E}[X_2] \;=\; \pi_{\text{с.з.}}[X_1] + \pi_{\text{с.з.}}[X_2].$$

Отже, у лінійному випадку достатність доведена.

Розглянемо випадок $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, при $\min[\alpha, \beta] > 0$. В даному випадку для будь-яких двох незалежних ризиків X_1 та X_2 з рівняння (2.25) отримуємо

$$\alpha \exp(\beta\, \pi_{\text{с.з.}}[X_1 + X_2]) + \gamma \;=\; \mathsf{E}[\alpha \exp(\beta X_1 + \beta X_2) + \gamma] \;=\; \alpha\, \mathsf{E}[e^{\beta X_1}]\, \mathsf{E}[e^{\beta X_2}] + \gamma,$$

тобто, використавши тотожність **(b)** леми 3.1, маємо

$$\pi_{\text{с.з.}}[X_1 + X_2] \;=\; \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta\, X_1}]) + \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta\, X_2}]) \;=\; \pi_{\text{с.з.}}[X_1] + \pi_{\text{с.з.}}[X_2],$$

що доводить достатність і в цьому випадку.

Оскільки структури ризиків Y_q^h та X_p^t подібні, то використовуючи твердження **(a)** та **(c)** леми 3.2, отримаємо

$$\pi_{\text{с.з.}}[Y_0^h] = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{с.з.}}[Y_q^h]\bigg|_{q=0} = \bar{v}(h). \tag{3.16}$$

Легко бачити, що ризик $X_p^t+Y_q^h$ прийматиме значення $t+h$, t, h, та 0 з ймовірностями $p\,q$, $p\,(1-q)$, $(1-p)q$, та $(1-p)(1-q)$ відповідно.

У випадку адитивного принципу середнього значення повинна виконуватися наступна тотожність

$$\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t + Y_q^h] \;=\; \pi_{\text{с.з.}}[X_p^t] + \pi_{\text{с.з.}}[Y_q^h],$$

отже, вихідне рівняння (2.25) для ризику $X_p^t + Y_q^h$, що базується на нормованій функції $\bar{v}(x)$, з урахуванням граничної умови $\bar{v}(0) = 0$, матиме наступний вигляд

$$\bar{v}(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t] + \pi_{\text{с.з.}}[Y_q^h]) \;=\; \bar{v}(t+h)pq + \bar{v}(t)p(1-q) + \bar{v}(h)(1-p)q. \tag{3.17}$$

Диференціюючи (3.17) по p, отримаємо

$$\bar{v}'(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t] + \pi_{\text{с.з.}}[Y_q^h]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t] \;=\; \bar{v}(t+h)q + \bar{v}(t)(1-q) - \bar{v}(h)q. \tag{3.18}$$

Продиференціювавши потім (3.18) по q, матимемо

$$\bar{v}''(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t] + \pi_{\text{с.з.}}[Y_q^h]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t] \cdot \frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{с.з.}}[Y_q^h] \;=\; \bar{v}(t+h) - \bar{v}(t) - \bar{v}(h). \tag{3.19}$$

Підставивши $p = q = 0$ в рівняння (3.19) і використавши тотожності (3.9), (3.13) та (3.16), а також граничну умову $\bar{v}''(0) = \kappa$, отримуємо рівняння, яке нормована функція $\bar{v}(\cdot)$ повинна задовольняти у випадку адитивного принципу середнього значення, а саме

$$\kappa\,\bar{v}(t)\bar{v}(h) = \bar{v}(t+h) - \bar{v}(t) - \bar{v}(h). \tag{3.20}$$

Для розв'язування рівняння (3.20), розглядатимемо окремо випадки $\kappa = 0$ та $\kappa > 0$.

У випадку $\kappa = 0$ матимемо

$$\bar{v}(t+h) = \bar{v}(t) + \bar{v}(h). \tag{3.21}$$

Перейшовши до частинних похідних відносно параметра h з обох сторін рівняння (3.21), отримуємо

$$\bar{v}'(t+h) = \bar{v}'(h). \tag{3.22}$$

Звідси, з використанням (3.6), отримуємо

$$\bar{v}'(t) = 1. \tag{3.23}$$

Параметр t приймав значення з $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, проте, завдяки неперервності (бо функція $\bar{v}(\cdot)$ є двічі диференційовною) функції $\bar{v}'(\cdot)$, рівняння (3.23) можна переписати в термінах вихідного параметра $x \in \mathbb{R}$.

Комбінуючи рівняння (3.23) з граничною умовою $\bar{v}(0) = 0$ маємо

$$\bar{v}(x) = x. \tag{3.24}$$

Звідси, з урахуванням (3.5) матимемо $v(x) = v'(0)x + v(0)$ або $v(x) = ax + b$ з деякими дійсними сталими a та b. Умова монотонності $v'(0) > 0$ дає додаткове обмеження для параметра a: параметр a повинен бути строго позитивною константою.

Нехай тепер $\kappa > 0$. Продиференціювавши послідовно тотожність (3.20) по t і h, отримаємо

$$\bar{v}''(t+h) = \kappa\,\bar{v}'(t)\bar{v}'(h). \tag{3.25}$$

Перейшовши до границі при h прямуючому до нуля у (3.25) та використавши граничну умову $\bar{v}'(0) = 1$, отримуємо

$$\bar{v}''(t) = \kappa\,\bar{v}'(t). \tag{3.26}$$

З рівняння (3.26), використавши граничні умови $\bar{v}(0) = 0$ та $\bar{v}'(0) = 1$, отримуємо допустиме представлення для нормованої функції $\bar{v}(\cdot)$ у випадку $\bar{v}''(0) > 0$. Параметр t приймав значення в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, проте, завдяки неперервності, можемо представити функцію $\bar{v}(\cdot)$ в термінах вихідного параметра $x \in \mathbb{R}$

$$\bar{v}(x) = \frac{e^{\kappa x} - 1}{\kappa}. \tag{3.27}$$

Беручи до уваги те, що $\bar{v}''(0) = \kappa$, використавши представлення (3.27), та перехідну тотожність (3.5), отримуємо відповідне допустиме представлення для вихідної функції $v(x)$, а саме

$$v(x) = \frac{v'(0)}{\bar{v}''(0)} e^{\bar{v}''(0)x} - \frac{v'(0)}{\bar{v}''(0)} + v(0). \tag{3.28}$$

З представлення (3.28) випливає, що у випадку $\bar{v}''(0) > 0$ функція $v(x)$ має бути функцією виду $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$ з деякими дійсними сталими α, β, та γ. Умови $v'(0) > 0$ та $\bar{v}''(0) > 0$ потребують додаткових обмежень для параметрів α та β: обидва параметри мусять бути позитивними сталими або, іншими словами, $\min[\alpha, \beta] > 0$.

Теорема 3.1 доведена. □

Покажемо тепер, що принцип середнього значення співпадає з нетто принципом тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax + b$, для $a > 0$, та співпадає з експоненційним принципом тоді й лише тоді, коли $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha,\, \beta] > 0$.

Для цього нам потрібна буде наступна нерівність

$$\pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] \;=\; \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X}]) \;\geq\; \frac{1}{\beta}\log(e^{\beta\,\mathsf{E}[X]}) \;=\; \mathsf{E}[X] \;=\; \pi_{\text{нетто}}[X],$$

і більш того, строга рівність в нерівності $\mathsf{E}[e^{\beta X}] \geq e^{\beta\,\mathsf{E}[X]}$ з'являється тоді й лише тоді, коли $\mathsf{P}\{X = C\} = 1$ для деякої сталої $C \in \mathbb{R}$, див. лему А.1 з додатку А. Тому, взагалі кажучи, нетто принцип не є частковим випадком експоненційного принципу і навпаки.

Припустимо тепер, що для деякої функції $v(x)$, відмінної від експоненційної функції, принцип середнього значення є еквівалентним експоненційному принципу. Тоді, завдяки адитивності експоненційного принципу такий метод страхового оцінювання повинен бути адитивним. Проте, в межах доведення теореми 3.1 демонструвалося, що принцип середнього значення володіє властивістю адитивності тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax+b$, для $a > 0$, чи $v(x) = \alpha e^{\beta x}+\gamma$, для $\min[\alpha,\, \beta] > 0$. Тут випадок $v(x) = ax+b$, для $a > 0$, відповідає експоненційному принципу, який, як щойно зазначалося, не є частковим випадком експоненційного принципу. Тобто, як бачимо, вихідне припущення стосовно існування функції $v(x)$, відмінної від експоненційної, яка б породжувала еквівалентний експоненційному принцип середнього значення приводить до протиріччя. Тому випадок $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha,\, \beta] > 0$, дійсно є єдиним випадком співпадання принципу середнього значення з експоненційним принципом.

Користуючись схожою технікою від противного, можна зробити висновок, що випадок $v(x) = ax + b$, для $a > 0$, є єдиним випадком співпадання принципу середнього значення з нетто принципом.

Наступна теорема демонструє необхідні та достатні умови володіння властивістю консистентності принципом середнього значення.

Теорема 3.2. *Принцип середнього значення володіє властивістю консистентності тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax + b$, для $a > 0$, чи $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Доведення. Покажемо спочатку справедливість твердження достатності. Почнемо з випадку лінійної функції $v(x)$, а саме, $v(x) = ax + b$, для $a > 0$. В даному випадку, для будь-якого ризику X та будь-якої дійсної сталої c з рівняння (2.25) отримуємо

$$a\,\pi_{\text{с.з.}}[X + c] + b \;=\; \mathsf{E}[a(X + c) + b],$$

отже, використовуючи твердження **(a)** леми 3.1, маємо

$$\pi_{\text{с.з.}}[X + c] \;=\; \mathsf{E}[X] + c \;=\; \pi_{\text{с.з.}}[X] + c,$$

тобто, принцип середнього значення володіє властивістю консистентності у випадку лінійної функції $v(x)$.

Перейдемо до розгляду випадку $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha,\, \beta] > 0$. В даному випадку, для будь-якого ризику X та довільної дійсної сталої c з рівняння (2.25) слідує

$$\alpha\, e^{\beta\,\pi_{\text{с.з.}}[X+c]} + \gamma \;=\; \mathsf{E}[\alpha\, e^{\beta(X+c)} + \gamma] \;=\; \alpha \cdot \mathsf{E}[e^{\beta X}] \cdot e^{\beta c} + \gamma,$$

отже, використавши твердження **(b)** леми 3.1, отримуємо

$$\pi_{\text{с.з.}}[X + c] \;=\; \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X}]) + c \;=\; \pi_{\text{с.з.}}[X] + c,$$

тобто, принцип середнього значення володіє властивістю консистентності також у випадку експоненційної функції $v(x)$, що й закінчує доведення достатності.

Перейдемо до доведення необхідності.

У випадку консистентного принципу середнього значення для будь-якого ризику X повинна виконуватися тотожність

$$\pi_{\text{с.з.}}[X+c] \;=\; \pi_{\text{с.з.}}[X]+c, \quad \text{для} \quad c\in\mathbb{R},$$

отже, рівняння (2.25), що базується на нормованій функції $\bar{v}(x)$, яка породжуватиме консистентний принцип середнього значення, для ризику X_p^t+c матиме вигляд

$$\bar{v}(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]+c) \;=\; \bar{v}(t+c)\cdot p+\bar{v}(c)\cdot(1-p). \tag{3.29}$$

Продиференціювавши (3.29) по p, матимемо

$$\bar{v}'(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]+c)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t] \;=\; \bar{v}(t+c)-\bar{v}(c). \tag{3.30}$$

Ще одне диференціювання за параметром p приводить до рівності

$$\bar{v}''(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]+c)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\right)^2+\bar{v}'(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]+c)\cdot\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t] \;=\; 0 \tag{3.31}$$

Підставивши $p=0$ в рівняння (3.31) та використавши тотожності (3.9) та (3.13), отримуємо

$$\bar{v}''(c)\cdot\bar{v}^2(t)+\bar{v}'(c)\cdot\left.\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\right|_{p=0}=0. \tag{3.32}$$

Оскільки $\bar{v}'(x)>0$, то (3.32) можна переписати у вигляді

$$\left.\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\right|_{p=0}=-\frac{\bar{v}''(c)\cdot\bar{v}^2(t)}{\bar{v}'(c)}. \tag{3.33}$$

Врахувавши тепер тотожність **(d)** леми 3.2 та (3.33), отримаємо

$$-\kappa\,\bar{v}^2(t)=-\frac{\bar{v}''(c)\cdot\bar{v}^2(t)}{\bar{v}'(c)} \tag{3.34}$$

або

$$\bar{v}''(c)=\kappa\bar{v}'(c), \quad \text{для всіх } c\in\mathbb{R}. \tag{3.35}$$

Рівняння (3.35) — це рівняння, яке нормована функція $\bar{v}(\cdot)$ повинна задовольняти у випадку консистентного принципу середнього значення. Розв'язуючи отримане рівняння, розглядатимемо окремо випадки $\kappa=0$ та $\kappa>0$.

У випадку $\kappa=0$ рівняння (3.35) спрощується до наступного

$$\bar{v}''(c)=0. \tag{3.36}$$

З рівняння (3.36), приймаючи до уваги граничні умови $\bar{v}(0)=0$ та $\bar{v}'(0)=1$, отримуємо

$$\bar{v}(x)=x. \tag{3.37}$$

З урахуванням тотожності (3.5) матимемо тепер, що

$$v(x)=v'(0)x+v(0),$$

отже, у випадку $\kappa = 0$ функція $v(x)$ повинна бути функцією виду $v(x) = ax + b$ з деякими дійсними сталими a та b. Припущення додатності першої похідної функції $v(x)$ дає додаткове обмеження для параметра a: параметр a повинен бути строго позитивною константою.

Перейдемо до розгляду випадку $\kappa > 0$. З рівняння (3.35), використовуючи граничні умови $\bar{v}'(0) = 1$ та $\bar{v}(0) = 0$, матимемо

$$\bar{v}(x) = \frac{e^{\kappa x} - 1}{\kappa}, \quad \text{для } x \in \mathbb{R}. \tag{3.38}$$

Приймаючи до уваги те, що $\bar{v}''(0) = \kappa$, використавши представлення (3.38) та перехідну тотожність (3.5), отримуємо відповідне допустиме представлення для вихідної функції $v(x)$

$$v(x) = \frac{v'(0)}{\bar{v}''(0)} e^{\bar{v}''(0)x} - \frac{v'(0)}{\bar{v}''(0)} + v(0). \tag{3.39}$$

З представлення (3.39) випливає, що у випадку $\bar{v}''(0) > 0$ функція $v(x)$ мусить бути функцією виду $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$ з деякими дійсними сталими α, β, та γ. Умови $v'(0) > 0$ та $\bar{v}''(0) > 0$ потребують додаткових обмежень для значень параметрів α та β: обидва згадані параметри мусять бути позитивними сталими, або, що те саме, $\min[\alpha, \beta] > 0$.

Це завершує доведення теореми 3.2. □

Зауваження 3.1. Звернемо увагу на те, що твердження необхідності теореми 3.1 слідує також з твердження теореми 3.2 скомбінованого з властивістю відсутності необгрунтованої надбавки на ризик, яка, очевидно, виконується для принципу середнього значення.

На відміну від принципу еквівалентної корисності страховика, який володіє властивістю ітеративності лише при спеціальному виборі функції корисності, принцип середнього значення володіє властивістю ітеративності при довільному виборі функції $v(x) \in C^2(\mathbb{R})$ такої, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$, а саме має місце теорема.

Теорема 3.3. *Принцип середнього значення володіє властивістю ітеративності при довільному виборі функції $v(x) \in C^2(\mathbb{R})$ такої, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для $x \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Дійсно, для будь-яких двох ризиків X та Y та довільної допустимої функції $v(x)$ отримуємо

$$\begin{aligned} \pi_{\text{с.з.}}[\pi_{\text{с.з.}}[X|Y]] &= v^{-1}(\mathsf{E}[v(\pi_{\text{с.з.}}[X|Y])]) = v^{-1}(\mathsf{E}[v(v^{-1}(\mathsf{E}[v(X)|Y]))]) \\ &= v^{-1}(\mathsf{E}[\mathsf{E}[v(X)|Y]]) = v^{-1}(\mathsf{E}[v(X)]) = \pi_{\text{с.з.}}[X]. \end{aligned}$$

Тобто, твердження теореми 3.3 дійсно має місце. □

Наступна теорема демонструє необхідні та достатні умови володіння властивістю мультиплікативної інваріантності принципом середнього значення підрахунку вартості страхових контрактів.

Теорема 3.4. *Принцип середнього значення володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax+b$, для $a > 0$, тобто, лише у випадку співпадання з нетто принципом.*

Доведення. Почнемо з доведення твердження достатності. З рівняння (2.25) для будь-якого ризику X та довільного $\Theta > 0$ у випадку $v(x) = ax + b$, при $a > 0$, слідує, що

$$a\pi_{\text{с.з.}}[\Theta X] + b = \mathsf{E}[a\Theta X + b] = a\Theta\mathsf{E}[X] + b,$$

тобто, використовуючи твердження **(a)** леми 3.1, отримуємо

$$\pi_{\text{с.з.}}[\Theta X] \;=\; \Theta \mathsf{E}[X] \;= \Theta\pi_{\text{с.з.}}[X],$$

отже, властивість мультиплікативної інваріантності виконується у випадку лінійної функції $v(x)$.

Перейдемо до доведення твердження необхідності.

При довільному $\Theta > 0$ вихідне рівняння (2.25) для ризику ΘX_p^t у випадку мультиплікативно інваріантного принципу середнього значення набуватиме наступного вигляду

$$v(\Theta\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]) \;=\; pv(\Theta t) + (1-p)v(0). \tag{3.40}$$

Диференціюючи (3.40) за параметром p, отримуємо

$$v'(\Theta\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]) \cdot \Theta \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t] \;=\; v(\Theta t) - v(0). \tag{3.41}$$

Звідси, при $p = 0$ з використанням тотожності **(a)** леми 3.2 та нерівності $v'(0) > 0$, матимемо

$$\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^t]\right|_{p=0} = \frac{v(\Theta t) - v(0)}{v'(0)\cdot\Theta}. \tag{3.42}$$

Врахувавши тепер тотожність **(b)** леми 3.2, рівняння (3.42) набере вигляду

$$v(\Theta t) - v(0) \;=\; \Theta \cdot (v(t) - v(0)), \tag{3.43}$$

продиференціювавши яке за t, отримаємо

$$v'(\Theta t) \;=\; v'(t). \tag{3.44}$$

Беручи тепер до уваги монотонність функції $v(\cdot)$ та неперервність функції $v'(\cdot)$, матимемо, що $v'(x) \;=\; a > 0$, для $x \in \mathbb{R}$, або

$$v(x) \;=\; ax + b, \quad \text{для деякої константи } b.$$

Це завершує доведення теореми 3.4. □

При застосуванні принципу середнього значення до оцінювання спеціальних класів ризиків, достатньо означити функцію $v(x)$ на деякій множині $A \subset \mathbb{R}$ зі збереженням властивостей монотонності та опуклості вниз, тобто, функція $v(x)$ повинна бути такою, що $v'(x) > 0$ та $v''(x) \geq 0$ для всіх $x \in A$, крім цього, рівняння (2.25) мусить зберігати коректний математичний зміст для всіх ризиків зі згаданого класу.

Цікаво бачити, що при застосуванні принципу середнього значення до оцінювання вартості лише строго позитивних ризиків, клас функцій $v(x)$, які породжують мультиплікативно інваріантні премії, є ширшим ніж, відповідний клас функцій у загальному випадку. Останнє сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 3.5. *Принцип середнього значення, застосований до оцінювання лише строго позитивних ризиків, володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $v(x) = ax^\kappa + b$, *для* $a > 0$ *та* $\kappa \geq 1$, *при* $x \in (0, +\infty)$.

Звернемо увагу на те, що для функції $v(x) = ax^\kappa + b$, при $a > 0$ та $\kappa > 1$, умова $v'(x) > 0$ порушується в точці $x = 0$. Отже, твердження теореми 3.5 не протирічить твердженню теореми 3.4.

Доведення. У випадку строго позитивного ризику X має місце нерівність $\mathsf{E}[X] > 0$, тому, комбінуючи нерівність Єнсена $v(\mathsf{E}[X]) \le \mathsf{E}[v(X)]$ з рівнянням (2.25), бачимо, що принцип середнього значення буде коректно означеним, якщо означити функцію $v(x)$ лише для $x \in (0, +\infty)$ зі збереженням властивостей монотонності та опуклості вниз.

Почнемо з доведення твердження достатності. Дійсно, у випадку $v(x) = ax^{\kappa} + b$, при $a > 0$ та $\kappa \ge 1$, для будь-якого строго додатного ризику X вихідне рівняння (2.25) набуватиме наступного вигляду

$$a(\pi_{\text{с.з.}}[X])^{\kappa} + b \;=\; \mathsf{E}[aX^{\kappa} + b] \;=\; a\mathsf{E}[X^{\kappa}] + b,$$

отже, в розглянутому випадку

$$\pi_{\text{с.з.}}[X] \;=\; (\mathsf{E}[X^{\kappa}])^{1/\kappa}.$$

З іншого боку, для тієї ж функції $v(x)$, того ж ризику X та довільного $\Theta > 0$, з вихідного рівняння (2.25) слідує

$$a(\pi_{\text{с.з.}}[\Theta X])^{\kappa} + b \;=\; \mathsf{E}[a(\Theta X)^{\kappa} + b] \;=\; a\Theta^{\kappa}\mathsf{E}[X^{\kappa}] + b$$

тобто, в даному випадку отримуємо

$$\pi_{\text{с.з.}}[\Theta X] \;=\; \Theta(\mathsf{E}[X^{\kappa}])^{1/\kappa} \;=\; \Theta\pi_{\text{с.з.}}[X],$$

з чого маємо, що принцип середнього значення звужений до оцінювання лише строго позитивних ризиків володітиме властивістю мультиплікативної інваріантності у випадку $v(x) = ax^{\kappa} + b$, при $a > 0$ та $\kappa \ge 1$, означеній лише для $x \in (0, +\infty)$.

Перейдемо тепер до доведення необхідності.

Для вищеозначеного ризику X_p^{ε} вихідне рівняння (2.25) набуватиме наступного вигляду

$$v(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^{\varepsilon}]) \;=\; pv(\varepsilon) + (1-p)v(1). \tag{3.45}$$

З рівняння (3.45) слідує

$$v(\pi_{\text{с.з.}}[X_0^{\varepsilon}]) \;=\; 0 \cdot v(\varepsilon) + 1 \cdot v(1),$$

більш того, так як функція $v(x)$ є строго монотонною, то

$$\pi_{\text{с.з.}}[X_0^{\varepsilon}] \;=\; 1. \tag{3.46}$$

Перейшовши до частинних похідних відносно параметра p з обох сторін рівняння (3.45), отримуємо

$$v'(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^{\varepsilon}]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^{\varepsilon}] \;=\; v(\varepsilon) - v(1). \tag{3.47}$$

При $p = 0$ з рівняння (3.47), матимемо

$$v'(\pi_{\text{с.з.}}[X_0^{\varepsilon}]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^{\varepsilon}]\bigg|_{p=0} \;=\; v(\varepsilon) - v(1). \tag{3.48}$$

З урахуванням (3.46), рівняння (3.48) набере вигляду

$$v'(1) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^{\varepsilon}]\bigg|_{p=0} \;=\; v(\varepsilon) - v(1). \tag{3.49}$$

Перейдемо до частинних похідних відносно параметра p з обох сторін рівняння (3.47)

$$v''(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]\right)^2 + v'(\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]) \cdot \frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon] \;=\; 0. \tag{3.50}$$

Підставивши $p = 0$ в рівняння (3.50), та використавши тотожність (3.46), отримуємо

$$v''(1) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]\bigg|_{p=0}\right)^2 + v'(1) \cdot \left(\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]\bigg|_{p=0}\right) \;=\; 0. \tag{3.51}$$

З урахуванням монотонності функції $v(x)$ із (3.49) при $\varepsilon < 1$ слідує

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]\bigg|_{p=0} \;\neq\; 0, \tag{3.52}$$

а тому рівняння (3.51) може бути переписаним в наступному вигляді

$$\frac{v''(1)}{v'(1)} \;=\; -\frac{\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]\Big|_{p=0}}{\left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]\Big|_{p=0}\right)^2}. \tag{3.53}$$

При довільному $\Theta > 0$, вихідне рівняння (2.25) для ризику ΘX_p^ε у випадку мультиплікативно інваріантного принципу середнього значення звуженого до оцінювання лише строго позитивних ризиків набуватиме наступного вигляду

$$v(\Theta\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]) \;=\; pv(\Theta\varepsilon) + (1-p)v(\Theta). \tag{3.54}$$

Перейшовши до частинних похідних відносно параметра p з обох сторін рівняння (3.54), отримуємо

$$\begin{aligned} v''(\Theta\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]) \cdot \Theta^2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]\right)^2 &+ \\ + v'(\Theta\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]) \cdot \Theta \cdot \frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon] &\;=\; 0. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Підставивши $p = 0$ в рівняння (3.55), скоротивши множник Θ та використавши тотожність (3.46), маємо

$$v''(\Theta) \cdot \Theta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]\bigg|_{p=0}\right)^2 + v'(\Theta) \cdot \frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]\bigg|_{p=0} \;=\; 0. \tag{3.56}$$

Так як $v'(\Theta) > 0$, то використавши тотожність (3.52), рівняння (3.56) можна переписати наступним чином

$$\frac{v''(\Theta)\cdot\Theta}{v'(\Theta)} \;=\; -\frac{\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]\Big|_{p=0}}{\left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{с.з.}}[X_p^\varepsilon]\Big|_{p=0}\right)^2}. \tag{3.57}$$

З (3.53) та (3.57) отримуємо

$$\frac{v''(\Theta)\cdot\Theta}{v'(\Theta)} = \frac{v''(1)}{v'(1)}, \quad \text{для всіх } \Theta > 0. \tag{3.58}$$

Позначивши $v''(1)/v'(1) =: \varkappa$ (так як $v''(1) \geq 0$ та $v'(1) > 0$ то $\varkappa \geq 0$) та проінтегрувавши (3.58), отримаємо

$$v(x) \;=\; \frac{C_1}{\varkappa+1}x^{\varkappa+1} + C_2,$$

тобто, функція $v(x)$ повинна бути функцією виду

$$v(x) \;=\; ax^{\kappa} + b, \quad \text{з деякими дійсними сталими } a,\ b, \text{ та } \kappa.$$

З того що $C_1 > 0$ та $\varkappa \geq 0$ слідує $a > 0$; а з $\varkappa \geq 0$ слідує $\kappa \geq 1$.

Це завершує доведення теореми 3.5. □

3.2.2 Принцип еквівалентної корисності страховика

В цьому параграфі представлено характеризаційні теореми для властивостей адитивності, консистентності, ітеративності та мультиплікативної інваріантності якими може володіти або не володіти принцип еквівалентної/нульової корисності страховика.

Звернемо увагу на те, що принцип еквівалентної/нульової корисності страховика є інваріантним по відношенню до лінійних перетворень функції корисності капіталу страховика $U(x)$, тобто, принцип, що базується на функції $U(x)$, та принцип, що базується на функції $\overline{U}(x) = l_1U(x) + l_2$, для $l_1 > 0$, породжуватимуть однакові премії. Умова $l_1 > 0$ накладається для збереження припущення зростання функції корисності капіталу страховика.

В подальшому, з метою спрощення обчислень, при доведенні тверджень, що стосуються властивості адитивності, фіксуємо значення початкового капіталу страховика W, отримуємо допустимі представлення для функції

$$\overline{U}(x) = l_1U(x) + l_2, \quad \text{при} \quad l_1 = \frac{1}{U'(W)} \quad \text{та} \quad l_2 = -\frac{U(W)}{U'(W)}, \tag{3.59}$$

а потім повертаємося до вихідної функції корисності страховика $U(x)$.

Звернемо увагу на те, що щойно означена нормована функція корисності капіталу страховика $\overline{U}(x)$ задовольняє наступні граничні умови

$$\overline{U}(W) = 0, \quad \overline{U}'(W) = 1 \quad \text{та} \quad \overline{U}''(W) = \kappa \tag{3.60}$$

з деякою дійсною константою $\kappa \leq 0$.

З метою уникнення повторів у тексті, нам потрібні будуть наступні дві леми.

Лема 3.3. **(a)** *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика, що базується на функції $U(x) = ax + b$, для $a > 0$, еквівалентний нетто принципу.* **(b)** *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика, що базується на функції $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, еквівалентний експоненційному принципу з параметром β.*

В справедливості обох тверджень леми 3.3 легко переконатися за допомогою безпосередньої перевірки.

Лема 3.4. *Принцип еквівалентної корисності страховика для бернулівського ризику X_p^t задовольняє наступні тотожності:*

$$\textbf{(a)}\ \pi_{\text{е.к.с.}}[X_0^t] = 0; \qquad \textbf{(b)}\ \pi_{\text{е.к.с.}}[X_1^t] = t;$$

$$\textbf{(c)}\ U'(W) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} \;=\; U(W) - U(W-t);$$

$$\textbf{(d)}\ U'(W)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\right|_{p=1} = U(W+t)-U(W);$$

$$\textbf{(e)}\ \left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\right|_{p=1} = \overline{U}(W+t).$$

Доведення. Рівняння еквівалентної корисності страховика (2.28) для довільного вибору початкового капіталу страховика W та довільної функції корисності страховика $U(\cdot)$ для ризику X_p^t набуватиме вигляду

$$U(W) = U(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]-t)\cdot p + U(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t])\cdot(1-p). \tag{3.61}$$

Підставивши $p=0$ в рівняння (3.61), отримуємо

$$U(W) = U(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_0^t]). \tag{3.62}$$

Оскільки $U'(x)>0$ для всіх x, то з рівняння (3.62) випливає рівність

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X_0^t] = 0, \tag{3.63}$$

що й доводить тотожність **(a)** леми 3.4.

Підставивши $p=1$ в рівняння (3.61), отримуємо

$$U(W) = U(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_1^t]-t), \tag{3.64}$$

знову ж таки, використавши строгу монотонність функції $U(\cdot)$, з рівняння (3.67) отримуємо тотожність **(b)** леми 3.4

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X_1^t] = t. \tag{3.65}$$

Перейшовши до частинних похідних відносно параметра p з обох сторін рівняння (3.61), отримуємо

$$\begin{aligned} 0\ &= U'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]-t)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot p \\ &+\ U'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t])\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot(1-p) \\ &+\ U(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]-t) - U(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Підставивши $p=0$ в рівняння (3.66) та використавши тотожність (3.63), отримуємо тотожність **(c)** леми 3.4

$$U'(W)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\right|_{p=0} = U(W)-U(W-t). \tag{3.67}$$

Підставивши $p=1$ в рівняння (3.66) та використавши тотожність (3.65), отримуємо тотожність **(d)** леми 3.4

$$U'(W)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\right|_{p=1} = U(W+t)-U(W). \tag{3.68}$$

Зі щойно отриманої тотожності (3.68) застосованої до нормованої функції корисності $\overline{U}(\cdot)$ з використанням граничних умов (3.60) випливає тотожність **(e)** леми 3.4

$$\left.\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\right|_{p=1} = \overline{U}(W+t), \tag{3.69}$$

що й завершує доведення леми 3.4. □

Наступна теорема демонструє необхідні та достатні умови володіння властивістю адитивності принципом еквівалентної/нульової корисності страховика підрахунку вартості страхових контрактів.

Теорема 3.6. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю адитивності тоді й лише тоді, коли $U(x) = ax + b$, для $a > 0$, або $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Зауважимо, що клас функцій $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, містить у собі, зокрема, всі функції виду $U(x) = -\tau^{-x}$, для деякої дійсної сталої $\tau > 1$.

Доведення. Почнемо з доведення твердження достатності. У випадку $U(x) = ax + b$, для $a > 0$, для будь-яких двох незалежних ризиків X_1 та X_2, та будь-якого початкового капіталу W, з рівняння (2.28) слідує

$$aW + b \ = \ \mathsf{E}[a(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X_1 + X_2] - X_1 - X_2) + b],$$

отже, застосувавши двічі твердження **(a)** леми 3.3, отримуємо

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X_1 + X_2] \ = \ \mathsf{E}[X_1] + \mathsf{E}[X_2] \ = \ \pi_{\text{е.к.с.}}[X_1] + \pi_{\text{е.к.с.}}[X_2],$$

що доводить твердження у лінійному випадку.

У випадку $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, для будь-яких двох незалежних ризиків X_1 та X_2 і довільного початкового капіталу страховика W, з рівняння (2.28) отримуємо

$$-\alpha e^{-\beta W} + \gamma \ = \ \mathsf{E}[-\alpha e^{-\beta(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X_1 + X_2] - X_1 - X_2)} + \gamma].$$

Застосувавши двічі твердження **(b)** леми 3.3, маємо

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X_1 + X_2] \ = \ \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X_1}]) + \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X_2}]) \ = \ \pi_{\text{е.к.с.}}[X_1] + \pi_{\text{е.к.с.}}[X_2],$$

що й доводить твердження у експоненціальному випадку.

Перейдемо до доведення твердження необхідності.

У випадку адитивного принципу еквівалентної корисності страховика повинна виконуватися тотожність

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t + Y_q^h] = \pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t] + \pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h].$$

Отже, у випадку наявності адитивності, рівняння (2.28) для ризику $X_p^t + Y_q^h$ та початкового капіталу W, для функції $\overline{U}(x)$, набуватиме вигляду

$$\begin{aligned}\overline{U}(W) = \overline{U}&(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t] + \pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h] - t - h) \cdot p \cdot q \\ &+ \overline{U}(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t] + \pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h] - t) \cdot p \cdot (1 - q) \\ &+ \overline{U}(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t] + \pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h] - h) \cdot (1 - p) \cdot q \\ &+ \overline{U}(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t] + \pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]) \cdot (1 - p) \cdot (1 - q).\end{aligned} \tag{3.70}$$

Продиференціювавши (3.70) по p, отримаємо

$$
\begin{aligned}
0 \ =\ & \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t-h)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot p\cdot q \\
&+\ \overline{U}(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t-h)\cdot q\ + \\
&+\ \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot p\cdot(1-q) \\
&+\ \overline{U}(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t)\cdot(1-q) \\
&+\ \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-h)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot(1-p)\cdot q \\
&-\ \overline{U}(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-h)\cdot q \\
&+\ \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h])\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot(1-p)\cdot(1-q) \\
&-\ \overline{U}(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h])\cdot(1-q).
\end{aligned}
$$

Перейдемо до часткових похідних відносно параметра q в щойно отриманому рівнянні

$$
\begin{aligned}
0 \ =\ & \overline{U}''(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t-h)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]\cdot p\cdot q \\
&+\ \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t-h)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot p\ + \\
&+\ \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t-h)\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]\cdot q \\
&+\ \overline{U}(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t-h) \\
&+\ \overline{U}''(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]\cdot p\cdot(1-q) \\
&-\ \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot p \\
&+\ \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t)\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]\cdot(1-q) \\
&-\ \overline{U}(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-t) \\
&+\ \overline{U}''(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-h)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]\cdot(1-p)\cdot q \\
&+\ \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-h)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot(1-p) \\
&-\ \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-h)\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]\cdot q \\
&-\ \overline{U}(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]-h) \\
&+\ \overline{U}''(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h])\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]\cdot(1-p)\cdot(1-q) \\
&-\ \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h])\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\cdot(1-p)\ - \\
&-\ \overline{U}'(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h])\cdot\frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]\cdot(1-q) \\
&+\ \overline{U}(W+\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]+\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]).
\end{aligned}
$$

Підставляючи $p = q = 1$ в щойно отримане рівняння і використовуючи застосоване до ризиків X_p^t та Y_q^h твердження **(b)** леми 3.4, отримуємо

$$\begin{aligned}
0 \ &= \ \overline{U}''(W) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\Big|_{p=1} \cdot \frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]\Big|_{q=1} \\
&+ \overline{U}'(W) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\Big|_{p=1} + \overline{U}'(W) \cdot \frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]\Big|_{q=1} \\
&- \overline{U}'(W+t) \cdot \frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.с.}}[Y_q^h]\Big|_{q=1} - \overline{U}'(W+h) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\Big|_{p=1} \\
&+ \overline{U}(W) - \overline{U}(W+t) - \overline{U}(W+h) + \overline{U}(W+t+h).
\end{aligned}$$

Використавши застосоване до ризиків X_p^t та Y_q^h твердження **(e)** леми 3.4, а також граничні умови (3.60) зі щойно отриманого рівняння, одержуємо диференційне рівняння для функції $\overline{U}(x)$

$$\begin{aligned}
0 = \overline{U}(W+h+t) \ + \ \kappa \cdot \overline{U}(W+t) \cdot \overline{U}(W+h)- \\
- \overline{U}'(W+t) \cdot \overline{U}(W+h) - \overline{U}'(W+h) \cdot \overline{U}(W+t).
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Розв'язуючи рівняння (3.71), розглядатимемо окремо випадки $\kappa = 0$ та $\kappa < 0$.

Почнемо з випадку $\kappa < 0$. Оскільки функція $\overline{U}(\cdot)$ є опуклою вгору функцією, то повинна виконуватися наступна нерівність

$$\frac{\overline{U}(W) + \overline{U}(W+2t)}{2} \le \overline{U}(W+t). \tag{3.72}$$

Приймаючи до уваги граничну умову $\overline{U}(W) = 0$, нерівність (3.72) набирає наступного вигляду

$$\overline{U}(W+2t) \le 2\,\overline{U}(W+t). \tag{3.73}$$

Підставляючи $t = h$ в рівняння (3.71), отримуємо

$$0 = \overline{U}(W+2t) + \kappa\,\overline{U}^2(W+t) - 2\,\overline{U}'(W+t) \cdot \overline{U}(W+t). \tag{3.74}$$

З метою застосування асимптотичних технік, без втрати загальності, деякий час припускатимемо, що параметр t приймає строго додатні значення. Використовуючи нерівність (3.73) та приймаючи до уваги те, що $\overline{U}(W) = 0$ та $\overline{U}'(x) > 0$, для $x \in \mathbb{R}$, з рівняння (3.74), отримуємо

$$\begin{aligned}
\overline{U}'(W+t) \ &= \ \frac{\overline{U}(W+2t) + \kappa\,\overline{U}^2(W+t)}{2\,\overline{U}(W+t)} \ \le \\
&\le \ \frac{2\,\overline{U}(W+t) + \kappa\,\overline{U}^2(W+t)}{2\,\overline{U}(W+t)} \ = \ 1 + \frac{\kappa}{2}\overline{U}(W+t).
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Оскільки $\kappa < 0$, то з нерівності (3.75) слідує, що функція $\overline{U}(\cdot)$ обмежена зверху.

Оскільки функція $\overline{U}(\cdot)$ є зростаючою, обмеженою та $\overline{U}(W) = 0$, то існує додатна скінченна границя $\overline{U}(W+t)$ при t прямуючому до нескінченності. Звідки, в силу властивостей функції $\overline{U}(x)$ маємо, що

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{U}'(W+t) = 0, \tag{3.76}$$

та для будь-якого $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\overline{U}(W+t+h)}{\overline{U}(W+t)} \;=\; \frac{\lim\limits_{t \to +\infty} \overline{U}(W+t+h)}{\lim\limits_{t \to +\infty} \overline{U}(W+t)} \;=\; 1. \tag{3.77}$$

Поділивши ліву та праву частину рівняння (3.71) на $\overline{U}(W+t)$ та перейшовши до границі при t прямуючому до нескінченності і використавши граничні співвідношення (3.76) та (3.77), отримуємо рівняння

$$\overline{U}'(W+h) = \kappa \overline{U}(W+h) + 1. \tag{3.78}$$

Звідки, з використанням умови $\overline{U}(W) = 0$, отримуємо

$$\overline{U}(W+h) = \frac{e^{\kappa\,(W+h)} \cdot e^{-\kappa W} - 1}{\kappa}, \quad \text{для } h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.79}$$

Врахувавши неперервність функції $\overline{U}(\cdot)$, (3.79) можна подати у вигляді

$$\overline{U}(x) = \frac{e^{\kappa\,x} \cdot e^{-\kappa W} - 1}{\kappa}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.80}$$

Приймаючи до уваги те, що $\overline{U}''(W) = \kappa$, використовуючи (3.80) та перехідну тотожність (3.59) для функції $U(x)$, отримуємо

$$U(x) = \frac{U'(W)\, e^{-\overline{U}''(W) \cdot W}}{\overline{U}''(W)} \cdot e^{\overline{U}''(W) \cdot x} - \frac{U'(W)}{\overline{U}''(W)} + U(W). \tag{3.81}$$

З представлення (3.81) слідує, що у випадку $\overline{U}''(W) < 0$ функція $U(x)$ повинна бути функцією виду $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$ зі сталими α, β та γ. Умови $U'(W) > 0$ та $\overline{U}''(W) < 0$ вимагають додаткових обмежень для значень параметрів α та β: обидва параметри мусять бути строго додатними, або, що те саме, $\min[\alpha, \beta] > 0$.

Перейдемо тепер до розгляду випадку $\kappa = 0$. В даному випадку рівняння (3.71) спрощується до наступного вигляду

$$0 \;=\; \overline{U}(W+t+h) - \overline{U}'(W+t) \cdot \overline{U}(W+h) - \overline{U}'(W+h) \cdot \overline{U}(W+t). \tag{3.82}$$

Припустимо, що функція $\overline{U}(\cdot)$ є обмеженою зверху. Оскільки похідна функції $\overline{U}(\cdot)$ є додатною, то у випадку обмеженості зверху повинна існувати границя

$$\lim_{t \to +\infty} \overline{U}'(W+t) = 0. \tag{3.83}$$

У випадку зростаючої та обмеженої зверху функції $\overline{U}(\cdot)$, такої, що $\overline{U}(W) = 0$, повинна існувати скінченна границя

$$\lim_{t \to +\infty} \overline{U}(W+t) = c > 0, \tag{3.84}$$

та, більш того, для всіх $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує границя

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\overline{U}(W+t+h)}{\overline{U}(W+t)} \;=\; \frac{\lim_{t \to +\infty} \overline{U}(W+t+h)}{\lim_{t \to +\infty} \overline{U}(W+t)} \;=\; 1. \tag{3.85}$$

З (3.83) та (3.84) отримуємо

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\overline{U}'(W+t)}{\overline{U}(W+t)} \;=\; 0. \tag{3.86}$$

Поділивши ліву й праву частини рівняння (3.82) на $\overline{U}(W+t)$, перейшовши до границі при t прямуючому до нескінченності, і використавши граничні співвідношення (3.85) та (3.86), отримуємо

$$\overline{U}'(W+h)=1, \quad \text{для всіх } h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{3.87}$$

що протирічить граничному співвідношенню (3.83). Отже

$$\lim_{t\to+\infty}\overline{U}(W+t)=+\infty. \tag{3.88}$$

Надалі будемо вважати, що $t>h$. З опуклості вгору функції $\overline{U}(\cdot)$, для будь-якого $h>0$, з нерівностей $W+h<W+t<W+t+h$ для будь-якого $\theta\in[0,\,1]$ випливає

$$\overline{U}(\theta(W+h)+(1-\theta)(W+t+h)) \;\geq\; \theta\overline{U}(W+h)+(1-\theta)\overline{U}(W+t+h). \tag{3.89}$$

Підставляючи $\theta=h/t$ в нерівність (3.89), отримуємо

$$\frac{t}{t-h}\,\overline{U}(W+t)-\frac{h}{t-h}\,\overline{U}(W+h) \;\geq\; \overline{U}(W+t+h). \tag{3.90}$$

Звернемо увагу на те, що

$$\frac{t}{t-h}\overline{U}(W+t)-\frac{h}{t-h}\overline{U}(W+h) \;\sim\; \overline{U}(W+t), \tag{3.91}$$

при $t\to+\infty$.

Оскільки похідна функції $\overline{U}(\cdot)$ є строго додатною, то для будь-якого $h>0$ та довільного t виконується нерівність

$$\overline{U}(W+t+h)>\overline{U}(W+t). \tag{3.92}$$

Комбінуючи (3.90) та (3.92), одержуємо

$$\frac{t}{t-h}\,\overline{U}(W+t)-\frac{h}{t-h}\,\overline{U}(W+h) \;\geq\; \overline{U}(W+t+h) \;>\; \overline{U}(W+t). \tag{3.93}$$

З (3.93) в силу (3.91) отримуємо

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\overline{U}(W+t+h)}{\overline{U}(W+t)}=1, \quad \text{для всіх } h>0. \tag{3.94}$$

У випадку $h<0$ для $t>0$ виконуються нерівності $W+h<W+t+h<W+t$, з яких, завдяки опуклості вгору функції $\overline{U}(\cdot)$, для будь-якого $\theta\in[0,\,1]$ слідує

$$\overline{U}(\theta(W+h)+(1-\theta)(W+t)) \;\geq\; \theta\overline{U}(W+h)+(1-\theta)\overline{U}(W+t). \tag{3.95}$$

Підставляючи $\theta=h/(h-t)$ в нерівність (3.95), отримуємо

$$\overline{U}(W+t+h) \;\geq\; \frac{h}{h-t}\,\overline{U}(W+h)+\frac{t}{t-h}\,\overline{U}(W+t). \tag{3.96}$$

Очевидно, що

$$\frac{h}{h-t}\overline{U}(W+h)+\frac{t}{t-h}\overline{U}(W+t)\ \sim\ \overline{U}(W+t), \quad \text{при} \quad t\to+\infty. \tag{3.97}$$

Оскільки $h<0$ і функція $\overline{U}(\cdot)$ є строго зростаючою, то

$$\overline{U}(W+t)>\overline{U}(W+t+h). \tag{3.98}$$

Комбінуючи (3.96) та (3.98), отримуємо

$$\overline{U}(W+t)\ >\ \overline{U}(W+t+h)\ \geq\ \frac{h}{h-t}\overline{U}(W+h)+\frac{t}{t-h}\overline{U}(W+t). \tag{3.99}$$

Перейшовши до границі при t прямуючому до нескінченності в (3.99) та використавши граничне співвідношення (3.97), одержуємо

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\overline{U}(W+t+h)}{\overline{U}(W+t)}=1, \quad \text{для всіх } h<0. \tag{3.100}$$

Так як $\overline{U}'(\cdot)$ є незростаючою додатною функцією, то з граничного співвідношення (3.88) слідує, що

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\overline{U}'(W+t)}{\overline{U}(W+t)}=0. \tag{3.101}$$

Поділивши тепер ліву та праву частину рівняння (3.82) на $\overline{U}(W+t)$ і перейшовши до границі при t прямуючому до нескінченності, з використанням граничних співвідношень (3.94), (3.100) та (3.101), отримуємо

$$\overline{U}'(W+h)=1, \quad \text{для } h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{3.102}$$

Врахувавши при цьому неперервність функції $\overline{U}'(\cdot)$, рівняння (3.102) може бути переписане в термінах вихідного параметра $x\in\mathbb{R}$

$$\overline{U}'(x)=1, \tag{3.103}$$

звідки, з використанням умови $\overline{U}(W)=0$, отримуємо друге допустиме представлення для функції корисності $\overline{U}(\cdot)$

$$\overline{U}(x)=x-W. \tag{3.104}$$

Комбінуючи (3.104) з перехідною тотожністю (3.59), отримуємо відповідне допустиме представлення для вихідної функції корисності $U(x)$

$$U(x)=U'(W)(x-W)+u(W)$$

або $U(x)=ax+b$ з деякими сталими a та b. Більш того, стала a повинна бути строго додатною.

Це завершує доведення теореми 3.6. □

Зауваження 3.2. Теорему 3.6 доведено для принципу еквівалентної корисності страховика, при довільному виборі початкового капіталу W та відсутності обмежень на нього в межах доведення, тому представлене доведення залишається вірним також для принципу нульової корисності страховика після підстановки $W:=0$ та формальної заміни $\pi_{\text{е.к.с.}}[\cdot]$ на $\pi_{\text{н.к.с.}}[\cdot]$. Схожа техніка використовуватиметься при доведенні теорем 3.7, 3.8 та 3.9.

Зауваження 3.3. Користуючись простою технікою від противного, в якості прикладу аргументації можна використати міркування аналогічні представленим нами для принципу середнього значення, доведення теореми 3.6 може бути використане для демонстрації того, що випадок $U(x) = ax + b$, для $a > 0$, є єдиним можливим випадком співпадання принципу еквівалентної/нульової корисності страховика з нетто принципом, а випадок $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, є єдиним можливим випадком співпадання принципу еквівалентної/нульової корисності страховика з експоненційним принципом.

На відміну від принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта, який володіє властивістю консистентності лише при деякому спеціальному виборі функції корисності, принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю консистентності при довільному виборі допустимої функції корисності, а саме має місце теорема.

Теорема 3.7. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю консистентності при довільному виборі функції корисності капіталу страховика* $U(x) \in C^2(\mathbb{R})$, *такої, що* $U'(x) > 0$ *та* $U''(x) \leq 0$ *для* $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Оскільки для будь-якого ризику X, довільного початкового капіталу W, будь-якої допустимої функції корисності капіталу $U(\cdot)$ та довільного $c \in \mathbb{R}$ виконуються тотожності

$$\begin{aligned} U(W) &= \mathsf{E}[U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X + c] - (c + X))] \\ &= \mathsf{E}[U(W + (\pi_{\text{е.к.с.}}[X + c] - c) - X)] \\ &= \mathsf{E}[U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X] - X)] \;=\; U(W), \end{aligned}$$

то

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X + c] - c = \pi_{\text{е.к.с.}}[X] \quad \text{або} \quad \pi_{\text{е.к.с.}}[X + c] = \pi_{\text{е.к.с.}}[X] + c,$$

що й доводить твердження теореми. □

Наступна теорема демонструє умови володіння властивістю ітеративності принципом еквівалентної/нульової корисності страховика.

Теорема 3.8. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю ітеративності тоді й лише тоді, коли* $U(x) = ax + b$, *для* $a > 0$, *чи* $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, *для* $\min[\alpha, \beta] > 0$, *тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Доведення. Почнемо з доведення твердження достатності. У випадку $U(x) = ax + b$, для $a > 0$, для будь-яких ризиків X та Y, і будь-якого початкового капіталу страховика W, з рівняння (2.28) слідує, що

$$aW + b \;=\; aW + a\,\pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y] - a\,\mathsf{E}[X|Y] + b,$$

тобто, у випадку лінійної функції корисності, маємо

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y] = \mathsf{E}[X|Y],$$

більш того, знову ж таки з рівняння (2.28) маємо, що

$$aW + b \;=\; aW + a\,\pi_{\text{е.к.с.}}[\pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y]] - a\,\mathsf{E}[\pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y]] + b,$$

тобто, використавши твердження **(a)** леми 3.3, остаточно отримуємо

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[\pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y]] \;=\; \mathsf{E}[\pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y]] \;=\; \mathsf{E}[\mathsf{E}[X|Y]] \;=\; \pi_{\text{е.к.с.}}[X],$$

отже, властивість ітеративності виконується у випадку лінійної функції корисності страховика.

У випадку $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, для будь-яких ризиків X та Y і довільного W, з рівняння (2.28) слідує

$$-\alpha e^{-\beta W} + \gamma = -\alpha\, e^{-\beta W} \cdot e^{-\beta \pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y]} \cdot \mathsf{E}[e^{-\beta X}|Y] + \gamma,$$

тобто, в даному випадку отримуємо

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y] = \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{-\beta X}|Y]).$$

Більш того, з рівняння (2.28) для ризику $\pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y]$ у випадку експоненційної функції корисності страховика отримуємо

$$-\alpha e^{-\beta W} + \gamma \;=\; -\alpha\, e^{-\beta W} \cdot e^{-\beta \pi_{\text{е.к.с.}}[\pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y]]} \cdot \mathsf{E}[e^{-\beta \pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y]}] + \gamma,$$

отже, використавши твердження **(b)** леми 3.3, остаточно отримуємо

$$\begin{aligned}
\pi_{\text{е.к.с.}}[\pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y]] \;&=\; \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{-\beta \pi_{\text{е.к.с.}}[X|Y]}]) \;=\; \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{-\beta \cdot \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{-\beta X}|Y])}]) \\
&=\; \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[\mathsf{E}[e^{-\beta X}|Y]]) \;=\; \pi_{\text{е.к.с.}}[X],
\end{aligned}$$

тобто, властивість ітеративності виконується у випадку експоненційної функції корисності страховика, що й доводить твердження достатності теореми.

Перейдемо до доведення твердження необхідності. Розглянемо випадкову величину Y, яка приймає значення h_1 та h_2 (тут h_i, для $i = \overline{1,\,2}$, — це довільні дійсні числа з інтервалу $[0,\,1]$) з ймовірностями $1/2$ та $1/2$.

Нехай тепер ризик $\bar{X}$ має наступний умовний розподіл при відомих значеннях величини Y

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{\bar{X} = t\,|\,Y = h_i\} \;&=\; h_i, \quad \text{для} \quad i = \overline{1,\,2}; \\
\mathsf{P}\{\bar{X} = 0\,|\,Y = h_i\} \;&=\; 1 - h_i, \quad \text{для} \quad i = \overline{1,\,2}.
\end{aligned}$$

Користуючись формулою повної ймовірності, знаходимо безумовний розподіл ризику $\bar{X}$, а саме,

$$\mathsf{P}\{\bar{X} = t\} = \sum_{i=1}^{2} \mathsf{P}\{\bar{X} = t\,|\,Y = h_i\} \cdot \mathsf{P}\{Y = h_i\} = \frac{h_1 + h_2}{2};$$

$$\mathsf{P}\{\bar{X} = 0\} = \sum_{i=1}^{2} \mathsf{P}\{\bar{X} = 0\,|\,Y = h_i\} \cdot \mathsf{P}\{Y = h_i\} = 1 - \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Звернемо увагу на те, що безумовний розподіл ризику $\bar{X}$ співпадає з розподілом ризику $X^t_{\bar{p}}$, де $\bar{p} = (h_1 + h_2)/2$. Завдяки цьому повинна виконуватися тотожність

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}] = \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\bar{p}}]. \tag{3.105}$$

Рівняння (2.28) для умовної премії $\pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}\,|Y = h_i]$, $(i = \overline{1,\,2})$, має вигляд

$$U(W) \;=\; U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}\,|\,Y = h_i] - t)\cdot h_i \;+\; U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}\,|\,Y = h_i])\cdot(1 - h_i),$$

і співпадає з рівнянням еквівалентної корисності для премії $\pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_i}]$, $(i = \overline{1,\,2})$, а саме,

$$U(W) = U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_i}] - t)\cdot h_i + U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_i}])\cdot(1 - h_i),$$

тому виконується наступна тотожність

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}\,|\,Y = h_i] = \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_i}], \quad \text{для} \quad i = \overline{1,\,2}, \tag{3.106}$$

більш того, у випадку ітеративного принципу еквівалентної корисності страховика справедлива рівність

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}] = \pi_{\text{е.к.с.}}[\pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}|Y]]. \tag{3.107}$$

Скомбінувавши тотожність (3.107) з рівнянням (2.28) для ризику $\pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}|Y]$, отримуємо наступне рівняння еквівалентної корисності

$$U(W) = \mathsf{E}[U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}] - \pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}|Y])]. \tag{3.108}$$

Взявши до уваги можливі значення величини Y, рівняння (3.108) може бути переписане в наступному еквівалентному вигляді

$$U(W) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}] - \pi_{\text{е.к.с.}}[\bar{X}|Y = h_i]).$$

Використавши тотожності (3.105) та (3.106), рівняння (3.108) можна звести до вигляду.

$$U(W) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}] - \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_i}]). \tag{3.109}$$

Продиференціювавши його по h_1, матимемо

$$\begin{aligned}
0 = {}& \frac{1}{2}\,U'(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}] - \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_1}])\cdot\left[\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial h_1}\pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}] - \frac{\partial}{\partial h_1}\pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_1}]\right] \\
&+ \frac{1}{2}\,U'(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}] - \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_2}])\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial h_1}\pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}].
\end{aligned}$$

Продиференціювавши отримане рівняння по h_1, маємо

$$\begin{aligned}
0 = {}& \frac{1}{2}\,U''(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}] - \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_1}])\cdot\left[\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial h_1}\pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}] - \frac{\partial}{\partial h_1}\pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_1}]\right]^2 \\
&+ \frac{1}{2}\,U'(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}] - \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_1}])\cdot\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2}{(\partial h_1)^2}\pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}] \\
&- \frac{1}{2}\,U'(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}] - \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_1}])\cdot\frac{\partial^2}{(\partial h_1)^2}\pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_1}] \\
&+ \frac{1}{2}\,U''(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}] - \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_2}])\cdot\left[\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial h_1}\pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}]\right]^2 \\
&+ \frac{1}{2}\,U'(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}] - \pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{h_2}])\cdot\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2}{(\partial h_1)^2}\pi_{\text{е.к.с.}}[X^t_{\frac{h_1+h_2}{2}}].
\end{aligned}$$

Підставивши $h_1 = h_2 =: h$ в останнє рівняння, маємо

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \frac{1}{2}\,U''(W)\cdot\left[-\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial h}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t]\right]^2 \;+\; \frac{1}{2}\,U'(W)\left[-\frac{3}{4}\,\frac{\partial^2}{(\partial h)^2}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t]\right] \\ &+\; \frac{1}{2}\,U''(W)\cdot\left[\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial h}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t]\right]^2 \;+\; \frac{1}{2}\,U'(W)\cdot\left[\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2}{(\partial h)^2}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t]\right] \end{aligned}$$

звідси отримуємо диференціальне рівняння для $\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t]$ як функції параметра h, означеної для $0 \le h \le 1$, а саме,

$$U''(W)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial h}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t]\right]^2 \;=\; U'(W)\cdot\frac{\partial^2}{(\partial h)^2}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t]. \tag{3.110}$$

з граничними умовами

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X_0^t] = 0 \quad \text{та} \quad \pi_{\text{е.к.с.}}[X_1^t] = t, \tag{3.111}$$

що слідують із тверджень **(a)** та **(b)** леми 3.4.

Оскільки функція $U(\cdot)$ є опуклою вгору, то $U''(W) \le 0$. Розв'язуючи рівняння (3.110), будемо розглядати окремо наступні випадки: $U''(W) < 0$ та $U''(W) = 0$.

Почнемо з випадку $U''(W) = 0$. Тоді рівняння (3.110) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2}{(\partial h)^2}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t] = 0. \tag{3.112}$$

Звідси маємо, що

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t] = \kappa_1 h + \kappa_2, \tag{3.113}$$

з деякими константами κ_1 та κ_2. Врахувавши при цьому граничні умови (3.111), отримаємо

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t] = h\,t. \tag{3.114}$$

Звідки

$$\left.\frac{\partial}{\partial h}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t]\right|_{h=0} = t. \tag{3.115}$$

Скомбінувавши (3.115) з тотожністю **(c)** леми 3.4, для функції корисності $U(\cdot)$ отримуємо рівняння

$$0 = U(W-t) - U(W) + U'(W)\,t. \tag{3.116}$$

Параметр t приймав значення в множині $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, проте, використавши неперервність функції $U(\cdot)$ та здійснивши заміну $W - t =: x$, рівняння (3.116) може бути записаним в термінах вихідного параметра $x \in \mathbb{R}$:

$$U(x) = U'(W)\cdot(x - W) + U(W)$$

або $U(x) = ax + b$ з деякими константами a та b. З припущення $U'(W) > 0$ слідує, що $a > 0$.

Розв'яжемо рівняння (3.110) у випадку $U''(W) < 0$. Для зручності обчислень зробимо заміну

$$Z(h) := \frac{\partial}{\partial h}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t],$$

та запишемо рівняння (3.110) в наступній формі

$$U''(W)\cdot Z^2(h) = U'(W)Z'(h). \tag{3.117}$$

Розв'язком рівняння (3.117) є функція

$$-Z^{-1}(h) = \frac{U''(W)}{U'(W)}h - \kappa_1, \text{ для деякої константи } \kappa_1.$$

Повернувшись до $\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t]$, отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial h}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t] = \frac{1}{\kappa_1 - \frac{U''(W)}{U'(W)}h}. \tag{3.118}$$

Рівняння (3.118) має наступний розв'язок, при деякій κ_2,

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t] = -\frac{U'(W)}{U''(W)} \cdot \log\left|\left(\kappa_1 - \frac{U''(W)}{U'(W)}h\right) e^{-\kappa_2 \frac{U''(W)}{U'(W)}}\right|. \tag{3.119}$$

Застосувавши граничну умову $\pi_{\text{е.к.с.}}[X_0^t] = 0$ до розв'язку (3.119), отримуємо

$$\log\left|\left(\kappa_1 - \frac{U''(W)}{U'(W)} \cdot 0\right) e^{-\kappa_2 \frac{U''(W)}{U'(W)}}\right| = 0, \quad \text{тобто} \quad \kappa_1 = e^{\kappa_2 \frac{U''(W)}{U'(W)}}.$$

Тоді (3.119) можна переписати в наступному вигляді

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t] = -\frac{U'(W)}{U''(W)} \cdot \log\left|1 - \frac{U''(W)}{U'(W)} \cdot h \cdot e^{-\kappa_2 \frac{U''(W)}{U'(W)}}\right|. \tag{3.120}$$

Застосувавши граничну умову $\pi_{\text{е.к.с.}}[X_1^t] = t$ до розв'язку (3.120), отримуємо

$$\log\left|1 - \frac{U''(W)}{U'(W)} \cdot 1 \cdot e^{-\kappa_2 \frac{U''(W)}{U'(W)}}\right| = -t \cdot \frac{U''(W)}{U'(W)}. \tag{3.121}$$

Оскільки $U'(W) > 0$, а $U''(W) < 0$, то

$$\frac{U''(W)}{U'(W)} < 0, \quad \text{отже,} \quad 1 - \frac{U''(W)}{U'(W)} \cdot e^{-\kappa_2 \frac{U''(W)}{U'(W)}} > 0,$$

з чого випливає, що тотожність (3.121) можна переписати наступним чином

$$-\frac{U''(W)}{U'(W)} \cdot e^{-\kappa_2 \frac{U''(W)}{U'(W)}} = e^{-t \cdot \frac{U''(W)}{U'(W)}} - 1. \tag{3.122}$$

Комбінуючи розв'язок (3.120) з тотожністю (3.122), ми отримуємо розв'язок рівняння (3.110), який задовольняє граничні умови (3.111) у випадку $U''(W) < 0$, а саме,

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t] \ = \ -\frac{U'(W)}{U''(W)} \cdot \log\left|1 + h\left(e^{-t \cdot \frac{U''(W)}{U'(W)}} - 1\right)\right|.$$

Продиференціювавши $\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t]$ по параметру h та підставивши в одержаний таким чином вираз значення $h = 0$, отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial h}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_h^t]\bigg|_{h=0} \ = \ -\frac{U'(W)}{U''(W)} \cdot \left(e^{-t \cdot \frac{U''(W)}{U'(W)}} - 1\right). \tag{3.123}$$

Комбінуючи представлення (3.123) з тотожністю **(c)** леми 3.4, для функції $U(\cdot)$ отримуємо

$$0 = U(W - t) - U(W) - U'(W) \cdot \frac{U'(W)}{U''(W)} \cdot \left(e^{-t \cdot \frac{U''(W)}{U'(W)}} - 1\right). \tag{3.124}$$

Параметр t приймав значення в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, проте, з неперервності функції $U(\cdot)$ та заміни $W - t =: x$, слідує, що рівняння (3.124) може бути записане в термінах вихідного параметра $x \in \mathbb{R}$:

$$U(x) \;=\; \frac{(U'(W))^2}{U''(W)} \cdot e^{-W\frac{U''(W)}{U'(W)}} \cdot e^{x\frac{U''(W)}{U'(W)}} - \frac{(U'(W))^2}{U''(W)} + U(W)$$

або $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$ з деякими константами α, β та γ. Більш того, умови $U'(W) >$ > 0 та $U''(W) < 0$ вимагають додаткових обмежень для параметрів α та β, а саме, $\min[\alpha,\, \beta] > 0$.

Це завершує доведення теореми 3.8. □

Наступна теорема демонструє необхідні та достатні умови володіння властивістю мультиплікативної інваріантності принципом еквівалентної/нульової корисності страховика.

Теорема 3.9. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $U(x) = ax + b$, *для* $a > 0$, *тобто, лише у випадку співпадання з нетто принципом.*

Доведення. Почнемо з доведення твердження достатності. У випадку $U(x) = ax + b$, при $a > 0$, для будь-якого ризику X, довільного W та будь-якого $\Theta > 0$ з рівняння (2.28) слідує, що

$$aW + b \;=\; aW + a\pi_{\text{е.к.с.}}[\Theta X] - a\Theta \mathsf{E}[X] + b,$$

отже, використовуючи твердження **(a)** леми 3.4, отримуємо

$$\pi_{\text{е.к.с.}}[\Theta X] \;=\; \Theta \mathsf{E}[X] \;=\; \Theta \pi_{\text{е.к.с.}}[X],$$

тобто, принцип еквівалентної корисності страховика володіє властивістю мультиплікативної інваріантності у випадку лінійної функції $U(x)$.

Перейдемо до доведення твердження необхідності. У випадку мультиплікативно інваріантного принципу еквівалентної корисності страховика, для будь-якого W та довільного $\Theta > 0$, рівняння (2.28) для ризику ΘX_p^t набуватиме вигляду

$$U(W) = U(W + \Theta\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t] - \Theta t) \cdot p + U(W + \Theta\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]) \cdot (1-p).$$

Перейшовши до частинних похідних відносно параметра p в щойно одержаному рівнянні, отримуємо

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & U'(W + \Theta\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t] - \Theta t) \cdot \Theta \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t] \cdot p \\ & + U(W + \Theta\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t] - \Theta t) \;-\; U(W + \Theta\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]) \\ & + U'(W + \Theta\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]) \cdot \Theta \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t] \cdot (1-p). \end{aligned} \tag{3.125}$$

Підставивши $p = 1$ в рівняння (3.125) та використавши тотожність **(b)** леми 3.4 та додатність параметра Θ, отримуємо

$$U'(W) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.с.}}[X_p^t]\bigg|_{p=1} \;=\; \frac{U(W + \Theta t) - U(W)}{\Theta}. \tag{3.126}$$

Рівняння (3.126) та тотожність **(d)** леми 3.4 мають однакові ліві частини, отже, їхні праві частини теж повинні бути рівними. Звідки маємо, що

$$U(W+t)-U(W) \;=\; \frac{U(W+\Theta t)-U(W)}{\Theta}. \tag{3.127}$$

Продиференціювавши ліву й праву частини рівняння (3.127) відносно параметра t, отримуємо

$$U'(W+t) \;=\; U'(W+\Theta t),$$

а тому

$$U'(x) \;=\; a>0, \quad \text{для } x\in\mathbb{R}.$$

Звідси

$$U(x) \;=\; ax+b, \quad \text{для } x\in\mathbb{R}, \quad \text{та } a>0.$$

Це завершує доведення теореми 3.9. □

Звернемо увагу на те, що аналогу теорем 3.5 та 3.14 не існує для принципу еквівалентної/нульової корисності страховика.

3.2.3 Принцип еквівалентної корисності клієнта

В цьому параграфі представлено характеризаційні теореми для властивостей адитивності, консистентності, ітеративності та мультиплікативної інваріантності якими може володіти або не володіти принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта.

Звернемо увагу на те, що принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта є інваріантним по відношенню до лінійних перетворень функції корисності капіталу клієнта, тобто, принцип, що базується на функції $u(x)$, та принцип, що базується на функції $\bar{u}(x)=l_1u(x)+l_2$, для $l_1>0$, породжуватимуть однакові премії для однакових ризиків. Умова $l_1>0$ накладається для збереження припущення зростання функції корисності капіталу клієнта.

В подальшому, з метою спрощення обчислень, при доведенні тверджень, що стосуються властивостей адитивності та консистентності, фіксуємо значення початкового капіталу клієнта ω, отримуємо допустимі представлення для функції

$$\bar{u}(x)=l_1u(x)+l_2, \quad \text{при} \quad l_1=\frac{1}{u'(\omega)} \quad \text{та} \quad l_2=-\frac{u(\omega)}{u'(\omega)}, \tag{3.128}$$

а потім повертаємося до вихідної функції корисності клієнта $u(x)$.

Звернемо увагу на те, що щойно означена нормована функція корисності капіталу клієнта $\bar{u}(x)$ задовольняє наступні граничні умови

$$\bar{u}(\omega)=0, \quad \bar{u}'(\omega)=1 \quad \text{та} \quad \bar{u}''(\omega)=\kappa, \tag{3.129}$$

з деякою дійсною константою $\kappa\le 0$.

В подальшому нам знадобляться наступні дві леми.

Лема 3.5. **(a)** *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта оснований на функції $u(x)=ax+b$, при $a>0$, еквівалентний нетто принципу.* **(b)** *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта оснований на функції $u(x)=-\alpha e^{-\beta x}+\gamma$, при $\min[\alpha,\beta]>0$, еквівалентний експоненційному принципу з параметром β.*

В справедливості обох тверджень леми 3.5 легко переконатися за допомогою безпосередньої перевірки.

Лема 3.6. *Премія еквівалентної корисності клієнта для ризику X_p^t, що базується на довільній допустимій функції корисності капіталу клієнта $u(\cdot)$ задовольняє наступні тотожності*

$$(\mathbf{a})\ \pi_{\text{е.к.к.}}[X_0^t] = 0;$$

$$(\mathbf{b})\ -u'(\omega)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = u(\omega-t)-u(\omega);$$

$$(\mathbf{c})\ \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = -\bar{u}(\omega-t);$$

$$(\mathbf{d})\ \frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = \kappa\,\bar{u}^2(\omega-t).$$

Доведення. Вихідне рівняння (2.26) для ризику X_p^t матиме наступний вигляд

$$u(\omega-\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]) = u(\omega-t)p+u(\omega)(1-p). \tag{3.130}$$

Підставивши $p=0$ в рівняння (3.130) та взявши до уваги строгу монотонність функції, $u(\cdot)$ отримуємо тотожність **(a)** леми 3.6

$$\pi_{\text{е.к.к.}}[X_0^t] = 0. \tag{3.131}$$

Продиференціюємо по p співвідношення (3.130)

$$-u'(\omega-\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t])\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t] = u(\omega-t)-u(\omega). \tag{3.132}$$

Підставивши $p=0$ в рівняння (3.132), отримуємо

$$-u'(\omega-\pi_{\text{е.к.к.}}[X_0^t])\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = u(\omega-t)-u(\omega). \tag{3.133}$$

Скомбінувавши (3.131) та (3.133), отримуємо твердження **(b)** леми 3.6

$$-u'(\omega)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = u(\omega-t)-u(\omega). \tag{3.134}$$

У випадку нормованої функції корисності $\bar{u}(x)$, завдяки граничним умовам (3.129), з рівняння (3.134) випливає тотожність **(c)** леми 3.6

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = -\bar{u}(\omega-t). \tag{3.135}$$

Перейшовши до частинних похідних відносно параметра p з обох сторін рівняння (3.132), отримуємо

$$\begin{aligned} u''(\omega-\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t])\cdot\left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]\right)^2 - \\ - u'(\omega-\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t])\cdot\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t] = 0. \end{aligned} \tag{3.136}$$

У випадку нормованої функції корисності $\bar{u}(x)$ після підстановки $p=0$ в рівняння (3.136) та використання тотожностей (3.131) і (3.135), а також граничних умов (3.129), отримуємо тотожність **(d)** леми 3.6.

$$\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} = \kappa\,\bar{u}^2(\omega-t). \tag{3.137}$$

Це й завершує доведення леми 3.6. □

Наступна теорема дає необхідні та достатні умови володіння властивістю адитивності принципом еквівалентної/нульової корисності клієнта підрахунку вартості страхових контрактів.

Теорема 3.10. *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта володіє властивістю адитивності тоді й лише тоді, коли* $u(x) = ax+b$, *для* $a > 0$, *чи* $u(x) = -\alpha e^{-\beta x}+\gamma$, *для* $\min[\alpha, \beta] > 0$, *тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Зауважимо, що клас функцій $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, містить в собі, зокрема, всі функції виду $u(x) = -\tau^{-x}$, для деякої дійсної константи $\tau > 1$.

Доведення. Почнемо з доведення твердження достатності. У випадку $u(x) = ax+b$, при $a > 0$, для довільного ω та будь-яких двох незалежних ризиків X_1 та X_2 з вихідного рівняння (2.26) слідує

$$a(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X_1 + X_2]) + b \;=\; \mathsf{E}[a(\omega - X_1 - X_2) + b],$$

тобто, використовуючи твердження **(a)** леми 3.5, отримуємо

$$\pi_{\text{е.к.к.}}[X_1 + X_2] \;=\; \mathsf{E}[X_1] + \mathsf{E}[X_2] \;=\; \pi_{\text{е.к.к.}}[X_1] + \pi_{\text{е.к.к.}}[X_2].$$

При тих же умовах, у випадку $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$,

$$-\alpha e^{-\beta(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X_1+X_2])} + \gamma \;=\; -\alpha e^{-\beta\omega}\mathsf{E}[e^{\beta X_1}]\mathsf{E}[e^{\beta X_2}] + \gamma,$$

тобто, використовуючи твердження **(b)** леми 3.5, отримуємо

$$\pi_{\text{е.к.к.}}[X_1 + X_2] \;=\; \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X_1}]) + \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X_2}]) \;=\; \pi_{\text{е.к.к.}}[X_1] + \pi_{\text{е.к.к.}}[X_2].$$

Доведення твердження достатності завершено, перейдемо до доведення твердження необхідності.

Нагадаємо, що ризик $X_p^t + Y_q^h$ прийматиме значення $t+h$, t, h та 0 з ймовірностями $p\,q$, $p\,(1-q)$, $(1-p)q$ та $(1-p)(1-q)$ відповідно.

У випадку адитивного принципу еквівалентної корисності клієнта, вихідне рівняння (2.26) для ризику $X_p^t + Y_q^h$, що базується на нормованій функції корисності $\bar{u}(x)$ матиме наступний вигляд

$$\begin{aligned}\bar{u}(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t] - \pi_{\text{е.к.к.}}[Y_q^h]) \;=\; & \bar{u}(\omega - t - h)p\,q + \\ & + \bar{u}(\omega - t)p\,(1-q) + \bar{u}(\omega - h)(1-p)q.\end{aligned} \tag{3.138}$$

Перейшовши послідовно до частинних похідних відносно p, а потім відносно q з обох сторін рівняння (3.138), отримуємо

$$\begin{aligned}\bar{u}''(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t] - \pi_{\text{е.к.к.}}[Y_q^h]) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t] \cdot \frac{\partial}{\partial q}\pi_{\text{е.к.к.}}[Y_q^h] = \\ = \bar{u}(\omega - t - h) - \bar{u}(\omega - t) - \bar{u}(\omega - h).\end{aligned} \tag{3.139}$$

Підставивши $p = q = 0$ в рівняння (3.139) і використавши твердження **(a)** та **(c)** леми 3.6, а також граничну умову $\bar{u}''(\omega) = \kappa$, отримуємо рівняння, яке нормована функція $\bar{u}(\cdot)$ повинна задовольняти у випадку адитивного принципу еквівалентної корисності клієнта

$$\kappa\,\bar{u}(\omega - t)\,\bar{u}(\omega - h) = \bar{u}(\omega - t - h) - \bar{u}(\omega - t) - \bar{u}(\omega - h). \tag{3.140}$$

У випадку $\kappa = 0$ рівняння (3.140) спрощується до наступного

$$\bar{u}(\omega - t - h) = \bar{u}(\omega - t) + \bar{u}(\omega - h). \tag{3.141}$$

Перейшовши до частинних похідних відносно параметра h з обох сторін рівняння (3.141), отримуємо

$$\bar{u}'(\omega - t - h) = \bar{u}'(\omega - h). \tag{3.142}$$

Перейшовши до границі при h прямуючому до нуля з обох сторін рівняння (3.142), використавши неперервність функції $\bar{u}'(\cdot)$ та граничну умову $\bar{u}'(\omega) = 1$, отримуємо

$$\bar{u}'(\omega - t) = 1. \tag{3.143}$$

Використавши (3.143) та граничну умову $\bar{u}(\omega) = 0$ отримуємо перше допустиме представлення для нормованої функції $\bar{u}(x)$, а саме

$$\bar{u}(x) = x - \omega. \tag{3.144}$$

Скомбінувавши (3.144) з перехідною тотожністю (3.128), одержимо, що у випадку $\kappa = 0$ вихідна функція корисності $u(x)$ мусить бути функцією виду $u(x) = ax + b$ з деякими сталими a та b. Додатність першої похідної функції корисності приводить до нерівності $a > 0$.

У випадку $\kappa < 0$, перейшовши послідовно до частинних похідних відносно параметра t, а потім відносно параметра h з обох сторін рівняння (3.140), отримуємо

$$\kappa\, \bar{u}'(\omega - t)\, \bar{u}'(\omega - h) = \bar{u}''(\omega - t - h). \tag{3.145}$$

Перейшовши до границі при h прямуючому до нуля з обох сторін рівняння (3.145) та використавши граничну умову $\bar{u}'(\omega) = 1$, маємо

$$\bar{u}''(\omega - t) = \kappa\, \bar{u}'(\omega - t). \tag{3.146}$$

З рівняння (3.146) та граничних умов $\bar{u}'(\omega) = 1$ і $\bar{u}(\omega) = 0$ слідує

$$\bar{u}(\omega - t) = \frac{e^{\kappa\,(\omega - t)} \cdot e^{-\kappa\,\omega} - 1}{\kappa}$$

або

$$\bar{u}(x) = \frac{e^{\kappa\, x} \cdot e^{-\kappa\,\omega} - 1}{\kappa}. \tag{3.147}$$

Взявши до уваги $\bar{u}''(\omega) = \kappa$, використавши представлення (3.147) та перехідну тотожність (3.128), отримуємо відповідне допустиме представлення для вихідної функції корисності $u(x)$, а саме,

$$u(x) = \frac{u'(\omega)\, e^{-\bar{u}''(\omega)\cdot\omega}}{\bar{u}''(\omega)} \cdot e^{\bar{u}''(\omega)\cdot x} - \frac{u'(\omega)}{\bar{u}''(\omega)} + u(\omega). \tag{3.148}$$

З представлення (3.148) слідує, що у випадку $\bar{u}''(\omega) < 0$ вихідна функція корисності $u(x)$ повинна бути функцією виду $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, з деякими сталими α, β та γ. Більш того, з умов $u'(\omega) > 0$ та $\bar{u}''(\omega) < 0$ маємо, що $\alpha > 0$ та $\beta > 0$ або, що те саме, $\min[\alpha,\, \beta] > 0$.

Це завершує доведення теореми 3.10. $\square$

Зауваження 3.4. Ми продемонстрували доведення теореми 3.10 для принципу еквівалентної корисності клієнта, проте завдяки довільності вибору початкового капіталу ω та відсутності обмежень на нього в межах доведення, представлене доведення залишається вірним також для принципу нульової корисності клієнта після підстановки $\omega := 0$ та формальної заміни $\pi_{\text{е.к.к.}}[\cdot]$ на $\pi_{\text{н.к.к.}}[\cdot]$. Схожа техніка використовуватиметься при доведенні теорем 3.11, 3.12 та 3.13.

Зауваження 3.5. Користуючись простою технікою від противного, в якості прикладу аргументації можна використати раніше представлену нами аргументацію для принципу середнього значення, доведення теореми 3.10 може бути використане для демонстрації того, що випадок $u(x) = ax + b$, для $a > 0$, є єдиним можливим випадком співпадання принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта з нетто принципом, а випадок $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, є єдиним можливим випадком співпадання принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта з експоненційним принципом.

Наступна теорема демонструє необхідні та достатні умови володіння властивістю консистентності принципом еквівалентної/нульової корисності клієнта підрахунку вартості страхових контрактів.

Теорема 3.11. *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта має властивість консистентності тоді й лише тоді, коли* $u(x) = ax+b$*, для* $a > 0$*, чи* $u(x) = -\alpha e^{-\beta x}+\gamma$*, для* $\min[\alpha, \beta] > 0$*, тобто, лише у випадках, коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Доведення. Почнемо з доведення твердження достатності. У випадку $u(x) = ax + b$, при $a > 0$, для будь-якого ω, будь-якого ризику X та довільного c, з вихідного рівняння (2.26) слідує, що

$$a(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X + c]) + b \;=\; \mathsf{E}[a(\omega - X - c) + b],$$

тобто, використовуючи твердження **(a)** леми 3.5, отримуємо

$$\pi_{\text{е.к.к.}}[X + c] \;=\; \mathsf{E}[X] + c \;=\; \pi_{\text{е.к.к.}}[X] + c.$$

При тих же умовах, у випадку функції $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, маємо

$$-\alpha e^{-\beta(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X+c])} + \gamma \;=\; \mathsf{E}[-\alpha e^{-\beta(\omega - X - c)} + \gamma],$$

тобто, використавши твердження **(b)** леми 3.5, отримуємо

$$\pi_{\text{е.к.к.}}[X + c] \;=\; \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X}]) + c \;=\; \pi_{\text{е.к.к.}}[X] + c.$$

Це завершує доведення твердження достатності. Перейдемо до доведення твердження необхідності.

У випадку консистентного принципу еквівалентної корисності клієнта вихідне рівняння (2.26) для ризику $X_p^t + c$, що базується на нормованій функції корисності $\bar{u}(x)$ матиме наступний вигляд

$$\bar{u}(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t] - c) \;=\; \bar{u}(\omega - t - c)\cdot p + \bar{u}(\omega - c)\cdot(1 - p). \tag{3.149}$$

Перейшовши до других частинних похідних відносно параметра p з обох сторін рівняння (3.149), отримуємо

$$-\,\bar{u}'(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t] - c)\cdot\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t] \;=\; 0. \tag{3.150}$$

Підставивши значення $p = 0$ в рівняння (3.150) та використавши твердження **(a)** та **(c)** леми 3.6, маємо

$$\bar{u}''(\omega - c) \cdot \bar{u}^2(\omega - t) - \bar{u}'(\omega - c) \frac{\partial^2}{(\partial p)^2} \pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]\Big|_{p=0} = 0. \tag{3.151}$$

Так як функція $\bar{u}(x)$ є строго зростаючою, то без втрати загальності, рівняння (3.151) можна переписати наступним чином

$$\frac{\partial^2}{(\partial p)^2} \pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]\Big|_{p=0} = \frac{\bar{u}''(\omega - c) \cdot \bar{u}^2(\omega - t)}{\bar{u}'(\omega - c)}. \tag{3.152}$$

З рівняння (3.152) та тотожності **(d)** леми 3.6 випливає рівняння для функції $\bar{u}(x)$

$$\bar{u}''(\omega - c) = \kappa \bar{u}'(\omega - c), \quad \text{для всіх } c \in \mathbb{R}. \tag{3.153}$$

У випадку $\kappa = 0$ рівняння (3.153) набирає вигляду

$$\bar{u}''(\omega - c) = 0.$$

Таким чином, взявши до уваги граничні умови $\bar{u}(\omega) = 0$ та $\bar{u}'(\omega) = 1$, функція $\bar{u}(x)$ мусить бути функцією виду

$$\bar{u}(x) = x - \omega. \tag{3.154}$$

Скомбінувавши представлення (3.154) з перехідною тотожністю (3.128), отримуємо відповідне допустиме представлення для вихідної функції корисності: $u(x) = ax + b$ з деякими сталими a та b. Позитивність першої похідної функції $u(x)$ дає додаткове обмеження для параметра a, а саме, $a > 0$.

У випадку $\kappa < 0$ з рівняння (3.153), використавши граничні умови $\bar{u}'(\omega) = 1$ та $\bar{u}(\omega) = 0$, будемо мати

$$\bar{u}(\omega - c) = \frac{e^{\kappa(\omega - c)} \cdot e^{-\kappa \omega} - 1}{\kappa}$$

або

$$\bar{u}(x) = \frac{e^{\kappa x} \cdot e^{-\kappa \omega} - 1}{\kappa}. \tag{3.155}$$

Взявши до уваги $\bar{u}''(\omega) = \kappa$, використавши представлення (3.155) та перехідну тотожність (3.128), отримуємо відповідне допустиме представлення для вихідної функції корисності $u(x)$

$$u(x) = \frac{u'(\omega)\, e^{-\bar{u}''(\omega)\cdot\omega}}{\bar{u}''(\omega)} \cdot e^{\bar{u}''(\omega)\cdot x} - \frac{u'(\omega)}{\bar{u}''(\omega)} + u(\omega). \tag{3.156}$$

З представлення (3.156) слідує, що у випадку $\bar{u}''(\omega) < 0$ вихідна функція корисності $u(x)$ повинна бути функцією виду $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$ з деякими сталими α, β та γ. Більш того, з умов $u'(\omega) > 0$ та $\bar{u}''(\omega) < 0$ слідує, що $\alpha > 0$ та $\beta > 0$, або, що те саме, $\min[\alpha, \beta] > 0$.

Це завершує доведення теореми 3.11. □

Зауваження 3.6. Звернемо увагу на те, що твердження необхідності теореми 3.10 слідує також з твердження теореми 3.11 скомбінованого з властивістю відсутності необгрунтованої надбавки на ризик, яка очевидно виконується для принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта.

На відміну від принципу еквівалентної/нульової корисності страховика, який володіє властивістю ітеративності лише у випадках експоненційної чи лінійної функції корисності, принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта володіє властивістю ітеративності при довільному виборі допустимої функції корисності. Має місце теорема.

Теорема 3.12. *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта володіє властивістю ітеративності при довільному виборі функції корисності $u(x) \in C^2(\mathbb{R})$ такої, що $u'(x) > 0$ та $u''(x) \leq 0$ для $x \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Для будь-яких двох ризиків X та Y, будь-якого початкового капіталу клієнта ω та будь-якої допустимої функції корисності капіталу клієнта $u(x)$ отримуємо

$$\begin{aligned} \pi_{\text{е.к.к.}}[\pi_{\text{е.к.к.}}[X|Y]] &= -u^{-1}(\mathsf{E}[u(\omega - \pi_{\text{е.к.к.}}[X|Y])]) + \omega \\ &= -u^{-1}(\mathsf{E}[u(\omega + u^{-1}(\mathsf{E}[u(\omega - X)|Y]) - \omega)]) + \omega \\ &= -u^{-1}(\mathsf{E}[\mathsf{E}[u(\omega - X)|Y]]) + \omega \\ &= -u^{-1}(\mathsf{E}[u(\omega - X)]) + \omega \;=\; \pi_{\text{е.к.к.}}[X], \end{aligned}$$

що й доводить твердження теореми. □

Наступна теорема дає необхідні та достатні умови володіння властивістю мультиплікативної інваріантності принципом еквівалентної/ нульової корисності клієнта.

Теорема 3.13. *Принцип еквівалентної/нульової корисності клієнта володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $u(x) = ax + b$, для $a > 0$, тобто, лише у випадку співпадання з нетто принципом.*

Доведення. Почнемо з доведення твердження достатності. У випадку $u(x) = ax + b$, при $a > 0$, для будь-якого ω, будь-якого ризику X, та довільного дійсного c, з вихідного рівняння (2.26) слідує

$$a\omega - a\pi_{\text{е.к.к.}}[\Theta X] + b \;=\; \mathsf{E}[a\omega - a\Theta X + b] \;=\; a\omega - a\Theta\mathsf{E}[X] + b,$$

отже, використавши твердження **(a)** леми 3.5, отримуємо

$$\pi_{\text{е.к.к.}}[\Theta X] \;=\; \Theta\mathsf{E}[X] \;=\; \Theta\pi_{\text{е.к.к.}}[X].$$

Це завершує доведення достатності.

Перейдемо до доведення твердження необхідності. У випадку мультиплікативно інваріантного принципу еквівалентної корисності клієнта, рівняння (2.26) для ризику ΘX_p^t можна записати наступним чином

$$u(\omega - \Theta\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]) \;=\; u(\omega - \Theta t)\cdot p + u(\omega)\cdot(1-p). \tag{3.157}$$

Перейшовши до частинних похідних відносно параметра p в рівнянні (3.157), підставивши $p = 0$ у отримане рівняння та використавши тотожність **(a)** леми 3.6 і позитивність параметра Θ, отримуємо

$$-u'(\omega)\cdot\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{е.к.к.}}[X_p^t]\bigg|_{p=0} \;=\; \frac{u(\omega - \Theta t) - u(\omega)}{\Theta}. \tag{3.158}$$

Звідси та з тотожності **(b)** леми 3.6 отримуємо рівняння для фунуції $u(\cdot)$

$$u(\omega - t) - u(\omega) \;=\; \frac{u(\omega - \Theta t) - u(\omega)}{\Theta}. \tag{3.159}$$

Перейшовши до частинних похідних відносно параметра t з обох сторін рівняння (3.159), маємо

$$u'(\omega - t) \;=\; u'(\omega - \Theta t). \tag{3.160}$$

Звідси слідує, що $u'(x) = a > 0$, для $x \in \mathbb{R}$. Звідки маємо, що $u(x) \;=\; ax + b$, для $x \in \mathbb{R}$ та константи $a > 0$. Це завершує доведення теореми 3.13. □

У випадку застосування принципу еквівалентної/нульової корисності клієнта до оцінювання ризиків з деякого спеціального класу, достатньо означити функцію корисності $u(x)$ на підмножині $A \subset \mathbb{R}$ зі збереженням властивостей монотонності та опуклості вгору, тобто функція $u(x)$ повинна бути такою, що $u'(x) > 0$ та $u''(x) \le 0$ для всіх $x \in A$, і, більш того, рівняння (2.26) повинно зберігати коректний математичний зміст для всіх ризиків зі згаданого класу.

Цікаво бачити, що у випадку застосування принципу нульової корисності клієнта до оцінювання строго позитивних ризиків, клас функції $u(x)$, що породжують мультиплікативно інваріантні премії є ширшим, ніж у загальному випадку. А саме, має місце теорема.

Теорема 3.14. *Принцип нульової корисності клієнта, застосований до оцінювання лише строго позитивних ризиків, володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли* $u(x) \;=\; -a(-x)^{\kappa} + b$*, для* $a > 0$ *та* $\kappa \ge 1$*, при* $x \in (-\infty, 0)$.

Звернемо увагу на те, що для функції $u(x) = -a(-x)^{\kappa} + b$, при $a > 0$ та $\kappa > 1$, умова $u'(x) > 0$ порушується в точці $x = 0$. Отже, твердження теореми 3.14 не протирічить твердженню теореми 3.13.

Доведення. Для строго позитивного ризику X отримуємо $\mathsf{E}[X] > 0$. Скомбінувавши нерівність Єнсена $u(-\mathsf{E}[X]) \ge \mathsf{E}[u(-X)]$ з рівнянням (2.27), бачимо, що у випадку оцінювання строго позитивних ризиків принцип нульової корисності клієнта буде коректно означеним, якщо функція $u(x)$ буде означеною лише для $x \in (-\infty, 0)$ зі збереженням властивостей монотонності та опуклості вгору.

Доведемо спочатку твердження достатності. У випадку

$$u(x) = -a(-x)^{\kappa} + b,$$

при $a > 0$ та $\kappa \ge 1$, для довільного строго позитивного ризику X вихідне рівняння (2.27) матиме наступний вигляд

$$-a(\pi_{\text{н.к.к.}}[X])^{\kappa} + b \;=\; \mathsf{E}[-aX^{\kappa} + b] \;=\; -a\mathsf{E}[X^{\kappa}] + b,$$

тобто, в розглянутому випадку отримуємо

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \;=\; (\mathsf{E}[X^{\kappa}])^{1/\kappa}.$$

З іншого боку, для тієї ж функції $u(x)$, того ж ризику X, та довільного $\Theta > 0$, з вихідного рівняння (2.27) слідує

$$-a(\pi_{\text{н.к.к.}}[\Theta X])^{\kappa} + b \;=\; \mathsf{E}[-a(\Theta X)^{\kappa} + b] \;=\; -a\Theta^{\kappa}\mathsf{E}[X^{\kappa}] + b,$$

отже, в даному випадку маємо

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[\Theta X] \;=\; \Theta(\mathsf{E}[X^{\kappa}])^{1/\kappa} \;=\; \Theta\pi_{\text{н.к.к.}}[X].$$

Це й завершує доведення твердження достатності. Перейдемо до доведення твердження необхідності.

Для раніше означеного ризику X_p^ε рівняння (2.27) має вигляд

$$u(-\pi_{\text{н.к.к.}}[X_p^\varepsilon]) \;=\; u(-\varepsilon)\cdot p + u(-1)\cdot(1-p). \tag{3.161}$$

Підставивши $p = 0$ в рівняння (3.161) та взявши до уваги строгу монотонність функції $u(\cdot)$ отримуємо

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X_0^\varepsilon] \;=\; 1. \tag{3.162}$$

Перейшовши до частинних похідних відносно параметра p з обох сторін рівняння (3.161), підставивши в отримане рівняння $p = 0$ та використавши тотожність (3.162), маємо

$$-u'(-1)\cdot \frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{н.к.к.}}[X_p^\varepsilon]\bigg|_{p=0} \;=\; u(-\varepsilon) - u(-1). \tag{3.163}$$

Перейшовши до других частинних похідних відносно параметра p з обох сторін рівняння (3.161), підставивши $p = 0$ в отримане рівняння та використавши тотожність (3.162), матимемо

$$u''(-1)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{н.к.к.}}[X_p^\varepsilon]\bigg|_{p=0}\right)^2 - u'(-1)\cdot\left(\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{н.к.к.}}[X_p^\varepsilon]\bigg|_{p=0}\right) \;=\; 0. \tag{3.164}$$

Із (3.163) маємо, що при $\varepsilon < 1$

$$\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{н.к.к.}}[X_p^\varepsilon]\bigg|_{p=0} \;\neq\; 0. \tag{3.165}$$

Тепер, рівняння (3.164) можна переписати наступним чином

$$\frac{u''(-1)}{u'(-1)} = \frac{\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{н.к.к.}}[X_p^\varepsilon]\Big|_{p=0}}{\left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{н.к.к.}}[X_p^\varepsilon]\Big|_{p=0}\right)^2}. \tag{3.166}$$

У випадку мультиплікативно інваріантного принципу, рівняння (2.27) для ризику ΘX_p^ε може бути записане у вигляді

$$u(-\Theta\pi_{\text{н.к.к.}}[X_p^\varepsilon]) \;=\; u(-\Theta\varepsilon)\cdot p + u(-\Theta)\cdot(1-p). \tag{3.167}$$

Використовуючи перетворення схожі до перетворень рівняння (3.161), із рівняння (3.167) отримуємо

$$\frac{u''(-\Theta)\cdot\Theta}{u'(-\Theta)} = \frac{\frac{\partial^2}{(\partial p)^2}\pi_{\text{н.к.к.}}[X_p^\varepsilon]\Big|_{p=0}}{\left(\frac{\partial}{\partial p}\pi_{\text{н.к.к.}}[X_p^\varepsilon]\Big|_{p=0}\right)^2}. \tag{3.168}$$

Комбінування (3.166) та (3.168) призводять до рівняння

$$\frac{u''(-\Theta)\cdot\Theta}{u'(-\Theta)} = \frac{u''(-1)}{u'(-1)},\ \text{для всіх } \Theta > 0. \tag{3.169}$$

Позначивши $-u''(-1)/u'(-1) =: \varkappa$ (так як $u''(-1) \leq 0$ та $u'(-1) > 0$ то $\varkappa \geq 0$) та проінтегрувавши, отримуємо

$$u(x) \;=\; -\frac{C_1}{\varkappa+1}(-x)^{\varkappa+1} + C_2,$$

отже, шукана функція корисності $u(x)$ мусить мати вигляд $u(x) = -a(-x)^\kappa + b$, з деякими сталими a, b та κ. З $C_1 > 0$ та $\varkappa > 0$ слідує $a > 0$, а з $\varkappa \geq 0$ слідує $\kappa \geq 1$.

Це завершує доведення теореми 3.14. □

3.3 Сумарна таблиця властивостей

Результати перевірки виконання бажаних властивостей котрими можуть володіти або не володіти методи підрахунку вартості страхових контрактів ми представляємо у вигляді сумарної таблиці властивостей, див. таб. 3.4.

Таблиця 3.4

	ВННР	НСН	Ад	МІ	Ко	ВГ	Іт
Нетто пр.	+	+	+	+	+	+	+
Пр. мат. спод.	−	+	+	+	−	−	−
Пр. дисперсії	+	+	+	−	+	−	−
Пр. сер.квад. відх.	+	+	−	+	+	−	−
Експоненц. пр.	+	+	+	−	+	+	+
Пр. сер. значення	+	+	✠	$\otimes$	✠	+	+
Пр. Есшера	+	+	+	−	+	+	−
Пр. відрег. ризик.	+	+	−	+	+	+	−
Пр. Ванга	+	+	−	+	+	+	−
Квантільний пр.	+	−	−	+	+	+	−
Пр. макс. збитків	+	+	+	+	+	+	+
Пр. екв. кор. стр.	+	+	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	+	+	$\heartsuit$
Пр. нул. кор. стр.	+	+	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	+	+	$\heartsuit$
Пр. екв. кор. кл.	+	+	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	+	+
Пр. нул. кор. кл.	+	+	$\spadesuit$	$\odot$	$\spadesuit$	+	+

При цьому були використані наступні скорочення та умовні позначення:

ВННР — відсутність необгрунтованої надбавки на ризик;
НСН — невід'ємність страхової надбавки;
Ад — адитивність;
МІ — мультиплікативна інваріантність;
Ко — консистентність;
ВГ — відсутність грабування;
Іт — ітеративність;

$+$ — властивість виконується;
$-$ — властивість не виконується;
✠ — властивість виконується тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax + b$, для $a > 0$ або $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$;
$\otimes$ — властивість виконується тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax + b$, для $a > 0$; проте, у випадку оцінювання лише строго позитивних ризиків, властивість виконується тоді й лише тоді, коли $v(x) = ax^{\kappa} + b$, для $a > 0$ та $\kappa \geq 1$, при $x \in (0, +\infty)$;
$\heartsuit$ — властивість виконується тоді й лише тоді, коли $U(x) = ax + b$, для $a > 0$ або $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$;
$\diamondsuit$ — властивість виконується тоді й лише тоді, коли $U(x) = ax + b$, для $a > 0$;
$\spadesuit$ — властивість виконується тоді й лише тоді, коли $u(x) = ax + b$, для $a > 0$ або $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$;
$\clubsuit$ — властивість виконується тоді й лише тоді, коли $u(x) = ax + b$, для $a > 0$;
$\odot$ — властивість виконується тоді й лише тоді, коли $u(x) = ax + b$, для $a > 0$; проте, у випадку оцінювання лише строго позитивних ризиків, властивість виконується тоді й лише тоді, коли $u(x) = -a(-x)^{\kappa} + b$, для $a > 0$ та $\kappa \geq 1$, при $x \in (-\infty, 0)$.

3.4 Мінімізація вартості страхових контрактів шляхом залучення декількох компаній

В цьому параграфі ми розглядатимемо питання оптимального поділу $X_1, \cdots, X_n$ ризику X між n страховими компаніями, кожна з яких користується експоненційним принципом підрахунку вартості страхових контрактів з параметрами інтенсивності $\beta_1, \cdots, \beta_n$ відповідно, такого, що $X_1 + \ldots + X_n = X$ який би мінімізував страхову вартість ризику X.

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 3.15. *Оптимальним, у сенсі мінімізації страхової вартості, поділом ризику X між n страховими компаніями, кожна з яких користується експоненційним принципом, є наступний поділ*

$$X_i = \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_i} X, \qquad \text{де} \qquad \widetilde{\beta} := \Big(\sum_{i=1}^{n} 1 \,/\, \beta_i\Big)^{-1},$$

при цьому, мінімально-оптимальна страхова вартість ризику X становитиме

$$\pi_{\text{optimal}}[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} \log \left(\mathsf{E}[e^{\beta_i X_i}] \right).$$

Зауваження 3.7. *Звернемо увагу на те, що представлена в теоремі 3.15 мінімально-оптимальна вартість ризику X при поділі його між кількома страховими компаніями співпадає з вартістю ризику X застрахованого однією страховою компанією, яка користується експоненційним принципом з параметром інтенсивності $\widetilde{\beta}$.*

Зауваження 3.8. *З урахуванням того, що для будь-якого ризику X, експоненційна премія є неспадною функцією параметра β, певного роду наслідком твердження теореми 3.15 можна вважати наступну нерівність*

$$\widetilde{\beta} \;:=\; (\sum_{i=1}^{n} 1 \,/\, \beta_i)^{-1} \;\leq\; \min[\beta_1, \cdots, \beta_n],$$

при $\beta_1 > 0, \cdots, \beta_n > 0$ *та* $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Покажемо спочатку, що представлене у формулюванні теореми $\pi_{\text{optimal}}[X]$ є еквівалентним, у ціновому розумінні, страхуванню ризику X лише в одній компанії, яка користується експоненційним принципом з параметром інтенсивності $\widetilde{\beta}$. Дійсно, в даному випадку маємо

$$\begin{aligned}\pi_{\text{optimal}}[X] \;&=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} \log\left(\mathsf{E}[e^{\beta_i \cdot \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_i} X}]\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} \log\left(\mathsf{E}[e^{\widetilde{\beta} X}]\right) \;=\\ &=\; \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} 1\,/\,\beta_i)^{-1}} \log\left(\mathsf{E}[e^{\widetilde{\beta} X}]\right) \;=\; \frac{1}{\widetilde{\beta}} \log\left(\mathsf{E}[e^{\widetilde{\beta} X}]\right) \;=\; \pi_{\text{експ.}(\widetilde{\beta})}[X].\end{aligned}$$

Для демонстрації того, що представлений у формулюванні теореми 3.15 поділ ризику X між n страховими компаніями дійсно є оптимальним, достатньо показати, що для будь-якого поділу $X_1, \cdots, X_n$ ризику X, такого, що $X_1 + \ldots + X_n = X$ має місце нерівність

$$\pi_{\text{optimal}}[X] \;=\; \frac{1}{\widetilde{\beta}} \log \mathsf{E}\left[\exp\left(\widetilde{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i} \log \mathsf{E}[e^{\beta_i X_i}] \;=\; \pi_{\text{поділ}}[X],$$

яка еквівалентна наступній нерівності

$$\log \mathsf{E}\left[\exp\left(\widetilde{\beta} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_i} \log \mathsf{E}[e^{\beta_i X_i}],$$

або, що те саме,

$$\log \mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\widetilde{\beta} X_i}\right] \;\leq\; \log\left(\prod_{i=1}^{n} \left(\mathsf{E}[e^{\beta_i X_i}]\right)^{\widetilde{\beta}\,/\,\beta_i}\right).$$

З урахуванням монотонності функції $\log(\cdot)$ кожна з попередніх трьох нерівностей є еквівалентною будь-якій з трьох наступних

$$\mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\widetilde{\beta} X_i}\right] \;\leq\; \prod_{i=1}^{n} \left(\mathsf{E}[e^{\beta_i X_i}]\right)^{\widetilde{\beta}\,/\,\beta_i}, \tag{3.170}$$

$$\mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\widetilde{\beta} X_i}\right] \;\leq\; \prod_{i=1}^{n} \left(\mathsf{E}\left[e^{(\beta_i\,/\,\widetilde{\beta})\cdot \widetilde{\beta} X_i}\right]\right)^{\widetilde{\beta}\,/\,\beta_i},$$

та

$$\mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\widetilde{\beta} X_i}\right] \;\leq\; \prod_{i=1}^{n} \left(\mathsf{E}\left[\left(e^{\widetilde{\beta} X_i}\right)^{\beta_i\,/\,\widetilde{\beta}}\right]\right)^{\widetilde{\beta}\,/\,\beta_i}.$$

Після здійснення заміни змінних $Y_i := e^{\widetilde{\beta} X_i}$ та $\mu_i := \widetilde{\beta} \Big/ \beta_i$, остання з вищепредставлених нерівностей зведеться до наступної

$$\mathsf{E}[\prod_{i=1}^{n} Y_i] \;\leq\; \prod_{i=1}^{n} \left(\mathsf{E}\,[Y_i^{\mu_i}]\right)^{1/\mu_i}.$$

Звернувши увагу на те, що $\mu_i > 0$ для $i = \overline{1,\, n}$, а також на те, що

$$\sum_{i=1}^{n} 1\,/\,\mu_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\beta} \Big/ \beta_i \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} 1\,/\,\beta_i\right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1\,/\,\beta_i \;=\; 1,$$

робимо висновок, що нерівність, справедливість якої треба було показати для демонстрації оптимальності представленого у формулюванні теореми 3.15 поділу, в рештірешт звелася до нерівності Гельдера у формі добутку для n невід'ємних випадкових величин, яка дійсно виконується.

На цьому доведення теореми 3.15 можна вважати завершеним, проте кінцівка представленого доведення може бути дещо іншою. Продемонструємо тепер альтернативний спосіб доведення теореми 3.15 стартуючи з нерівності (3.170), тобто, частина доведення яка передує нерівності (3.170) залишається незмінною.

Нерівність (3.170), без втрати загальності, можна переписати наступним чином

$$\mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{\widetilde{\beta} X_i}}{(\mathsf{E}[e^{\beta_i X_i}])^{\widetilde{\beta}/\beta_i}}\right] \;\leq\; 1,$$

що, в свою чергу, є еквівалентним наступному представленню

$$\mathsf{E}\left[\exp(\sum_{i=1}^{n} \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_i} Z_i)\right] \;\leq\; 1, \qquad \text{де} \qquad Z_i := \log \frac{e^{\beta_i X_i}}{\mathsf{E}[e^{\beta_i X_i}]}. \tag{3.171}$$

Справедливість нерівності (3.171) можна продемонструвати наступним чином. Спочатку звернемо увагу на те, що $\mathsf{E}[\exp(Z_i)] = 1$, для $i = \overline{1, n}$, а також $\sum_{i=\overline{1,n}} \widetilde{\beta}/\beta_i = 1$. Приймаючи до уваги опуклість вниз функції $\exp(\cdot)$, для будь-якого набору дійсних чисел $c_1, \cdots, c_n$, отримуємо

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_i} c_i\right) \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_i} \exp(c_i),$$

З чого слідує, що

$$\mathsf{E}\left[\exp(\sum_{i=1}^{n} \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_i} Z_i)\right] \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_i} \mathsf{E}[e^{Z_i}] \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_i} \;=\; 1.$$

Це завершує альтернативний варіант кінцівки доведення теореми 3.15. $\square$

Розділ 4

Приклади підрахунків

В цьому розділі ми наводимо приклади обчислення вартості страхових контрактів з можливістю випадкової появи страхової події при деяких дискретних та неперервних розподілах страхових компенсацій. Наведені ілюстрації охоплюють випадки сталих виплат, експоненційного розподілу виплат, гіперекспоненційного розподілу виплат, рівномірного розподілу виплат та зсунутого нормованого пуасонівського розподілу виплат.

Сталі виплати з випадковою появою

Припустимо, що ризик X призводить до страхового випадку з ймовірністю p, а розмір страхової компенсації є сталим та рівним деякій позитивній дійсній константі C. В даному випадку ризик X приймає лише два значення, а саме 0 та C з ймовірностями $1-p$ та p відповідно, тобто, ризик X має наступні базові характеристики

$$\mathsf{E}[X] \;=\; Cp, \qquad \mathsf{Var}[X] \;=\; C^2p - C^2p^2, \qquad \sigma[X] \;=\; C\sqrt{p-p^2},$$

знаючи які, можемо одразу отримати явні представлення для декількох найпростіших премій, а саме, нетто премії, премії математичного сподівання, дисперсної премії та премії середньоквадратичного відхилення, тобто:

$$\pi_{\text{нетто}}[X] \;=\; Cp; \qquad \pi_{\text{м.с.}(\alpha)}[X] \;=\; (1+\alpha)Cp;$$

$$\pi_{\text{дисп.}(\alpha)}[X] = Cp + \alpha C^2(p-p^2); \qquad \pi_{\text{с.к.в.}(\alpha)}[X] = Cp + \alpha C\sqrt{p-p^2}.$$

Премія максимальних збитків у даному випадку рівна

$$\pi_{\text{макс.зб.}}[X] = C.$$

Знайшовши твірну функцію

$$\mathsf{E}[e^{\alpha X}] \;=\; 1 - p + e^{\alpha C}p, \tag{4.1}$$

отримуємо експоненційну премію

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] \;=\; \frac{1}{\alpha}\log(1-p+e^{\alpha C}p).$$

Врахувавши те, що $\mathsf{E}[Xe^{\alpha X}] = Ce^{\alpha C}p$ та використавши тотожність (4.1), отримуємо премію Есшера

$$\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] = \frac{Ce^{\alpha C}p}{1-p+e^{\alpha C}p}.$$

Премія відрегульована ризиком у даному випадку рівна

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] \ = \ \int\limits_0^C p^{1/\rho} dx \ = \ Cp^{1/\rho}.$$

Квантільна премія для розглянутого ризику має наступне представлення

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X] \ = \ \begin{cases} C & \text{для} \quad \varepsilon \le p, \\ 0 & \text{для} \quad \varepsilon > p. \end{cases}$$

Обравши $v(x) = (x+1)^2$, знаходимо премію середнього значення

$$\pi_{\text{с.з.}}[X] \ = \ v^{-1}(\mathsf{E}[v(X)]) \ = \ \sqrt{p + (C+1)^2(1-p)} - 1.$$

Проілюструємо техніку підрахунку премії нульової корисності страховика на прикладі лінійної функції корисності $U(x) = ax + b$, для $a > 0$. Рівняння (2.29) в даному випадку набуватиме вигляду

$$b \ = \ [a\pi_{\text{н.к.с.}}[X] + b] \cdot (1-p) + [a(\pi_{\text{н.к.с.}}[X] - C) + b] \cdot p,$$

тобто, шукана премія має вигляд

$$\pi_{\text{н.к.с.}}[X] \ = \ Cp \ = \ \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Використавши твердження **(b)** леми 3.4, отримуємо премію нульової корисності страховика у випадку експоненційної функції корисності страховика, $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто

$$\pi_{\text{н.к.с.}}[X] \ = \ \frac{1}{\beta} \log(1 - p + e^{\beta C} p) \ = \ \pi_{\text{експ.}(\beta)}[X].$$

Проілюструємо також техніку підрахунку премії нульової корисності клієнта на прикладі лінійної функції корисності $u(x) = ax + b$, для $a > 0$. Рівняння (2.27) в даному випадку набуватиме вигляду

$$-a\pi_{\text{н.к.к.}}[X] + b \ = \ b(1-p) + (-aC + b)p,$$

тобто, шукана премія має вигляд

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \ = \ Cp \ = \ \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Використавши твердження **(b)** леми 3.6, отримуємо премію нульової корисності клієнта у випадку експоненційної функції корисності клієнта, $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \ = \ \frac{1}{\beta} \log(1 - p + e^{\beta C} p) \ = \ \pi_{\text{експ.}(\beta)}[X].$$

Експоненційний розподіл виплат

Припустимо, що ризик X призводить до страхового випадку з ймовірністю p, а розмір страхової компенсації має експоненційний розподіл з параметром $\mu > 0$.

Введемо випадкову величину X^+ з наступною функцією розподілу

$$F_{X^+}(x) \;=\; \mathsf{P}\{X^+ \le x\} \;=\; \mathsf{P}\{X \le x | X > 0\} \;=\; \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{для} \quad x \ge 0, \\ 0 & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

Тоді, користуючись формулою повної ймовірності, функцію розподілу випадкової величини X можна представити наступним чином

$$F_X(x) = pF_{X^+}(x) + (1-p)F_{X^0}(x), \tag{4.2}$$

де $F_{X^0}(x)$ — функція розподілу сконцентрованої в нулі виродженої випадкової величини, тобто

$$F_{X^0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad x \ge 0, \\ 0 & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

Користуючись формулою повної ймовірності (4.2), а також явними представленнями для функцій розподілу $F_{X^+}(x)$ та $F_{X^0}(x)$, знаходимо явне представлення для функції розподілу $F_X(x)$, тобто

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 1 - pe^{-\mu x} & \text{для} \quad x \ge 0, \\ 0 & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

Звернемо увагу на те, що, обчислюючи інтеграли Лебега по ймовірносній мірі, потрібно враховувати стрибок в нулі функції розподілу $F_X(x)$.

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X

$$\mathsf{E}[X] \;=\; p\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X^+}(x) + (1-p)\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X^0}(x) \;=\; \frac{p}{\mu}.$$

Аналогічним чином обчислимо також другий момент випадкової величини X

$$\mathsf{E}[X^2] \;=\; p\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_{X^+}(x) + (1-p)\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_{X^0}(x) \;=\; \frac{2p}{\mu^2}.$$

Знаючи перші два моменти випадкової величини X, знаходимо її дисперсію та середньоквадратичне відхилення

$$\mathsf{Var}[X] \;=\; \frac{2p - p^2}{\mu^2}, \qquad \sigma[X] \;=\; \frac{\sqrt{2p - p^2}}{\mu}.$$

Використовуючи знайдені основні характеристики ризику X, можемо одразу отримати явні представлення для декількох найпростіших премій

$$\pi_{\text{нетто}}[X] \;=\; \frac{p}{\mu}, \qquad \pi_{\text{м.с.}(\alpha)}[X] \;=\; \frac{(1+\alpha)p}{\mu},$$

$$\pi_{\text{дисп.}(\alpha)}[X] = \frac{p}{\mu} + \alpha\frac{2p - p^2}{\mu^2}, \qquad \pi_{\text{с.к.в.}(\alpha)}[X] = \frac{p}{\mu} + \alpha\frac{\sqrt{2p - p^2}}{\mu}.$$

В зв'язку з необмеженістю зверху ризику X, премія максимальних збитків рівна нескінченності

$$\pi_{\text{макс.зб.}}[X] \;=\; +\infty.$$

Знайшовши твірну функцію

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right] \;&=\; p\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} dF_{X^+}(x) + (1-p)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} dF_{X^0}(x) \\ &=\; \begin{cases} \frac{p\mu}{\mu-\alpha} + 1 - p & \text{для} \quad \alpha < \mu, \\ +\infty & \text{для} \quad \alpha \geq \mu, \end{cases}\end{aligned}$$

отримуємо експоненційну премію

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{p\mu}{\mu-\alpha} + 1 - p\right) & \text{для} \quad \alpha < \mu, \\ +\infty & \text{для} \quad \alpha \geq \mu. \end{cases}$$

Квантільна премія може бути знайдена безпосередньо за означенням, взявши до уваги стрибок розміру $1-p$ функції розподілу $F_X(x)$ в нулі

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X] \;=\; \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \varepsilon \geq p, \\ -\frac{1}{\mu}\log\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) & \text{для} \quad \varepsilon < p. \end{cases}$$

Прийнявши до уваги те, що $\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] = (\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]))'$, отримуємо

$$\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] \;=\; \begin{cases} \frac{p\mu}{(\mu-\alpha+p\alpha)(\mu-\alpha)} & \text{для} \quad \alpha < \mu, \\ +\infty & \text{для} \quad \alpha \geq \mu. \end{cases}$$

Премія відрегульована ризиком для ризику X матиме наступний вигляд

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] \;=\; \int\limits_{0}^{+\infty} [1 - F_X(x)]^{1/\rho} dx \;=\; \frac{p^{1/\rho}\rho}{\mu}.$$

Обравши функцію $v(x) := (x+1)^2$, отримуємо премію середнього значення

$$\pi_{\text{с.з.}}[X] \;=\; v^{-1}(\mathsf{E}[v(X)]) = \sqrt{\frac{2p}{\mu^2} + \frac{2p}{\mu} + 1} - 1.$$

Проілюструємо техніку підрахунку премії нульової корисності страховика на прикладі лінійної функції $U(x) = ax + b$, для $a > 0$. Рівняння (2.29) в даному випадку набуватиме вигляду

$$\begin{aligned} b \;=\; & p\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [a(\pi_{\text{н.к.с.}}[X] - x) + b] dF_{X^+}(x) + \\ & +(1-p)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [a(\pi_{\text{н.к.с.}}[X] - x) + b] dF_{X^0}(x) = \\ & = a\pi_{\text{н.к.с.}}[X] + b - \frac{ap}{\mu}. \end{aligned}$$

Тобто, у випадку лінійної функції корисності страховика, отримуємо

$$\pi_{\text{н.к.с.}}[X] \;=\; \frac{p}{\mu} \;=\; \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Використавши твердження **(b)** леми 3.4, отримуємо премію нульової корисності страховика у випадку експоненційної функції корисності, $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто

$$\pi_{\text{н.к.с.}}[X] = \pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\log(\frac{p\mu}{\mu-\alpha} + 1 - p) & \text{для} \quad \alpha < \mu, \\ +\infty & \text{для} \quad \alpha \geq \mu. \end{cases}$$

Проілюструємо також техніку підрахунку премії нульової корисності клієнта на прикладі лінійної функції корисності $u(x) = ax + b$, для $a > 0$. Рівняння (2.27) в даному випадку набуватиме вигляду

$$\begin{aligned} b - a\pi_{\text{н.к.к.}}[X] &= p\int_{-\infty}^{+\infty}[b - ax]dF_{X^+}(x) + (1-p)\int_{-\infty}^{+\infty}[b - ax]dF_{X^0}(x) \\ &= p\int_{0}^{+\infty}[b - ax]\mu e^{-\mu x}dx + (1-p)b[F_{X^0}(0_+) - F_{X^0}(0_-)] \\ &= b - (ap)/\mu. \end{aligned}$$

тобто, шукана премія має вигляд

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X] = \frac{p}{\mu} = \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Використавши твердження **(b)** леми 3.6, отримуємо премію нульової корисності клієнта у випадку експоненційної функції корисності клієнта, $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X] = \pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\log(\frac{p\mu}{\mu-\alpha} + 1 - p) & \text{для} \quad \alpha < \mu, \\ +\infty & \text{для} \quad \alpha \geq \mu. \end{cases}$$

Гіперекспоненційний розподіл виплат

У цьому параграфі проілюструємо методику обчислення премій для ризику X, що призводить до страхового випадку з ймовірністю p та має гіперекспоненційний розподіл розміру страхової компенсації.

Введемо випадкову величину X^+, яка пов'язана з величиною X наступним чином

$$\mathsf{P}\{X^+ \leq x\} = \mathsf{P}\{X \leq x | X > 0\},$$

та припускатимемо, що величина X^+ (яку можна трактувати як розмір страхової компенсації при умові появи страхової події) має гіперекспоненційний розподіл, тобто, функція розподілу випадкової величини X^+ має наступний вигляд

$$F_{X^+}(x) = \mathsf{P}\{X^+ \leq x\} = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^{n} q_i e^{-\mu_i x} & \text{для} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{для} \quad x < 0, \end{cases}$$

з наступними обмеженнями для значень параметрів: $n \in \mathbb{N}$; $q_i \in [0, 1]$ для $i = \overline{1, n}$, та $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$; $\mu_i > 0$ для $i = \overline{1, n}$.

Користуючись формулою повної ймовірності та беручи до уваги ймовірність появи страхової події p, функцію розподілу випадкової величини X можна представити наступним чином

$$F_X(x) = pF_{X^+}(x) + (1-p)F_{X^0}(x), \tag{4.3}$$

де $F_{X^0}(x)$ — це функція розподілу виродженої та сконцентрованої в нулі випадкової величини. З (4.3) слідує наступне явне представлення для функції розподілу $F_X(x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - p\sum_{i=1}^{n} q_i e^{-\mu_i x} & \text{для} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X

$$\mathsf{E}[X] = p\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X^+}(x) + (1-p)\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X^0}(x) = p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i}.$$

Аналогічним чином обчислимо також другий момент випадкової величини X

$$\mathsf{E}[X^2] = p\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_{X^+}(x) + (1-p)\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_{X^0}(x) = 2p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i^2}.$$

Знаючи перші два моменти випадкової величини X, обчислюємо її дисперсію

$$\mathsf{Var}[X] = 2p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i^2} - \left(p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i}\right)^2$$

та середньоквадратичне відхилення

$$\sigma[X] = \sqrt{2p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i^2} - \left(p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i}\right)^2}.$$

Використовуючи знайдені основні характеристики ризику X, можемо одразу отримати явні представлення для декількох найпростіших премій:

$$\pi_{\text{нетто}}[X] = p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i}; \qquad \pi_{\text{м.с.}(\alpha)}[X] = (1+\alpha)p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i};$$

$$\pi_{\text{дисп.}(\alpha)}[X] = p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i} + 2\alpha p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i^2} - \alpha\left(p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i}\right)^2;$$

$$\pi_{\text{с.к.в.}(\alpha)}[X] = p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i} + \alpha\sqrt{2p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i^2} - \left(p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i}\right)^2}.$$

У зв'язку з необмеженістю зверху ризику X, премія максимальних збитків рівна нескінченності

$$\pi_{\text{макс.зб.}}[X] = +\infty.$$

Знайшовши твірну функцію

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right] &= p\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} dF_{X^+}(x) + (1-p)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} dF_{X^0}(x) \\ &= \begin{cases} p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\mu_i}{\mu_i-\alpha} + 1 - p & \text{для} \quad \alpha < \min_{i=\overline{1,n}}\mu_i, \\ +\infty & \text{для} \quad \alpha \geq \min_{i=\overline{1,n}}\mu_i, \end{cases} \end{aligned}$$

отримуємо експоненційну премію

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\log\left(1 - p + p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\mu_i}{\mu_i - \alpha}\right) & \text{для} \quad \alpha < \min_{i=\overline{1,n}}\mu_i, \\ +\infty & \text{для} \quad \alpha \geq \min_{i=\overline{1,n}}\mu_i. \end{cases}$$

Прийнявши до уваги те, що $\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] = (\log(\mathsf{E}[e^{\alpha X}]))'$, маємо

$$\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] = \begin{cases} \dfrac{p\sum_{i=1}^{n}\dfrac{q_i\mu_i}{(\mu_i-\alpha)^2}}{1-p+p\sum_{i=1}^{n}\dfrac{q_i\mu_i}{\mu_i-\alpha}} & \text{для} \quad \alpha < \min_{i=\overline{1,n}}\mu_i, \\ +\infty & \text{для} \quad \alpha \geq \min_{i=\overline{1,n}}\mu_i. \end{cases}$$

Премія відрегульована ризиком для ризику X матиме вигляд

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] \;=\; \int_0^{+\infty}[1 - F_X(x)]^{1/\rho}dx \;=\; \int_0^{+\infty}(p\sum_{i=1}^{n}q_i e^{-\mu_i x})^{1/\rho}dx.$$

Значення, яке приймає представлений інтеграл, може бути знайдене, використовуючи чисельні методи.

Квантільна премія обчислюється безпосередньо за означенням, взявши до уваги стрибок розміру $1-p$ функції розподілу $F_X(x)$ в нулі

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X] \;=\; \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \varepsilon \geq p, \\ \pi^* & \text{для} \quad \varepsilon < p, \end{cases}$$

де значення π^* може бути знайдене за допомогою чисельних методів з рівняння

$$p\sum_{i=1}^{n}q_i e^{-\mu_i\pi^*} \;=\; \varepsilon.$$

Обравши функцію $v(x) := (x+1)^2$, отримуємо премію середнього значення

$$\pi_{\text{с.з.}}[X] \;=\; v^{-1}(\mathsf{E}[v(X)]) \;=\; \sqrt{2p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i^2} + 2p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i} + 1} - 1.$$

Проілюструємо техніку підрахунку премії нульової корисності страховика на прикладі лінійної функції корисності $U(x) = ax + b$, для $a > 0$. Рівняння (2.29) в даному випадку набуватиме вигляду

$$\begin{aligned} b \;&=\; p\int_{-\infty}^{+\infty}[a(\pi_{\text{н.к.с.}}[X] - x) + b]dF_{X^+}(x) + \\ &\qquad +(1-p)\int_{-\infty}^{+\infty}[a(\pi_{\text{н.к.с.}}[X] - x) + b]dF_{X^0}(x) = \\ &=\; a\pi_{\text{н.к.с.}}[X] + b - ap\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i}. \end{aligned}$$

Тобто, у випадку лінійної функції корисності страховика, отримуємо

$$\pi_{\text{н.к.с.}}[X] \;=\; p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i} \;=\; \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Використавши твердження **(b)** леми 3.4, отримуємо премію нульової корисності страховика у випадку експоненційної функції корисності страховика, $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha,\, \beta] > 0$, тобто

$$\pi_{\text{н.к.с.}}[X] \;=\; \pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\log(1-p+p\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{q_i\mu_i}{\mu_i-\alpha}) & \text{для} \quad \alpha < \min\limits_{i=\overline{1,\,n}}\mu_i, \\ +\infty & \text{для} \quad \alpha \geq \min\limits_{i=\overline{1,\,n}}\mu_i. \end{cases}$$

Проілюструємо також техніку підрахунку премії нульової корисності клієнта на прикладі лінійної функції корисності $u(x) = ax + b$, для $a > 0$. Рівняння (2.27) в даному випадку набуватиме вигляду

$$\begin{aligned} b - a\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \;&=\; p\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[b-ax]dF_{X^+}(x) + (1-p)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[b-ax]dF_{X^0}(x) \\ &=\; b - ap\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i}. \end{aligned}$$

тобто, шукана премія має вигляд

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \;=\; p\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mu_i} \;=\; \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Використавши твердження **(b)** леми 3.6, отримуємо премію нульової корисності клієнта у випадку експоненційної функції корисності, $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, при $\min[\alpha,\, \beta] > 0$, тобто

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\log(1-p+p\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{q_i\mu_i}{\mu_i-\alpha}) & \text{для} \quad \alpha < \min\limits_{i=\overline{1,\,n}}\mu_i, \\ +\infty & \text{для} \quad \alpha \geq \min\limits_{i=\overline{1,\,n}}\mu_i. \end{cases}$$

Звернемо увагу на те, що у пілотному програмному забезпеченні “Premium Calculator”, представленому в додатку B, використовувався гіперекспоненційний розподіл збитків з двома ступенями свободи, тобто, функція розподілу випадкової величини X мала вигляд

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 1 - pqe^{-\mu_1 x} - p(1-q)e^{-\mu_2 x} & \text{для} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{для} \quad x < 0, \end{cases}$$

з такими обмеженнями для значень параметрів: $p \in [0,\, 1]$; $q \in [0,\, 1]$; $\mu_1 > 0$ та $\mu_2 > 0$.

Рівномірний розподіл виплат

В цьому параграфі проілюструємо методику обчислення премій для ризику X, що призводить до страхового випадку з ймовірністю p та має рівномірний на інтервалі $[d_1,\, d_2]$, де $0 \leq d_1 < d_2 < +\infty$, розподіл розміру страхової компенсації.

Введемо випадкову величину X^+, яка пов'язана з величиною X наступним чином

$$\mathsf{P}\{X^+ \leq x\} = \mathsf{P}\{X \leq x | X > 0\},$$

та припускатимемо, що величина X^+ (яку можна трактувати як розмір страхової компенсації при умові появи страхової події) має рівномірний на інтервалі $[d_1, d_2]$ розподіл.

Користуючись формулою повної ймовірності та беручи до уваги ймовірність появи страхової події p, функцію розподілу випадкової величини X можна представити наступним чином

$$F_X(x) = pF_{X^+}(x) + (1-p)F_{X^0}(x), \tag{4.4}$$

де $F_{X^0}(x)$ — це функція розподілу виродженої та сконцентрованої в нулі випадкової величини.

Користуючись формулою повної ймовірності (4.4), а також представленнями для функцій розподілу $F_{X^+}(x)$ та $F_{X^0}(x)$, отримуємо явне представлення для функції розподілу $F_X(x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad x \geq d_2, \\ 1 - p + p[\frac{1}{d_2 - d_1}x - \frac{d_1}{d_2 - d_1}] & \text{для} \quad d_1 \leq x < d_2, \\ 1 - p & \text{для} \quad 0 \leq x < d_1, \\ 0 & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X

$$\mathsf{E}[X] \ = \ p\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X^+}(x) + (1-p)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X^0}(x) \ = \ \frac{p(d_2 + d_1)}{2}.$$

Порахуємо також другий момент випадкової величини X

$$\mathsf{E}[X^2] \ = \ p\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_{X^+}(x) + (1-p)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_{X^0}(x) \ = \ \frac{p(d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2)}{3}.$$

Знаючи перші два моменти випадкової величини X, обчислюємо її дисперсію

$$\mathsf{Var}[X] \ = \ \frac{p(d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2)}{3} - \frac{p^2(d_1 + d_2)^2}{4}$$

та середньоквадратичне відхилення

$$\sigma[X] \ = \ \sqrt{\frac{p(d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2)}{3} - \frac{p^2(d_1 + d_2)^2}{4}}.$$

Використовуючи знайдені основні характеристики ризику X, можемо одразу отримати явні представлення для декількох найпростіших премій

$$\pi_{\text{нетто}}[X] \ = \ \frac{p(d_2 + d_1)}{2}; \qquad \pi_{\text{м.с.}(\alpha)}[X] \ = \ \frac{p(d_2 + d_1)}{2}(1 + \alpha);$$

$$\pi_{\text{дисп.}(\alpha)}[X] \ = \ \frac{p(d_2 + d_1)}{2} + \alpha\left[\frac{p(d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2)}{3} - \frac{p^2(d_1 + d_2)^2}{4}\right];$$

$$\pi_{\text{с.к.в.}(\alpha)}[X] \ = \ \frac{p(d_2 + d_1)}{2} + \alpha\sqrt{\frac{p(d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2)}{3} - \frac{p^2(d_1 + d_2)^2}{4}}.$$

Премія максимальних збитків, у даному випадку, рівна верхній межі рівномірного розподілу, тобто

$$\pi_{\text{макс.зб.}}[X] \; = \; d_2.$$

Знайшовши твірну функцію

$$\mathsf{E}\left[e^{\alpha X}\right] \; = \; p\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} dF_{X^+}(x) + (1-p)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} dF_{X^0}(x) \; = \; p\,\frac{e^{\alpha d_2} - e^{\alpha d_1}}{\alpha(d_2 - d_1)} + 1 - p,$$

отримуємо експоненційну премію

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] \; = \; \frac{1}{\alpha}\log(p\,\frac{e^{\alpha d_2} - e^{\alpha d_1}}{\alpha(d_2 - d_1)} + 1 - p).$$

Так як

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[Xe^{\alpha X}] \; &= \; p\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{\alpha x} dF_{X^+}(x) + (1-p)\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{\alpha x} dF_{X^0}(x) \\ &= \; \frac{p(\alpha d_2 e^{\alpha d_2} - \alpha d_1 e^{\alpha d_1} - e^{\alpha d_2} + e^{\alpha d_1})}{\alpha^2(d_2 - d_1)}, \end{aligned}$$

то премія Есшера матиме наступний вигляд

$$\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] \; = \; \frac{p\,(\alpha d_2 e^{\alpha d_2} - \alpha d_1 e^{\alpha d_1} - e^{\alpha d_1} + e^{\alpha d_1})}{\alpha^2(d_2 - d_1)} \; : \; \left(\frac{p\,(e^{\alpha d_2} - e^{\alpha d_1})}{\alpha(d_2 - d_1)} + 1 - p\right).$$

Премія відрегульована ризиком у даному випадку матиме наступне представлення

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] \; = \; \int\limits_{0}^{+\infty} [1 - F_X(x)]^{1/\rho} dx \; = \; p^{1/\rho}\frac{d_1 + \rho d_2}{1 + \rho}.$$

Квантільна премія може бути знайдена безпосередньо за означенням, взявши до уваги стрибок розміру $1-p$ функції розподілу $F_X(x)$ в нулі,

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X] \; = \; \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \varepsilon \geq p, \\ d_2 - \frac{\varepsilon(d_2 - d_1)}{p} & \text{для} \quad \varepsilon < p. \end{cases}$$

Обравши функцію $v(x) := (x+1)^2$, отримуємо премію середнього значення

$$\pi_{\text{с.з.}}[X] \; = \; v^{-1}(\mathsf{E}[v(X)]) \; = \; \sqrt{p\,\frac{d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2}{3} + p(d_2 + d_1) + 1} - 1.$$

Проілюструємо техніку підрахунку премії нульової корисності страховика на прикладі лінійної функції корисності $U(x) = ax + b$, для $a > 0$. Рівняння (2.29) в даному випадку набуватиме вигляду

$$\begin{aligned} b \; &= \; \int\limits_{d_1}^{d_2} [a(\pi_{\text{н.к.с.}}[X] - x) + b]\frac{p}{d_2 - d_1} dx + \\ &\qquad + [a(\pi_{\text{н.к.с.}}[X] - 0) + b][F_X(0_+) - F_X(0_-)] = \\ &= \; a\pi_{\text{н.к.с.}}[X] + b - ap\,\frac{d_2 + d_1}{2}. \end{aligned}$$

Тобто, у випадку лінійної функції корисності страховика, отримуємо

$$\pi_{\text{н.к.с.}}[X] \;=\; p\,\frac{d_2+d_1}{2} \;=\; \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Використавши твердження **(b)** леми 3.4, отримуємо премію нульової корисності страховика у випадку експоненційної функції корисності страховика, $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто

$$\pi_{\text{н.к.с.}}[X] \;=\; \pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] \;=\; \frac{1}{\alpha}\log(p\,\frac{e^{\alpha d_2}-e^{\alpha d_1}}{\alpha(d_2-d_1)}+1-p).$$

Проілюструємо також техніку підрахунку премії нульової корисності клієнта на прикладі лінійної функції корисності $u(x) = ax + b$, для $a > 0$. Рівняння (2.27) в даному випадку набуватиме вигляду

$$\begin{aligned} b - a\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \;&=\; \frac{p}{d_2-d_1}\int\limits_{d_1}^{d_2}[b-ax]dx + b\,[F_X(0_+)-F_X(0_-)] \\ &=\; b - ap\,\frac{d_2+d_1}{2}. \end{aligned}$$

тобто, шукана премія має вигляд

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \;=\; p\frac{d_2+d_1}{2} \;=\; \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Використавши твердження **(b)** леми 3.6, отримуємо премію нульової корисності клієнта у випадку експоненційної функції корисності, $u(x) = -\alpha e^{-\beta x}+\gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \;=\; \pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] \;=\; \frac{1}{\alpha}\log(p\,\frac{e^{\alpha d_2}-e^{\alpha d_1}}{\alpha(d_2-d_1)}+1-p).$$

Зсунутий нормований пуасонівський розподіл виплат

Припустимо, що ризик X призводить до страхового випадку з ймовірністю p, а розмір страхової компенсації має зсунутий нормований пуасонівський розподіл виплат.

Введемо випадкову величину X^+ з наступним розподілом

$$\mathsf{P}\{X^+ \le x\} \;=\; \mathsf{P}\{X = \varkappa n | X > 0\} \;=\; \frac{\lambda^{n-1}e^{-\lambda}}{(n-1)!} \quad \text{для} \quad \lambda > 0,\ \varkappa > 0 \quad \text{та} \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Використовуючи тотожність $\mathsf{P}\{A \cap B\} = \mathsf{P}\{A|B\}\cdot\mathsf{P}\{B\}$ та приймаючи до уваги те, що $\mathsf{P}\{X > 0\} = p$, отримуємо

$$\mathsf{P}\{X = \varkappa n\} \;=\; \mathsf{P}\{X = \varkappa n \cap X > 0\} \;=\; \frac{\lambda^{n-1}e^{-\lambda}}{(n-1)!}\,p \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Підсумовуючи вищеописане, отримуємо розподіл для X:

$$\mathsf{P}\{X = \varkappa n\} \;=\; \begin{cases} 1-p & \text{для} \quad n = 0, \\ \frac{\lambda^{n-1}e^{-\lambda}}{(n-1)!}p & \text{для} \quad n = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

Порахуємо математичне сподівання X

$$\mathsf{E}[X] \;=\; 0(1-p) + \sum_{n=1}^{+\infty} n\varkappa\frac{\lambda^{n-1}e^{-\lambda}}{(n-1)!}p \;=\; \varkappa p(1+\lambda).$$

Порахуємо також другий момент для ризику X

$$\mathsf{E}[X^2] \;=\; 0^2(1-p)+\sum_{n=1}^{+\infty}(n\varkappa)^2\frac{\lambda^{n-1}e^{-\lambda}}{(n-1)!}p \;=\; \varkappa^2 p\,(\lambda^2+3\lambda+1).$$

Знаючи перші два моменти для ризику X, знаходимо дисперсію

$$\mathsf{Var}[X] \;=\; \varkappa^2 p\,(\lambda^2+3\lambda+1)-(\varkappa p\,(1+\lambda))^2$$

та середньоквадратичне відхилення

$$\sigma[X] \;=\; \sqrt{\varkappa^2 p\,(\lambda^2+3\lambda+1)-(\varkappa p\,(1+\lambda))^2}.$$

Використовуючи знайдені основні характеристики ризику X, можемо одразу отримати явні представлення для декількох найпростіших премій

$$\pi_{\text{нетто}}[X] \;=\; \mathsf{E}[X] \;=\; \varkappa p(1+\lambda); \qquad \pi_{\text{м.с.}(\alpha)}[X] \;=\; (1+\alpha)\varkappa p\,(1+\lambda);$$

$$\pi_{\text{дисп.}(\alpha)}[X] \;=\; \varkappa p\,(1+\lambda)+\alpha(\varkappa^2 p\,(\lambda^2+3\lambda+1)-(\varkappa p\,(1+\lambda))^2);$$

$$\pi_{\text{с.к.в.}(\alpha)}[X] \;=\; \varkappa p\,(1+\lambda)+\alpha\sqrt{\varkappa^2 p\,(\lambda^2+3\lambda+1)-(\varkappa p\,(1+\lambda))^2}.$$

У зв'язку з необмеженістю зверху розподілу Пуасона, премія максимальних збитків рівна нескінченності, тобто,

$$\pi_{\text{макс.зб.}}[X] \;=\; +\infty.$$

Обчисливши твірну функцію для X

$$\mathsf{E}[e^{\alpha}X] \;=\; 1-p+pe^{\alpha\varkappa-\lambda}\exp(\lambda e^{\alpha\varkappa}),$$

знаходимо експоненційну премію

$$\pi_{\text{експ.}(\alpha)}[X] \;=\; \frac{1}{\alpha}\log(1-p+pe^{\alpha\varkappa-\lambda}\exp(\lambda e^{\alpha\varkappa})).$$

З метою обчислення премії Есшера, обчислюємо

$$\mathsf{E}[Xe^{\alpha X}] \;=\; p\varkappa\exp(\alpha\varkappa-\lambda+\lambda e^{\alpha\varkappa})(1+\lambda e^{\alpha\varkappa}).$$

Комбінуючи щойно отриману тотожність із раніше отриманим представленням для твірної функції, отримуємо премію Есшера

$$\pi_{\text{Есшер}(\alpha)}[X] \;=\; \frac{p\varkappa\exp(\alpha\varkappa-\lambda+\lambda e^{\alpha\varkappa})(1+\lambda e^{\alpha\varkappa})}{(1-p)+pe^{\alpha\varkappa-\lambda}\exp(\lambda e^{\alpha\varkappa})}.$$

Премія відрегульована ризиком в даному випадку рівна

$$\pi_{\text{від.риз.}(\rho)}[X] \;=\; p^{1/\rho}\varkappa(1+\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!})^{1/\rho}),$$

значення щойно представленої суми можна отримати з використанням, скажімо, чисельних методів.

Квантільна премія може бути знайдена за означенням, взявши до уваги стрибок розміру $1-p$ функції розподілу $F_X(x)$ в нулі,

$$\pi_{\text{квант.}(\varepsilon)}[X] = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \varepsilon \ge p, \\ \min_{m\ge 1}\left\{m\varkappa:\; 1-\sum_{n=1}^{m} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} < \frac{\varepsilon}{p}\right\} & \text{для} \quad \varepsilon < p. \end{cases}$$

Обравши функцію $v(x) := (x+1)^2$, отримуємо премію середнього значення

$$\pi_{\text{с.з.}}[X] \;=\; v^{-1}(\mathsf{E}[v(X)]) \;=\; \sqrt{\varkappa^2 p\,(\lambda^2+3\lambda+1)+2\varkappa p\,(1+\lambda)+1}-1.$$

Проілюструємо техніку підрахунку премії нульової корисності страховика на прикладі лінійної функції корисності $U(x) = ax+b$, для $a>0$. Рівняння (2.29) в даному випадку набуватиме вигляду

$$\begin{aligned} b \;&=\; \sum_{n=1}^{+\infty}[a(\pi_{\text{н.к.с.}}[X]-n\varkappa)+b]\cdot\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}p+[a\pi_{\text{н.к.с.}}[X]+b](1-p) \\ &=\; a\pi_{\text{н.к.с.}}[X]+b-a\varkappa p\,(1+\lambda). \end{aligned}$$

Тобто, у випадку лінійної функції корисності страховика, отримуємо

$$\pi_{\text{н.к.с.}}[X] \;=\; \varkappa p\,(1+\lambda) \;=\; \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Використавши твердження **(b)** леми 3.4, отримуємо премію нульової корисності страховика у випадку експоненційної функції корисності страховика, $U(x) = -\alpha e^{-\beta x}+\gamma$, для $\min[\alpha,\,\beta]>0$, тобто

$$\pi_{\text{н.к.с.}}[X] \;=\; \pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] \;=\; \frac{1}{\alpha}\log(1-p+pe^{\alpha\varkappa-\lambda}\exp(\lambda e^{\alpha\varkappa})).$$

Проілюструємо також техніку підрахунку премії нульової корисності клієнта на прикладі лінійної функції корисності клієнта $u(x) = ax+b$, для $a>0$. Рівняння нульової корисності клієнта (2.27) в даному випадку набуватиме вигляду

$$\begin{aligned} b-a\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \;&=\; \sum_{n=1}^{+\infty}[b-an\varkappa]\cdot\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}p+b\,(1-p) \\ &=\; b-a\varkappa p\,(1+\lambda), \end{aligned}$$

тобто, шукана премія має вигляд

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \;=\; \varkappa p\,(1+\lambda) \;=\; \pi_{\text{нетто}}[X].$$

Використавши твердження **(b)** леми 3.6, отримуємо премію нульової корисності клієнта у випадку експоненційної функції корисності $u(x) = -\alpha e^{-\beta x}+\gamma$, для $\min[\alpha,\,\beta]>0$, тобто

$$\pi_{\text{н.к.к.}}[X] \;=\; \frac{1}{\alpha}\log(1-p+pe^{\alpha\varkappa-\lambda}\exp(\lambda e^{\alpha\varkappa})).$$

Підсумки

Протягом роботи над навчальним посібником були отримані наступні результати.

— Здійснено оглядовий аналіз моделей діяльності страхової компанії, а саме, класичної моделі ризику та її узагальнень як то збурена модель ризику, модель Спаре Андерсена (модель ризику, в якій пуасонівський процес заміняється процесом відновлення), модель зі стохастичним потоком премій, а також дискретних моделей з можливістю інвестування.

— Здійснено опис можливих методів підрахунку вартості страхових контрактів при відомих розподілах збитків. Зокрема описано нетто принцип, принцип математичного сподівання, принцип дисперсії, принцип середньоквадратичного відхилення, принцип максимальних збитків, експоненційний принцип, принцип Есшера, принцип відрегульований ризиком, квантільний принцип, принцип Ванга, принцип середнього значення, принцип еквівалентної корисності страховика, принцип нульової корисності страховика, принцип еквівалентної корисності клієнта та принцип нульової корисності клієнта. Здійснено класифікацію методів оцінювання за їх типами: найпростіші, параметричні, означені з використанням допоміжних функцій. Для параметричних методів вивчена властивість монотонності та гранична поведінка для допустимих значень параметрів.

— Для кожного з описаних принципів підрахунку вартості страхових контрактів здійснено перевірку виконання ряду бажаних властивостей, якими можуть володіти або не володіти принципи підрахунку вартості страхових контрактів. Зокрема перевірено виконання властивостей відсутності необґрунтованим надбавки на ризик, невід'ємності страхової надбавки, адитивності, мультиплікативної інваріантності, консистентності, відсутності грабування та ітеративності. Результати перевірки представлено у вигляді сумарної таблиці властивостей.

— Для принципу середнього значення, принципів еквівалентної і нульової корисності страховика та принципів еквівалентної і нульової корисності клієнта сформульовано та доведено характеризаційні теореми стосовно виконання ними властивостей адитивності, консистентності, ітеративності та мультиплікативної інваріантності. Характеризаційні теореми сформульовані у вигляді необхідних та достатніх умов виконання зазначеними методами згаданих властивостей накладених на гладкі допоміжні функції, які повністю задають такі методи страхового оцінювання.

— Продемонстровано методику оптимізації вартості страхових контрактів шляхом залучення декількох страхових компаній на прикладі експоненційного принципу страхового оцінювання.

— Отримано явні формули оцінювання вартості страхових контрактів для ризиків з випадковою появою страхової події для наступних випадків розподілів страхових компенсацій: виродженого розподілу, експоненційного розподілу, гіперекспоненційного розподілу, рівномірного розподілу та зсунутого нормованого пуасонівського розподілу.

— Використовуючи отримані явні формули оцінювання вартості страхових контрактів, в середовищі MatLab GUI розроблено пілотне програмне забезпечення “Premium Calculator” для аналізу вартості контрактів при деяких дискретних та неперервних розподілах виплат. За допомогою розробленого програмного забезпечення створено таблиці числових ілюстрацій для контрактів з можливістю випадкової появи страхової події при вищевказаних розподілах виплат.

Додаток A

Корисні нерівності

В даному додатку представлено частовживані нерівності, які використовувались при доведенні тверджень монографії, а саме, нерівності Єнсена для опуклих вгору та вниз функцій (а також дві леми, пов'язані з ними, для строго опуклих вгору та вниз функцій застосованих до вироджених випадкових величин), нерівність Ляпунова та нерівність Гельдера.

Нерівності Єнсена

Означення A.1. Дійснозначну функцію $v(x)$, де $x \in D$, називатимемо *опуклою вниз*, якщо для будь-якого $x_0 \in D$ існує пряма $l_0(x) = a_0x + b_0$, така, що $l_0(x_0) = v(x_0)$ та $l_0(x) \leq v(x)$ для всіх $x \in D$.

Теорема A.1. (dk: Jensen) *Якщо функція $v(x)$, для $x \in D$, є опуклою вниз, а область значень інтегровної випадкової величини X є підмножиною області D, то має місце наступна нерівність:*

$$\mathsf{E}[v(X)] \geq v(\mathsf{E}[X]). \tag{A.1}$$

Доведення. Оберемо $x_0 := \mathsf{E}[X]$, тоді, використовуючи означення опуклої вниз функції та властивість лінійності математичного сподівання, отримуємо

$$\mathsf{E}[v(X)] \geq \mathsf{E}[a_0X + b_0] = a_0\mathsf{E}[X] + b_0 = v(\mathsf{E}[X]),$$

тобто, твердження Теореми A.1 дійсно має місце. □

Означення A.2. Дійснозначну функцію $v(x)$, де $x \in D$, називатимемо *строго опуклою вниз*, якщо для будь-якого $x_0 \in D$ існує пряма $l_0(x) = a_0x + b_0$, така, що $l_0(x_0) = v(x_0)$ та $l_0(x) < v(x)$ для всіх $x \in D \setminus x_0$.

Лема A.1. *Для строго опуклої вниз функції $v(x)$ та випадкової величини X строга рівність у нерівності Єнсена (A.1), тобто*

$$\mathsf{E}[v(X)] = v(\mathsf{E}[X]),$$

виникає тоді й лише тоді, коли

$$\mathsf{P}\{X = C\} = 1, \quad \textit{для деякого } C \in \mathbb{R},$$

тобто, лише у випадках, коли X є виродженою величиною.

Доведення. Дійсно, у випадку виродженої випадкової величини X, тобто, такої, що рівна деякій константі C з ймовірністю одиниця, маємо

$$\mathsf{E}[v(X)] \;=\; v(C) \;=\; v(\mathsf{E}[X]).$$

Покажемо тепер, що у випадку невиродженої випадкової величини X та строго опуклої вниз функції $v(x)$, строга рівність у нерівності Єнсена (A.1) не виникає взагалі.

Дісйсно, для невиродженої випадкової величини X справедлива нерівність

$$\mathsf{P}\{X \neq \mathsf{E}[X]\} > 0.$$

Тоді, поклавши $x_0 = \mathsf{E}[X]$ та скориставшись формулою повної ймовірності, маємо

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[v(X)] \;&=\; \mathsf{E}[v(X)|X \neq \mathsf{E}[X]] \cdot \mathsf{P}\{X \neq \mathsf{E}[X]\} \\
&\quad+ \mathsf{E}[v(X)|X = \mathsf{E}[X]] \cdot \mathsf{P}\{X = \mathsf{E}[X]\} \\
&> \; \mathsf{E}[a_0X + b_0|X \neq \mathsf{E}[X]] \cdot \mathsf{P}\{X \neq \mathsf{E}[X]\} \\
&\quad+ \mathsf{E}[a_0X + b_0|X = \mathsf{E}[X]] \cdot \mathsf{P}\{X = \mathsf{E}[X]\} \\
&> \; \mathsf{E}[a_0X + b_0] \;=\; a_0\mathsf{E}[X] + b_0 \;=\; v(\mathsf{E}[X]).
\end{aligned}$$

Це завершує доведення леми A.1. □

Означення A.3. Дійснозначну функцію $u(x)$, де $x \in D$, називатимемо *опуклою вгору*, якщо для будь-якого $x_0 \in D$ існує пряма $l_0(x) = a_0x + b_0$, така, що $l_0(x_0) = u(x_0)$ та $l_0(x) \geq u(x)$ для всіх $x \in D$.

Теорема A.2. (dk: Jensen) *Якщо функція $u(x)$, для $x \in D$, є опуклою вгору, а область значень інтегровної випадкової величини X є підмножиною області D, то має місце наступна нерівність:*

$$\mathsf{E}[u(X)] \leq u(\mathsf{E}[X]). \tag{A.2}$$

Доведення. Оберемо $x_0 := \mathsf{E}[X]$, тоді, використовуючи означення опуклої вгору функції та властивість лінійності математичного сподівання, отримуємо

$$\mathsf{E}[u(X)] \leq \mathsf{E}[a_0X + b_0] = a_0\mathsf{E}[X] + b_0 = u(\mathsf{E}[X]),$$

тобто, твердження Теореми A.2 є справедливим. □

Означення A.4. Дійснозначну функцію $u(x)$, де $x \in D$, називатимемо *строго опуклою вгору*, якщо для будь-якого $x_0 \in D$ існує пряма $l_0(x) = a_0x + b_0$, така, що $l_0(x_0) = u(x_0)$ та $l_0(x) > u(x)$ для всіх $x \in D \setminus x_0$.

Лема A.2. *Для строго опуклої вгору функції $u(x)$ та випадкової величини X строга рівність у нерівності Єнсена (A.2), тобто*

$$\mathsf{E}[u(X)] = u(\mathsf{E}[X]),$$

виникає тоді й лише тоді, коли

$$\mathsf{P}\{X = C\} = 1, \quad \textit{для деякого } C \in \mathbb{R},$$

тобто, лише у випадках, коли X є виродженою величиною.

Доведення. Дійсно, у випадку виродженої випадкової величини X, тобто, такої, що рівна деякій константі C з ймовірністю одиниця, маємо

$$\mathsf{E}[u(X)] \;=\; u(C) \;=\; u(\mathsf{E}[X]).$$

Покажемо тепер, що у випадку невиродженої випадкової величини X та строго опуклої вгору функції $u(x)$, строга рівність в нерівності Єнсена (A.2) не виникає взагалі.

Дісйсно, для невиродженої випадкової величини X справедлива нерівність

$$\mathsf{P}\{X \neq \mathsf{E}[X]\} > 0.$$

Тоді, поклавши $x_0 = \mathsf{E}[X]$ та скориставшись формулою повної ймовірності, маємо

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[u(X)] \;&=\; \mathsf{E}[u(X)|X \neq \mathsf{E}[X]] \cdot \mathsf{P}\{X \neq \mathsf{E}[X]\} + \\
&\quad + \mathsf{E}[u(X)|X = \mathsf{E}[X]] \cdot \mathsf{P}\{X = \mathsf{E}[X]\} < \\
&< \; \mathsf{E}[a_0 X + b_0 | X \neq \mathsf{E}[X]] \cdot \mathsf{P}\{X \neq \mathsf{E}[X]\} + \\
&\quad + \mathsf{E}[a_0 X + b_0 | X = \mathsf{E}[X]] \cdot \mathsf{P}\{X = \mathsf{E}[X]\} < \\
&< \; \mathsf{E}[a_0 X + b_0] \;=\; a_0 \mathsf{E}[X] + b_0 \;=\; u(\mathsf{E}[X]).
\end{aligned}$$

Це завершує доведення леми А.2. □

Нерівність Ляпунова

Теорема А.3. (ru: Ляпунов) *Для будь-яких дійсних чисел α_1 та α_2, таких, що $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, та будь-якої випадкової величини Z, виконується нерівність:*

$$(\mathsf{E}[|Z|^{\alpha_1}])^{1/\alpha_1} \leq (\mathsf{E}[|Z|^{\alpha_2}])^{1/\alpha_2}. \tag{A.3}$$

Доведення. Для $\alpha_2 > \alpha_1$, функція $v(x) = |x|^{\alpha_2/\alpha_1}$ є опуклою вниз для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Покладаючи $X = |Z|^{\alpha_1}$ та використовуючи теорему А.1, отримуємо

$$(\mathsf{E}[|Z|^{\alpha_1}])^{\alpha_2/\alpha_1} = v(\mathsf{E}[X]) \leq \mathsf{E}[v(X)] = \mathsf{E}[|Z|^{\alpha_1 \cdot \alpha_2/\alpha_1}] = \mathsf{E}[|Z|^{\alpha_2}]$$

або, більш компактно,

$$(\mathsf{E}[|Z|^{\alpha_1}])^{\alpha_2/\alpha_1} \leq \mathsf{E}[|Z|^{\alpha_2}]. \tag{A.4}$$

Підносячи ліву та праву сторони нерівності (А.4) до степеня $1/\alpha_2$, отримуємо нерівність (А.3). □

Нерівність Гельдера

Теорема А.4. (de: Hölder) *Для будь-яких дійсних чисел p та q, що задовольняють умови*

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

та випадкових величин Z_1 та Z_2, таких, що

$$\mathsf{E}[|Z_1|^p] < +\infty \quad \textit{та} \quad \mathsf{E}[|Z_2|^q] < +\infty,$$

виконується нерівність:

$$\mathsf{E}[|Z_1 Z_2|] \leq (\mathsf{E}[|Z_1|^p])^{1/p} (\mathsf{E}[|Z_2|^q])^{1/q}. \tag{A.5}$$

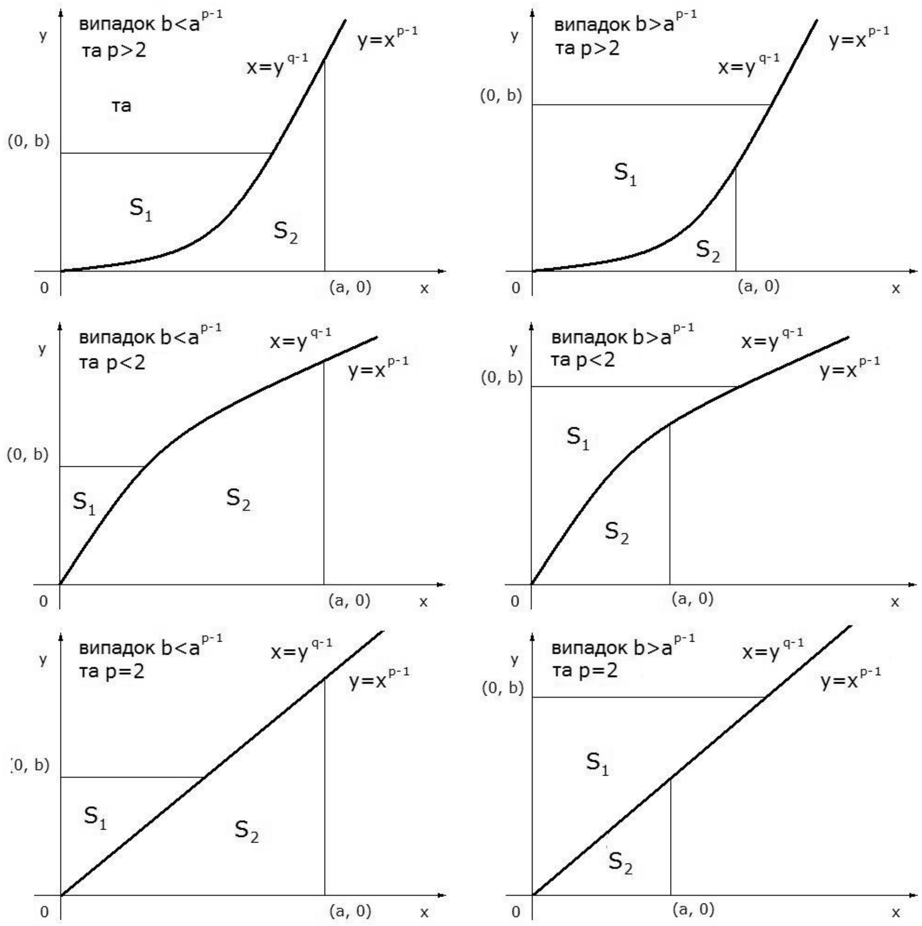

Рис. А.1: Ілюстрація до доведення нерівності Гельдера.

Доведення. Розглянемо множину точок (x, y), області $\min[x, y] > 0$, що задовольняють рівняння $y = x^{p-1}$ (або, що те саме, $x = y^{q-1}$). Множина таких точок формує криву, представлену жирними лініями на рис. А.1.

Підрахуємо площі криволінійних трапецій S_1 та S_2: площа криволінійної трапеції S_1

$$S_1 = \int\limits_0^b y^{q-1}dy = \frac{b^q}{q},$$

площа криволінійної трапеції S_2

$$S_2 = \int\limits_0^a x^{p-1}dx = \frac{a^p}{p}.$$

З рис. А.1 слідує, що площа прямокутника з вершинами в точках $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ та (a,b) не перевищує сумарну площу криволінійних трапецій S_1 та S_2, тобто,

$$a \cdot b \le S_1 + S_2 = \frac{b^q}{q} + \frac{a^p}{p}, \tag{A.6}$$

крім того, нерівність (А.6) перетворюється в строгу рівність, тобто

$$ab = \frac{b^q}{q} + \frac{a^p}{p},$$

тоді й лише тоді, коли $b = a^{p-1}$.

Виберемо

$$a = \frac{|Z_1|}{(\mathsf{E}[|Z_1|^p])^{1/p}} \quad \text{та} \quad b = \frac{|Z_2|}{(\mathsf{E}[|Z_2|^q])^{1/q}},$$

тоді нерівність (А.6) набуває вигляду

$$\frac{|Z_1 Z_2|}{(\mathsf{E}[|Z_1|^p])^{1/p}(\mathsf{E}[|Z_2|^q])^{1/q}} \le \frac{|Z_1|^p}{p\mathsf{E}[|Z_1|^p]} + \frac{|Z_2|^q}{q\mathsf{E}[|Z_2|^q]}. \tag{A.7}$$

Переходячи до математичного сподівання в обох частинах нерівності (А.7), отримуємо

$$\frac{\mathsf{E}[|Z_1 Z_2|]}{(\mathsf{E}[|Z_1|^p])^{1/p}(\mathsf{E}[|Z_2|^q])^{1/q}} \le \frac{\mathsf{E}[|Z_1|^p]}{p\mathsf{E}[|Z_1|^p]} + \frac{\mathsf{E}[|Z_2|^q]}{q\mathsf{E}[|Z_2|^q]} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{A.8}$$

Помноживши на $(\mathsf{E}[|Z_1|^p])^{1/p}(\mathsf{E}[|Z_2|^q])^{1/q}$ ліву й праву сторони нерівності (А.8), отримуємо нерівність (А.5). □

Додаток B

Програмне забезпечення

B.1 Графічний інтерфейс користувача

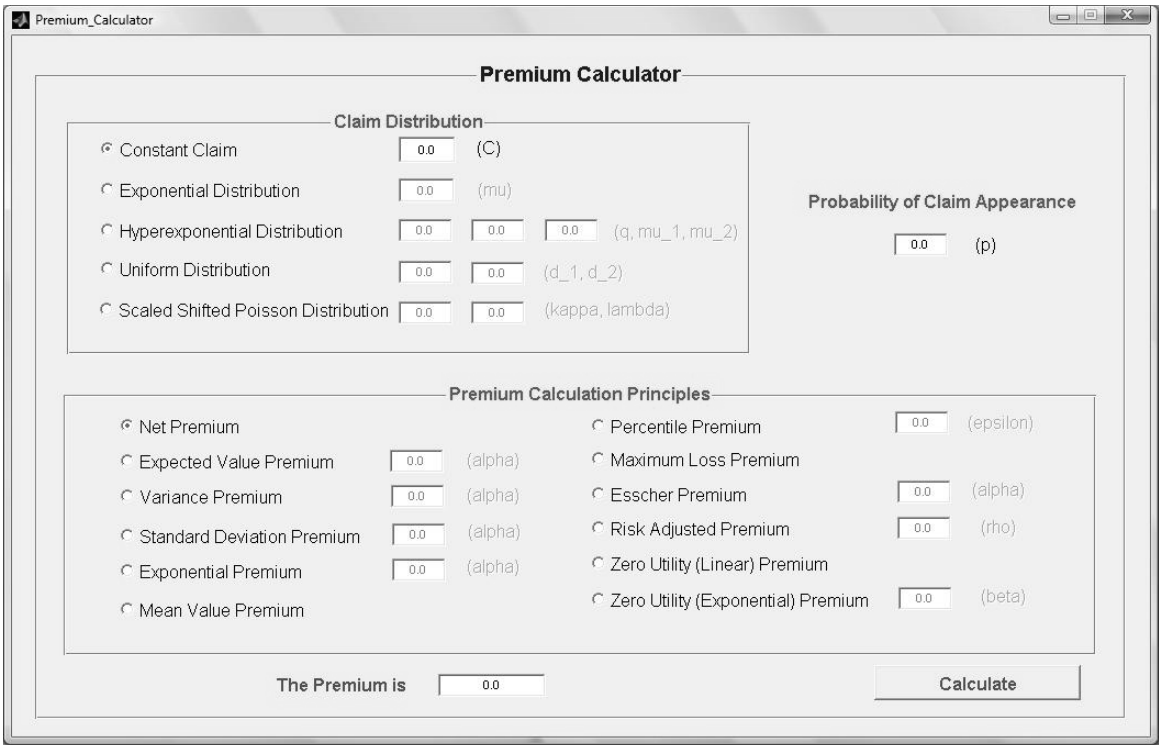

Рис. B.1: Інтерфейс програми “en: Premium Calculator”.

В цьому параграфі представлено інтерфейс власноруч розробленого автором посібника в середовищі MatLab GUI пілотного програмного забезпечення для обчислення вартості страхових контрактів із можливістю випадкової появи страхової події при деяких дискретних та неперервних розподілах збитків “Premium Calculator” за допомогою якого створено таблиці числових ілюстрацій представлені в додатку C даного навчального посібника.

Програма є легкою у використанні. Для обчислення вартості контракту, треба: 1) ввести ймовірність появи страхового випадку; 2) обрати розподіл збитків та ввести значення параметрів розподілу; 3) обрати спосіб оцінювання вартості контракту та при необхідності задати параметри; 4) натиснути кнопку “Calculate”.

В.2 Кодування

```
function varargout = Premium_Calculator(varargin)

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1; gui_State = struct('gui_Name', mfilename,
'gui_Singleton', gui_Singleton, 'gui_OpeningFcn', ...
        @Premium_Calculator_OpeningFcn, 'gui_OutputFcn', ...
    @Premium_Calculator_OutputFcn, 'gui_LayoutFcn', [] , ...
    'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT

%This is the opening function for the Premium Calculator Program
function Premium_Calculator_OpeningFcn(hObject, ...
                               eventdata, handles, varargin)
% Choose default command line output for Premium Calculator
handles.output = hObject;
% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% This part sets up initial values of the GUI elements
set(handles.Distribution_Constant, 'Value', 1);
set(handles.Distribution_Constant_C, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Constant_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Uniform, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Exponential_mu, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_hint, 'Enable', 'off');

set(handles.Premium_Net, 'Value', 1);
```

```
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

% Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = Premium_Calculator_OutputFcn(hObject,
eventdata, handles)
% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;

% This is the Callback function for the Constant Claim button
function Distribution_Constant_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Distribution_Constant, 'Value', 1);
set(handles.Distribution_Constant_C, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Constant_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Uniform, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Exponential_mu, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'Enable', 'off');
```

```
set(handles.Distribution_Hyperexponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function for the Distribution Exponential button
function Distribution_Exponential_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Distribution_Constant, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Constant_C, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Constant_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Exponential, 'Value', 1);
set(handles.Distribution_Exponential_mu, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Exponential_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Hyperexponential, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function for the Distribution Hyperexponential button
function Distribution_Hyperexponential_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Distribution_Constant, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Constant_C, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Constant_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Exponential_mu, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential, 'Value', 1);
set(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_hint, 'Enable', 'on');

%This is the Callback function for the Distribution Uniform button
function Distribution_Uniform_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Distribution_Constant, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Constant_C, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Constant_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform, 'Value', 1);
```

```
set(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Uniform_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Exponential_mu, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function for the
%Distribution Scaled Shifted Poisson button
function Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_Callback(hObject,
eventdata, handles)

set(handles.Distribution_Constant, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Constant_C, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Constant_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Uniform_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson, 'Value', 1);
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Distribution_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Exponential_mu, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential, 'Value', 0);
set(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'Enable', 'off');
set(handles.Distribution_Hyperexponential_hint, 'Enable', 'off');

%This function checks that the value of the parameter C
%for the Constant Claim is correctly entered
function Distribution_Constant_C_Callback(hObject, eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) |
user_entry <= 0
    errordlg('Parameter must be a positive real number', ...
                                      'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end
```

```
%This is the Create Function for the parameter C of the Constant Claim
function Distribution_Constant_C_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                       get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter mu
%for the Exponential Claim Distribution is correctly entered
function Distribution_Exponential_mu_Callback(hObject, eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) |
user_entry <= 0
    errordlg('Parameter must be a positive real number', ...
                                          'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter mu of
%the Exponential Claim Distribution
function Distribution_Exponential_mu_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                       get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter q
%for the Hyperexponential Claim Distribution is correctly entered
function Distribution_Hyperexponential_q_Callback(hObject,
eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
    if isnan(user_entry)|...
    user_entry <= 0 | user_entry >=1
    errordlg('Parameter must be a real number from ...
                     the interval (0,1)', 'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter q of
%the Hyperexponential Claim Distribution
function Distribution_Hyperexponential_q_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                       get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter mu_1
```

```
%for the Hyperexponential Claim Distribution is correctly entered
function Distribution_Hyperexponential_mu_1_Callback(hObject,
eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
    errordlg('Parameter mu_1 must be a positive real number', ...
                                            'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter mu_1
%of the Hyperexponential Claim Distribution
function Distribution_Hyperexponential_mu_1_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                       get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter mu_2
%for the Hyperexponential Claim Distribution is correctly entered
function Distribution_Hyperexponential_mu_2_Callback(hObject,
eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
    errordlg('Parameter mu_2 must be a positive real number', ...
                                            'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter mu_2
%of the Hyperexponential Claim Distribution
function Distribution_Hyperexponential_mu_2_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter d_1
%for the Uniform Claim Distribution is correctly entered
function Distribution_Uniform_d_1_Callback(hObject, eventdata, handles)

d_2=str2double(get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
    errordlg('Parameter must be a positive real number', ...
                                           'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
```

```
    guidata(hObject, handles);
elseif user_entry >= d_2 & d_2>0
    errordlg('Parameter d_1 must be smaller than ...
                          parameter d_2', 'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter d_1
%of the Uniform Claim Distribution
function Distribution_Uniform_d_1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter d_2
%for the Uniform Claim Distribution is correctly entered
function Distribution_Uniform_d_2_Callback(hObject, eventdata, handles)

d_1=str2double(get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
    errordlg('Parameter must be a positive real number', ...
                                           'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
elseif user_entry <= d_1 & d_1>0
    errordlg('Parameter d_2 must be larger than ...
                           parameter d_1', 'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter d_2
%of the Uniform Claim Distribution
function Distribution_Uniform_d_2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                       get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter kappa
%for the Scaled Shifted Poisson Claim Distribution is correctly entered
function Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa_Callback(...
                                    hObject, eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
    errordlg('Parameter must be a positive real number', ...
                                         'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
```

```
end

%This is the Create Function for the parameter kappa
%of the Scaled Shifted Poisson Claim Distribution
function Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa_CreateFcn(...
                                    hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                       get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter lambda
%for the Scaled Shifted Poisson Claim Distribution is correctly entered
function Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda_Callback(...
                                    hObject, eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
    errordlg('Parameter must be a positive real number',  ...
                                          'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter lambda
%of the Scaled Shifted Poisson Claim Distribution
function Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda_CreateFcn...
                                   (hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end


%This function check that the value of the claim appearance
%parameter p is correctly entered
function Claim_Probability_p_Callback(hObject, eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry < 0 | user_entry >1
    errordlg('Probability of claim appearance must be a ...
  real number from the interval [0, 1]', 'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the claim appearance parameter p
function Claim_Probability_p_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
%This is the Callback function for the Net Premium button
function Premium_Net_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Premium_Net, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function for the Expected Value Premium button
function Premium_Expected_Value_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Premium_Net, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
```

```
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function for the Variance Premium button
function Premium_Variance_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Premium_Net, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function
%for the Standard Deviation Premium button
function Premium_Standard_Deviation_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Premium_Net, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'on');
```

```
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function for the Exponential Premium button
function Premium_Exponential_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Premium_Net, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function for the Mean Value Premium button
function Premium_Mean_Value_Callback(hObject, eventdata, handles)
```

```
set(handles.Premium_Net, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function for the Percentile Premium button
function Premium_Percentile_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Premium_Net, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
```

```
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function for the Maximum Loss Premium button
function Premium_Maximum_Loss_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Premium_Net, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function for the Esscher Premium button
function Premium_Esscher_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Premium_Net, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
```

```
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function for the Risk Adjusted Premium button
function Premium_Risk_Adjusted_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Premium_Net, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function
%for the Zero Utility (Linear) Premium button
function Premium_Zero_Utility_Linear_Callback(hObject, eventdata, handles)

set(handles.Premium_Net, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
```

```
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'off');

%This is the Callback function
%for the Zero Utility (Exponential) Premium button
function Premium_Zero_Utility_Exponential_Callback(hObject,
eventdata, handles)

set(handles.Premium_Net, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Expected_Value_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Variance_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Variance_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Standard_Deviation_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Exponential_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Exponential_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Mean_Value, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Percentile_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Esscher_alpha, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Esscher_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value', 0);
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Risk_Adjusted_hint, 'Enable', 'off');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value', 0);
```

```
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value', 1);
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'Enable', 'on');
set(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_hint, 'Enable', 'on');

%This function checks that the value of the parameter alpha
%of the Expected Value Premium Principle is correctly entered
function Premium_Expected_Value_alpha_Callback(hObject, eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
    errordlg('Parameter must be a positive real number', ...
                                      'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter alpha
%of the Expected Value Premium Principle
function Premium_Expected_Value_alpha_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter alpha
%of the Variance Premium Principle is correctly entered
function Premium_Variance_alpha_Callback(hObject, eventdata,
handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
    errordlg('Parameter must be a positive real number', ...
                                        'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter alpha
%of the Variance Premium Principle
function Premium_Variance_alpha_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter alpha
%of the Standard Deviation Premium Principle is correctly entered
function Premium_Standard_Deviation_alpha_Callback(hObject,
eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
```

```
    errordlg('Parameter must be a positive real number', ...
                                      'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter alpha
%of the Standard Deviation Premium Principle
function Premium_Standard_Deviation_alpha_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter alpha
%of the Exponential Premium Principle is correctly entered
function Premium_Exponential_alpha_Callback(hObject, eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
    errordlg('Parameter must be a positive real number', ...
                                      'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter alpha
%of the Exponential Premium Principle
function Premium_Exponential_alpha_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter epsilon
%of the Percentile Premium Principle is correctly entered
function Premium_Percentile_epsilon_Callback(hObject, eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry < 0 | user_entry >1
    errordlg('Parameter must be a real number from ...
                    the interval [0,1]', 'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter epsilon
%of the Percentile Premium Principle
function Premium_Percentile_epsilon_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
```

```
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter alpha
%of the Esscher Premium Principle is correctly entered
function Premium_Esscher_alpha_Callback(hObject, eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
    errordlg('Parameter must be a positive real number', ...
                                      'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter alpha
%of the Esscher Premium Principle
function Premium_Esscher_alpha_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter rho
%of the Risk Adjusted Premium Principle is correctly entered
function Premium_Risk_Adjusted_rho_Callback(hObject, eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry < 1
    errordlg('Parameter must be a real number which...
                    not smaller then 1', 'Bad Input', 'modal');
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter rho
%of the Risk Adjusted Premium Principle
function Premium_Risk_Adjusted_rho_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This function checks that the value of the parameter alpha
%of the Zero Utility (exponential) Premium Principle
%is correctly entered
function Premium_Zero_Utility_Exponential_beta_Callback(...
                                   hObject, eventdata, handles)

user_entry=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(user_entry) | user_entry <= 0
    errordlg('Parameter must be a positive real number', ...
                                      'Bad Input', 'modal');
```

```
    set(hObject, 'string', '0.0');
    guidata(hObject, handles);
end

%This is the Create Function for the parameter alpha
%of the Zero Utility (exponential) Premium Principle
function Premium_Zero_Utility_Exponential_beta_CreateFcn(...
                                   hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This is the Callback of the Output box
function Output_Premium_Callback(hObject, eventdata, handles)

%This is the Create Function of the Output box
function Output_Premium_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), ...
                      get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

%This is the CallBack function of the Calculate Button
function Output_Button_Callback(hObject, eventdata, handles)

%parameter_flag is the flag variable
%that checks if all parameters are correctly entered
parameters_flag=0;

%This checks if the parameter C of the Constant Claim
%is correctly entered
if get(handles.Distribution_Constant, 'Value')==1
    if str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'))<=0
        errordlg('Parameter C must be a positive real number', ...
                                    'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks if the parameter mu
%of the Exponential Claim Distribution is correctly entered
if get(handles.Distribution_Exponential, 'Value')==1
    if str2double(get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'))<=0
        errordlg('Parameter of Exponential Distribution...
       must be a positive real number', 'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks if the parameters
%of the Hyperexponential Claim Distribution are correctly entered
if get(handles.Distribution_Hyperexponential, 'Value')==1
```

```
    if str2double(get(...
       handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'))<=0 | ...
        str2double(get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, ...
                                             'string'))>= 1
        errordlg('Parameter q of Hyperexponential ...
                 Distribution must be a real number from...
                 the interval (0, 1)', 'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    elseif str2double(get(...
      handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'))<=0
        errordlg('Parameter mu_1 of Hyperexponential...
               Distribution must be a positive real number',...
                                          'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    elseif str2double(get(...
      handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'))<=0
        errordlg('Parameter mu_2 of Hyperexponential ...
              Distribution must be a positive real number', ...
                                          'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks that the parameters
%of the Uniform Claim Distribution are correctly entered
if get(handles.Distribution_Uniform, 'Value')==1
    if str2double(get(handles.Distribution_Uniform_d_1, ...
                                                 'string'))<=0
            errordlg('Parameter d_1 of Uniform Distribution...
        must be a positive real number', 'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    elseif str2double(get(handles.Distribution_Uniform_d_2, ...
                                                  'string'))<=0
        errordlg('Parameter d_2 of Uniform Distribution must...
             be a positive real number', 'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks that the parameters of the Scaled Shifted Poisson
%Claim Distribution are correctly entered
if get(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson, 'Value')==1
    if str2double(...
     get(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, ...
                                                  'string'))<=0
        errordlg('Parameter kappa of Scaled Shifted Poisson ...
              Distribution must be a positive real number', ...
                                          'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    elseif str2double(get(...
         handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, ...
                                                   'string'))<=0
        errordlg('Parameter lambda of Scaled Shifted Poisson ...
               Distribution must be a positive real number', ...
                                           'Bad Input', 'modal');
```

```
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks that the claim probability p is correctly entered
if parameters_flag==0 && str2double(...
            get(handles.Claim_Probability_p, 'string'))<0 | ...
       str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'))>1
    errordlg('Probability of claim appearance must be a real...
       number from the interval (0, 1]', 'Bad Input', 'modal');
    parameters_flag=1;
end

%This checks that the parameter alpha of the Expected Value
%Premium Principle is correctly entered
if parameters_flag==0 && get(handles.Premium_Expected_Value,
'Value')
    if str2double(get(handles.Premium_Expected_Value_alpha, ...
                                                  'string'))<=0
        errordlg('Set Up Parameter of Expected Value ...
                    Premium Principle!', 'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks that the parameter alpha of the Variance
%Premium Principle is correctly entered
if parameters_flag==0 && get(handles.Premium_Variance, 'Value')
    if str2double(get(handles.Premium_Variance_alpha, ...
                                                  'string'))<=0
        errordlg('Set Up Parameter of Variance Premium ...
                            Principle!', 'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks that the parameter alpha of the Standard Deviation
%Premium Principle is correctly entered
if parameters_flag==0 && get(handles.Premium_Standard_Deviation,
'Value')
  if str2double(get(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, ...
                                                    'string'))<=0
        errordlg('Set Up Parameter of Standard Deviation...
                    Premium Principle!', 'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks that the parameter alpha of the Exponential
%Premium Principle is correctly entered
if parameters_flag==0 && get(handles.Premium_Exponential, 'Value')
    if str2double(get(handles.Premium_Exponential_alpha, ...
                                                     'string'))<=0
        errordlg('Set Up Parameter of Exponential Premium ...
                               Principle!', 'Bad Input', 'modal');
```

```
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks that the parameter epsilon of the Percentile
%Premium Principle is correctly entered
if parameters_flag==0 && get(handles.Premium_Percentile, 'Value')
    if str2double(get(handles.Premium_Percentile_epsilon, ...
                                                    'string'))<=0
        errordlg('Set Up Parameter of Percentile Premium ...
                              Principle!', 'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks that the parameter alpha of the Esscher
%Premium Principle is correctly entered
if parameters_flag==0 && get(handles.Premium_Esscher, 'Value')
    if str2double(get(handles.Premium_Esscher_alpha, ...
                                                 'string'))<=0
        errordlg('Set Up Parameter of Esscher Premium ...
                           Principle!', 'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks that the parameter rho of the Risk Adjusted
%Premium Principle is correctly entered
if parameters_flag==0 && get(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value')
    if str2double(get(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'string'))<=0
        errordlg('Set Up Parameter of Risk Adjusted Premium ...
                             Principle', 'Bad Input', 'modal');
        parameters_flag=1;
    end
end

%This checks that the parameter beta of the Zero Utility
%(Exponential) Premium Principle is correctly entered
if parameters_flag==0 &&
get(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value')
       if str2double(...
          get(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta,...
                                                  'string'))<=0
       errordlg('Set Up Parameter of Zero Utility ...
                          (Exponential) Premium Principle', ...
                                       'Bad Input', 'modal');
       parameters_flag=1;
   end
end

% This part calculates Premiums for the case of the Constant Claim
if parameters_flag==0 && get(handles.Distribution_Constant, 'Value')
    if  get(handles.Premium_Net, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
```

```
        answer=C*p;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Expected_Value, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
        alpha=str2double(...
          get(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'string'));
        answer=C*p*(1+alpha);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Variance, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
        alpha=str2double(get(handles.Premium_Variance_alpha, 'string'));
        answer=C*p+alpha*C^2*(p-p^2);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
        alpha=str2double(...
            get(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'string'));
        answer=C*p+alpha*C*sqrt(p-p^2);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Exponential, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
        alpha=str2double(...
             get(handles.Premium_Exponential_alpha, 'string'));
        answer=(1/alpha)*log(1-p+exp(alpha*C)*p);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Mean_Value, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
        answer=C*sqrt(p);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Percentile, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
        epsilon=str2double(...
            get(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'string'));
        if epsilon <= p
            answer=C;
            set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
            else
            set(handles.Output_Premium, 'string', '0');
        end
    elseif get(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value')
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
        answer=C;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Esscher, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
        alpha=str2double(get(handles.Premium_Esscher_alpha, 'string'));
        answer=(C*exp(alpha*C)*p)/(1-p+exp(alpha*C)*p);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
```

```
    elseif get(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
        rho=str2double(...
             get(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'string'));
        answer=C*p^(1/rho);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
        answer=C*p;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        C=str2double(get(handles.Distribution_Constant_C, 'string'));
        beta=str2double(...
        get(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'string'));
        answer=(1/beta)*log(1-p+exp(beta*C)*p);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    end
end

%This part calculates Premiums for the case
%of the Exponential Claim Distribution
if parameters_flag==0 && get(handles.Distribution_Exponential, 'Value')
    if  get(handles.Premium_Net, 'Value')
      p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
      mu=str2double(get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'));
        answer=p/mu;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Expected_Value, 'Value')
       p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
       mu=str2double(get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'));
        alpha=str2double(...
           get(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'string'));
        answer=(p/mu)*(1+alpha);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Variance, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        mu=str2double(get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'));
        alpha=str2double(get(handles.Premium_Variance_alpha, 'string'));
        answer=p/mu+alpha*(2*p-p^2)/(mu^2);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        mu=str2double(...
             get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'));
        alpha=str2double(...
        get(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'string'));
        answer=(p+alpha*sqrt(2*p-p^2))/mu;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Exponential, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        mu=str2double(...
             get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'));
```

```
        alpha=str2double(...
               get(handles.Premium_Exponential_alpha, 'string'));
        if alpha < mu
            answer=(1/alpha)*log(p*mu/(mu-alpha)+1-p);
            set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
        else
            set(handles.Output_Premium, 'string', 'infinity');
        end
    elseif get(handles.Premium_Mean_Value, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        mu=str2double(...
             get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'));
        answer=sqrt(2*p)/mu;
          set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Percentile, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        mu=str2double(get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'));
        epsilon=str2double(...
              get(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'string'));
        if epsilon < p
            answer=(-1/mu)*log(epsilon/p);
            set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
            else
            set(handles.Output_Premium, 'string', '0');
        end
    elseif get(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value')
        set(handles.Output_Premium, 'string', 'infinity');
    elseif get(handles.Premium_Esscher, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        mu=str2double(get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'));
        alpha=str2double(get(handles.Premium_Esscher_alpha, 'string'));
        if alpha < mu
            answer=p*mu/((mu-alpha+p*alpha)*(mu-alpha));
            set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
            else
            set(handles.Output_Premium, 'string', 'infinity');
        end
    elseif get(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        mu=str2double(...
             get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'));
        rho=str2double(...
               get(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'string'));
        answer=p^(1/rho)*rho/mu;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        mu=str2double(...
             get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'));
        answer=p/mu;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        mu=str2double(...
             get(handles.Distribution_Exponential_mu, 'string'));
```

```
        beta=str2double(get(...
               handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'string'));
        if beta < mu
            answer=(1/beta)*log(p*mu/(mu-beta)+1-p);
            set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
        else
            set(handles.Output_Premium, 'string', 'infinity');
        end
    end
end

%This part calculates Premiums for the case
%of the Hyperexponential Claim Distribution
if parameters_flag==0 && ...
get(handles.Distribution_Hyperexponential, 'Value')
    if  get(handles.Premium_Net, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        q=str2double(...
        get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'));
        mu_1=str2double(...
        get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'));
        mu_2=str2double(...
        get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'));
        answer=p*q/mu_1+p*(1-q)/mu_2;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Expected_Value, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        q=str2double(...
        get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'));
        mu_1=str2double(...
        get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'));
        mu_2=str2double(...
        get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'));
        alpha=str2double(...
              get(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'string'));
        answer=(p*q/mu_1+p*(1-q)/mu_2)*(1+alpha);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Variance, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        q=str2double(...
           get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'));
        mu_1=str2double(...
        get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'));
        mu_2=str2double(...
        get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'));
        alpha=str2double(...
             get(handles.Premium_Variance_alpha, 'string'));
        answer=p*q/mu_1+p*(1-q)/mu_2+alpha*(2*p*q/(mu_1)^2+...
                     2*p*(1-q)/(mu_2)^2-(p*q/mu_1+p*(1-q)/mu_2)^2);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        q=str2double(...
         get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'));
        mu_1=str2double(...
```

```
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'));
    mu_2=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'));
    alpha=str2double(...
    get(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'string'));
    answer=p*q/mu_1+p*(1-q)/mu_2+alpha*sqrt(2*p*q/...
        (mu_1)^2+2*p*(1-q)/(mu_2)^2-(p*q*mu_1+p*(1-q)/mu_2)^2);
    set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
elseif get(handles.Premium_Exponential, 'Value')
    p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
    q=str2double(...
     get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'));
    mu_1=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'));
    mu_2=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'));
    alpha=str2double(...
             get(handles.Premium_Exponential_alpha, 'string'));
    if alpha < min(mu_1, mu_2)
        answer=(1/alpha)*log(p*mu_1*q/(mu_1-alpha)+...
                          p*mu_2*(1-q)/(mu_2-alpha)+1-p);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    else
        set(handles.Output_Premium, 'string', 'infinity');
    end
elseif get(handles.Premium_Mean_Value, 'Value')
    p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
    q=str2double(...
       get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'));
    mu_1=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'));
    mu_2=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'));
    answer=sqrt(2*p*q/(mu_1)^2+2*p*(1-q)/(mu_2)^2);
    set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
elseif get(handles.Premium_Percentile, 'Value')
    p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
    q=str2double(...
     get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'));
    mu_1=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'));
    mu_2=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'));
    epsilon=str2double(...
            get(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'string'));
    if epsilon < p
        vspom2=inline('x(1)*x(2)*exp(-x(3)*x(6))+...
               x(1)*(1-x(2))*exp(-x(4)*x(6))-x(5)','x');
        answer=fmincon(vspom2,[p,q,mu_1,mu_2,...
           epsilon,2],[],[],[],[],[p,q,mu_1,mu_2,...
                epsilon,0],[p,q,mu_1,mu_2,epsilon,inf]);
        set(handles.Output_Premium, 'string', ...
                                    num2str(answer(6)));
    else
        set(handles.Output_Premium, 'string', '0');
```

```
    end
elseif get(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value')
    set(handles.Output_Premium, 'string', 'infinity');
elseif get(handles.Premium_Esscher, 'Value')
    p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
    q=str2double(...
      get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'));
    mu_1=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'));
    mu_2=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'));
    alpha=str2double(...
                 get(handles.Premium_Esscher_alpha, 'string'));
    if alpha < min(mu_1, mu_2)
        answer=(p*mu_1*q*(mu_2)^2+p*mu_1*q*alpha^2+...
               p*mu_2*(mu_1)^2-2*p*mu_1*mu_2*alpha+...
               p*mu_2*alpha^2-p*q*mu_2*(mu_1)^2-...
               p*q*mu_2*alpha^2)/((mu_1-alpha)*...
              (mu_2-alpha)*((mu_2-alpha+p*alpha)*...
              (mu_1-alpha)-alpha*p*q*(mu_1-mu_2)));
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
        else
        set(handles.Output_Premium, 'string', 'infinity');
    end
elseif get(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value')
    p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
    q=str2double(...
     get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'));
    mu_1=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'));
    mu_2=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'));
    rho=str2double(...
            get(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'string'));
    syms z;
    answer=double(int((p*q*exp(-mu_1*z) +...
             p*(1-q)*exp(-mu_2*z)).^(1./rho) ,z,0,inf));
    set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
elseif get(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value')
    p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
    q=str2double(...
     get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'));
    mu_1=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'));
    mu_2=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'));
    answer=p*q/mu_1+p*(1-q)/mu_2;
    set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
elseif get(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value')
    p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
    q=str2double(...
     get(handles.Distribution_Hyperexponential_q, 'string'));
    mu_1=str2double(...
    get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_1, 'string'));
    mu_2=str2double(...
```

```
        get(handles.Distribution_Hyperexponential_mu_2, 'string'));
        beta=str2double(...
        get(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'string'));
        if beta < min(mu_1, mu_2)
            answer=(1/beta)*log(1-p -p*mu_1*q/(beta-mu_1)-...
                                   p*mu_2*(1-q)/(beta-mu_2));
            set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
        else
            set(handles.Output_Premium, 'string', 'infinity');
        end
    end
end

%This part calculates Premiums for the case
%of the Uniform Claim Distribution
if parameters_flag==0 && get(handles.Distribution_Uniform, 'Value')
    if  get(handles.Premium_Net, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        d_1=str2double(...
                  get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                  get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        answer=(p*(d_2+d_1))/2;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Expected_Value, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        d_1=str2double(...
                 get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                 get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        alpha=str2double(...
             get(handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'string'));
        answer=(1+alpha)*(p*(d_2+d_1))/2;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Variance, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        d_1=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        alpha=str2double(...
                  get(handles.Premium_Variance_alpha, 'string'));
        answer=(p*(d_2+d_1))/2+alpha*(p*(d_2^2+d_1*d_2+...
                                     d_1^2)/3-p^2*(d_1+d_2)^2/4);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        d_1=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        alpha=str2double(...
        get(handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'string'));
        answer=(p*(d_2+d_1))/2+alpha*sqrt(p*(d_2^2+d_1*d_2+...
                                     d_1^2)/3-p^2*(d_1+d_2)^2/4);
```

```
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Exponential, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        d_1=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        alpha=str2double(...
               get(handles.Premium_Exponential_alpha, 'string'));
        answer=(1/alpha)*log(p*(exp(alpha*d_2)-...
                          exp(alpha*d_1))/(alpha*(d_2-d_1))+1-p);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Mean_Value, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        d_1=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        answer=sqrt(p*(d_2^2+d_1*d_2+d_1^2)/3);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Percentile, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        d_1=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        epsilon=str2double(...
              get(handles.Premium_Percentile_epsilon, 'string'));
        if epsilon < p
            answer=d_2-epsilon*(d_2-d_1)/p;
            set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
            else
            set(handles.Output_Premium, 'string', '0');
        end
    elseif get(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value')
        d_1=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        answer=d_2;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Esscher, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        d_1=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        alpha=str2double(...
                  get(handles.Premium_Esscher_alpha,  'string'));
        answer=p*(alpha*d_2*exp(alpha*d_2)-alpha*d_1*...
                exp(alpha*d_1)-exp(alpha*d_2)+exp(alpha*d_1))/...
                     (alpha*p*(exp(alpha*d_2)-exp(alpha*d_1))+...
                                        alpha^2*(1-p)*(d_2-d_1));
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value')
```

```
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        d_1=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        rho=str2double(...
               get(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'string'));
        answer= p^(1./rho)*(d_1+p*d_2)/(1+p)
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        d_1=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        answer=(p*(d_2+d_1))/2;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        d_1=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_1, 'string'));
        d_2=str2double(...
                get(handles.Distribution_Uniform_d_2, 'string'));
        beta=str2double(...
        get(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'string'));
        answer=(1/beta)*log(p*(exp(beta*d_2)-exp(beta*d_1))/...
                                    (beta*(d_2-d_1))+1-p);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    end
end

% This part calculates Premiums for the case
%of the Scaled Shifted Poisson  Claim Distribution
if parameters_flag==0 &&
get(handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson, 'Value')
    if  get(handles.Premium_Net, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        kappa=str2double(get(...
             handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'string'));
        lambda=str2double(get(...
            handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'string'));
        answer=kappa*p*(1+lambda);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Expected_Value, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        kappa=str2double(get(...
             handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'string'));
        lambda=str2double(get(...
            handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'string'));
        alpha=str2double(get(...
                handles.Premium_Expected_Value_alpha, 'string'));
        answer=(1+alpha)*kappa*p*(1+lambda);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Variance, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
```

```
        kappa=str2double(get(...
             handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'string'));
        lambda=str2double(get(...
            handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'string'));
        alpha=str2double(get(handles.Premium_Variance_alpha, 'string'));
        answer=kappa*p*(1+lambda)+alpha*(kappa^2*p*(lambda^2+...
                      3*lambda)-kappa^2*p^2*(2*lambda+lambda^2));
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Standard_Deviation, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        kappa=str2double(get(...
             handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'string'));
        lambda=str2double(get(...
            handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'string'));
        alpha=str2double(get(...
                      handles.Premium_Standard_Deviation_alpha, 'string'));
        answer=kappa*p*(1+lambda)+alpha*sqrt(kappa^2*p*...
              (lambda^2+3*lambda)-kappa^2*p^2*(2*lambda+lambda^2));
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Exponential, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        kappa=str2double(get(...
             handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'string'));
        lambda=str2double(get(...
            handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'string'));
        alpha=str2double(...
                 get(handles.Premium_Exponential_alpha, 'string'));
        answer=(1/alpha)*log(1-p+p*exp(alpha*kappa-...
                             lambda)*exp(lambda*exp(alpha*kappa)));
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Mean_Value, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        kappa=str2double(get(...
             handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'string'));
        lambda=str2double(get(...
            handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'string'));
        answer=kappa^2*p*(lambda^2+3*lambda+1);
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    elseif get(handles.Premium_Percentile, 'Value')
        p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
        kappa=str2double(get(...
             handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'string'));
        lambda=str2double(get(...
            handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'string'));
        epsilon=str2double(get(...
                    handles.Premium_Percentile_epsilon, 'string'));
        if epsilon < p
            m=1;
            summa_po_n=0;
            vspom=exp(-lambda);
            while summa_po_n<=(1-epsilon/p)
               summa_po_n=summa_po_n+vspom;
               vspom=vspom*lambda/m;
               m=m+1;
            end
```

```
        answer=m*kappa;
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
        else
        set(handles.Output_Premium, 'string', '0');
    end
elseif get(handles.Premium_Maximum_Loss, 'Value')
    set(handles.Output_Premium, 'string', 'infinity');
elseif get(handles.Premium_Esscher, 'Value')
    p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
    kappa=str2double(get(...
        handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'string'));
    lambda=str2double(get(...
       handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'string'));
    alpha=str2double(...
                get(handles.Premium_Esscher_alpha, 'string'));
    answer=p*kappa*exp(alpha*kappa-lambda+lambda*...
        exp(alpha*kappa))*(1+lambda*exp(alpha*kappa))/(1-p+...
      p*exp(alpha*kappa-lambda)*exp(lambda*exp(alpha*kappa)));
    set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
elseif get(handles.Premium_Risk_Adjusted, 'Value')
    p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
    kappa=str2double(get(...
       handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'string'));
    lambda=str2double(get(...
      handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'string'));
    rho=str2double(...
           get(handles.Premium_Risk_Adjusted_rho, 'string'));
    summa_po_n=0;
    summa_po_k=0;
    while 1-summa_po_k>0.0001
        k=0;
        summa_po_k=0;
        vspom=exp(-1*lambda);
        kfactorial=1;
        while lambda^k./kfactorial> 0.0001
            summa_po_k= summa_po_k+vspom;
            k=k+1;
            kfactorial=kfactorial*k;
            vspom=vspom*lambda./k;
        end
        summa_po_n=summa_po_n+(1-summa_po_k)^(1./rho);
    end
    answer= p^(1./rho)*kappa*(1-summa_po_n);
    set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
elseif get(handles.Premium_Zero_Utility_Linear, 'Value')
    p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
    kappa=str2double(get(...
       handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'string'));
    lambda=str2double(get(...
      handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'string'));
    answer=kappa*p*(1+lambda);
    set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
elseif get(handles.Premium_Zero_Utility_Exponential, 'Value')
    p=str2double(get(handles.Claim_Probability_p, 'string'));
    kappa=str2double(get(...
```

```
           handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_kappa, 'string'));
        lambda=str2double(get(...
handles.Distribution_Scaled_Shifted_Poisson_lambda, 'string'));
        beta=str2double(get(...
           handles.Premium_Zero_Utility_Exponential_beta, 'string'));
        answer=(1/beta)*log(1-p+...
        p*exp(beta*kappa-lambda)*exp(lambda*exp(beta*kappa)));
        set(handles.Output_Premium, 'string', num2str(answer));
    end
end

%This returns Calculate button to the upper position
set(handles.Output_Button, 'Value', 0);
```

Додаток C

Числові ілюстрації

В цьому додатку ми представляємо таблиці числових ілюстрацій для контрактів з можливістю випадкової появи страхової події для деяких дискретних та неперервних розподілів страхових компенсацій. Таблиці створені з використанням явних формул страхового оцінювання отриманих в четвертому розділі навчального посібника та розробленого на їх основі пілотного програмного забезпечення щойно представленого у додатку B.

Сталі виплати з випадковою появою

Табл. C.1: Сталі виплати з випадковою появою

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Нетто	$C = 0.2$		0.02	0.04	0.1
	$C = 2$		0.2	0.4	1
	$C = 20$		2	4	10
Математичного сподівання	$C = 0.2$	$\alpha = 0.2$	0.024	0.048	0.12
		$\alpha = 0.5$	0.03	0.06	0.15
		$\alpha = 0.8$	0.036	0.072	0.18
	$C = 2$	$\alpha = 0.2$	0,24	0.48	1.2
		$\alpha = 0.5$	0.3	0.6	1.5
		$\alpha = 0.8$	0.36	0.72	1.8
	$C = 20$	$\alpha = 0.2$	2.4	4.8	12
		$\alpha = 0.5$	3	6	15
		$\alpha = 0.8$	3.6	7.2	18
Дисперсії	$C = 0.2$	$\alpha = 0.2$	0.0207	0.0412	0.102
		$\alpha = 0.5$	0.0218	0.0432	0.105
		$\alpha = 0.8$	0.0228	0.0451	0.108
	$C = 2$	$\alpha = 0.2$	0.272	0.528	1.2
		$\alpha = 0.5$	0.38	0.72	1.5
		$\alpha = 0.8$	0.488	0.912	1.8
	$C = 20$	$\alpha = 0.2$	9.2	16.8	30
		$\alpha = 0.5$	20	36	60

Продовження на наступній сторінці

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
	$C = 20$	$\alpha = 0.8$	30.8	55.2	90
Середньо-квадратичного відхилення	$C = 0.2$	$\alpha = 0.2$	0.032	0.056	0.12
		$\alpha = 0.5$	0.05	0.08	0.15
		$\alpha = 0.8$	0.068	0.104	0.18
	$C = 2$	$\alpha = 0.2$	0.32	0.56	1.2
		$\alpha = 0.5$	0.5	0.8	1.5
		$\alpha = 0.8$	0.68	1.04	1.8
	$C = 20$	$\alpha = 0.2$	3.2	5.6	12
		$\alpha = 0.5$	5	8	15
		$\alpha = 0.8$	6.8	10.4	18
Експоненційний	$C = 0.2$	$\alpha = 0.2$	0.0203	0.0406	0.101
		$\alpha = 1$	0.0218	0.0433	0.1049
		$\alpha = 20$	0.0925	0.1230	0.1662
	$C = 2$	$\alpha = 0.2$	0.2401	0.4691	1.0993
		$\alpha = 1$	0.4940	0.8232	1.4338
		$\alpha = 20$	1.8849	1.9195	1.9653
	$C = 20$	$\alpha = 0.2$	9.25	12.3063	16.625
		$\alpha = 1$	17.6974	18.3906	19.3069
		$\alpha = 20$	19.8849	19.9195	19.9653
Середнього значення	$C = 0.2$	$(x+1)^2$	0.0632	0.0894	0.1414
	$C = 2$	$(x+1)^2$	0.6324	0.8944	1.4142
	$C = 20$	$(x+1)^2$	6.3246	8.9443	14.1421
Квантільний	$C = 0.2$	$\varepsilon = 0.1$	0.2	0.2	0.2
		$\varepsilon = 0.2$	0	0.2	0.2
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	0.2
	$C = 2$	$\varepsilon = 0.1$	2	2	2
		$\varepsilon = 0.2$	0	2	2
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	2
	$C = 20$	$\varepsilon = 0.1$	20	20	20
		$\varepsilon = 0.2$	0	20	20
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	20
Максимальних збитків	$C = 0.2$		0.2	0.2	0.2
	$C = 2$		2	2	2
	$C = 20$		20	20	20
Есшера	$C = 0.2$	$\alpha = 0.2$	0.0207	0.0412	0.102
		$\alpha = 1$	0.0238	0.0467	0.1099
		$\alpha = 20$	0.1717	0.1863	0.1964
	$C = 2$	$\alpha = 0.2$	0.2843	0.5432	1.1974
		$\alpha = 1$	0.9017	1.2976	1.7616
		$\alpha = 20$	2	2	2
	$C = 20$	$\alpha = 0.2$	17.1697	18.6348	19.6403
		$\alpha = 1$	20	20	20
		$\alpha = 20$	20	20	20
Відрегульований ризиком	$C = 0.2$	$\rho = 1.5$	0.043	0.0683	0.1259
		$\rho = 3$	0.0928	0.1169	0.1587
		$\rho = 5$	0.1261	0.1449	0.1741

Продовження на наступній сторінці

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Відрегульований ризиком	$C = 2$	$\rho = 1.5$	0.4308	0.6839	1.2599
		$\rho = 3$	0.9283	1.1696	1.5874
		$\rho = 5$	1.2619	1.4496	1.7411
	$C = 20$	$\rho = 1.5$	4.3089	6.8399	12.5992
		$\rho = 3$	9.2832	11.6961	15.874
		$\rho = 5$	12.6191	14.4956	17.411
Нульової корисності (лінійна)	$C = 0.2$		0.02	0.04	0.1
	$C = 2$		0.2	0.4	1
	$C = 20$		2	4	10
Нульової корисності (експоненційна)	$C = 0.2$	$\beta = 0.2$	0.0203	0.0406	0.101
		$\beta = 1$	0.0218	0.0433	0.1049
		$\beta = 20$	0.0925	0.123	0.1662
	$C = 2$	$\beta = 0.2$	0.2401	0.4691	1.0993
		$\beta = 1$	0.494	0.8232	1.4338
		$\beta = 20$	1.8849	1.9195	1.9653
	$C = 20$	$\beta = 0.2$	9.25	12.3063	16.625
		$\beta = 1$	17.6974	18.3906	19.3069
		$\beta = 20$	19.8849	19.9195	19.9653

Експоненційний розподіл виплат

Табл. С.2: Експоненційний розподіл виплат

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Нетто	$\mu = 0.5$		0.2	0.4	1
	$\mu = 1$		0.1	0.2	0.5
	$\mu = 5$		0.02	0.04	0.1
Математичного сподівання	$\mu = 0.5$	$\alpha = 0.2$	0.24	0.48	1.2
		$\alpha = 0.5$	0.3	0.6	1.5
		$\alpha = 0.8$	0.36	0.72	1.8
	$\mu = 1$	$\alpha = 0.2$	0.12	0.24	0.6
		$\alpha = 0.5$	0.15	0.3	0.75
		$\alpha = 0.8$	0.18	0.36	0.9
	$\mu = 5$	$\alpha = 0.2$	0.024	0.048	0.12
		$\alpha = 0.5$	0.03	0.06	0.15
		$\alpha = 0.8$	0.036	0.072	0.18
Дисперсії	$\mu = 0.5$	$\alpha = 0.2$	0.352	0.688	1.6
		$\alpha = 0.5$	0.58	1.12	2.5
		$\alpha = 0.8$	0.808	1.552	3.4
	$\mu = 1$	$\alpha = 0.2$	0.138	0.272	0.65
		$\alpha = 0.5$	0.195	0.38	0.875
		$\alpha = 0.8$	0.252	0.488	1.1
	$\mu = 5$	$\alpha = 0.2$	0.0215	0.0428	0.106

Продовження на наступній сторінці

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Дисперсії	$\mu = 5$	$\alpha = 0.5$	0.0238	0.0472	0.115
		$\alpha = 0.8$	0.026	0.0515	0.124
Середньо-квадратичного відхилення	$\mu = 0.5$	$\alpha = 0.2$	0.3743	0.64	1.3464
		$\alpha = 0.5$	0.6358	1	1.866
		$\alpha = 0.8$	0.8974	1.36	2.3856
	$\mu = 1$	$\alpha = 0.2$	0.1871	0.32	0.6732
		$\alpha = 0.5$	0.3179	0.5	0.933
		$\alpha = 0.8$	0.4487	0.68	1.1928
	$\mu = 5$	$\alpha = 0.2$	0.0374	0.064	0.1346
		$\alpha = 0.5$	0.0635	0.1	0.1866
		$\alpha = 0.8$	0.0897	0.136	0.2385
Експоненційний	$\mu = 0.5$	$\alpha = 0.2$	0.3226	0.6258	1.4384
		$\alpha = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu = 1$	$\alpha = 0.2$	0.1234	0.2439	0.5889
		$\alpha = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu = 5$	$\alpha = 0.2$	0.0207	0.0414	0.1031
		$\alpha = 1$	0.0246	0.0487	0.1177
		$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Середнього значення	$\mu = 0.5$	$(x+1)^2$	0.8944	1.2649	2
	$\mu = 1$	$(x+1)^2$	0.4472	0.6324	1
	$\mu = 5$	$(x+1)^2$	0.0894	0.1264	0.2
Квантільний	$\mu = 0.5$	$\varepsilon = 0.1$	0	1.3863	3.2189
		$\varepsilon = 0.2$	0	0	1.8326
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	1.0217
	$\mu = 1$	$\varepsilon = 0.1$	0	0.6931	1.6094
		$\varepsilon = 0.2$	0	0	0.9162
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	0.5108
	$\mu = 5$	$\varepsilon = 0.1$	0	0.1386	0.3218
		$\varepsilon = 0.2$	0	0	0.1832
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	0.1021
Макс. збитків	$\mu > 0$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Есшера	$\mu = 0.5$	$\alpha = 0.2$	0.5208	0.9803	2.0833
		$\alpha = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu = 1$	$\alpha = 0.2$	0.1524	0.2976	0.6944
		$\alpha = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu = 5$	$\alpha = 0.2$	0.0216	0.043	0.1062
		$\alpha = 1$	0.0304	0.0595	0.1388
		$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Відрегульований ризиком	$\mu = 0.5$	$\rho = 1.5$	0.6463	1.026	1.8899
		$\rho = 3$	2.785	3.5088	4.7622
		$\rho = 5$	6.3096	7.2478	8.7055
		$\rho = 1.5$	0.3231	0.5129	0.9449

Продовження на наступній сторінці

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Відрегульований ризиком	$\mu = 1$	$\rho = 3$	1.3925	1.7544	2.3811
		$\rho = 5$	3.1548	3.6239	4.3528
	$\mu = 5$	$\rho = 1.5$	0.6463	0.1026	0.1889
		$\rho = 3$	0.2785	0.3508	0.4762
		$\rho = 5$	0.6309	0.7247	0.8705
Нульової корисності (лінійна)	$\mu = 0.5$		0.2	0.4	1
	$\mu = 1$		0.1	0.2	0.5
	$\mu = 5$		0.02	0.04	0.1
Нульової корисності (експоненційна)	$\mu = 0.5$	$\beta = 0.2$	0.3226	0.6258	1.4384
		$\beta = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		$\beta = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu = 1$	$\beta = 0.2$	0.1234	0.2439	0.5889
		$\beta = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		$\beta = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu = 5$	$\beta = 0.2$	0.0207	0.0414	0.1031
		$\beta = 1$	0.0246	0.0487	0.1177
		$\beta = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Гіперекспоненційний розподіл виплат

Табл. С.3: Гіперекспоненційний розподіл виплат

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Нетто	$q = 0.2$ $\mu_1 = 0.1$ $\mu_2 = 5$		0.216	0.432	1.08
	$q = 0.5$ $\mu_1 = 0.1$ $\mu_2 = 5$		0.51	1.02	2.55
	$q = 0.8$ $\mu_1 = 0.1$ $\mu_2 = 5$		0.804	1.608	4.02
Математичного сподівання	$q = 0.2$	$\alpha = 0.2$	0.2592	0.5184	1.296
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 0.5$	0.324	0.648	1.62
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 0.8$	0.3888	0.7776	1.944
	$q = 0.5$	$\alpha = 0.2$	0.612	1.224	3.06
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 0.5$	0.765	1.53	3.825
	$\beta = 5$	$\alpha = 0.8$	0.918	1.836	4.59
	$q = 0.8$	$\alpha = 0.2$	0.9648	1.9296	4.824
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 0.5$	1.206	2.412	6.03
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 0.8$	1.4472	2.8944	7.236
Дисперсії	$q = 0.2$	$\alpha = 0.2$	1.0079	1.9972	4.8531

Продовження на наступній сторінці

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Дисперсії	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 0.5$	2.1959	4.3451	10.5128
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 0.8$	3.3838	6.6929	16.1725
	$q = 0.5$	$\alpha = 0.2$	2.4588	4.8135	11.2535
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 0.5$	5.3819	10.5038	24.3088
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 0.8$	8.3051	16.1941	37.364
	$q = 0.8$	$\alpha = 0.2$	3.875	7.4915	16.7895
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 0.5$	8.4816	16.3168	35.9438
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 0.8$	13.0881	25.142	55.0981
Середньо-квадратичного відхилення	$q = 0.2$	$\alpha = 0.2$	0.6163	0.998	1.975
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 0.5$	1.2168	1.8472	3.3174
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 0.8$	1.8172	2.6964	4.6598
	$q = 0.5$	$\alpha = 0.2$	1.1426	1.9146	3.9644
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 0.5$	2.0914	3.2565	6.086
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 0.8$	3.0403	4.5983	8.2077
	$q = 0.8$	$\alpha = 0.2$	1.604	2.7394	5.8089
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 0.5$	2.8041	4.4365	8.4923
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 0.8$	4.0041	6.1337	11.1756
Експоненційний	$q = 0.2$	$\alpha = 0.02$	0.2653	0.5293	1.3129
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$q = 0.5$	$\alpha = 0.02$	0.631	1.2542	3.0785
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$q = 0.8$	$\alpha = 0.02$	0.994	1.9688	4.7838
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Середнього значення	$q = 0.2$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 5$	$(x+1)^2$	2.0016	2.8307	4.4757
	$q = 0.5$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 5$	$(x+1)^2$	3.1629	4.473	7.0725
	$q = 0.8$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 5$	$(x+1)^2$	4.0002	5.6571	8.9447
Квантільний	$q = 0.2$	$\varepsilon = 0.1$	0	100.45	110.57
	$\mu_1 = 0.1$	$\varepsilon = 0.2$	0	0	84.05
	$\mu_2 = 5$	$\varepsilon = 0.3$	0	0	75.12
	$q = 0.5$	$\varepsilon = 0.1$	0	105.53	114.31
	$\mu_1 = 0.1$	$\varepsilon = 0.2$	0	0	105.04
	$\mu_2 = 5$	$\varepsilon = 0.3$	0	0	95.12
	$q = 0.8$	$\varepsilon = 0.1$	0	114.94	121.03
	$\mu_1 = 0.1$	$\varepsilon = 0.2$	0	0	110.14
	$\mu_2 = 5$	$\varepsilon = 0.3$	0	0	102.04
Макс. збитків			$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Есшера	$q = 0.2$	$\alpha = 0.02$	0.3268	0.6503	1.6006

Продовження на наступній сторінці

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Есшера	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$q = 0.5$	$\alpha = 0.02$	0.7814	1.5435	3.7204
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$q = 0.8$	$\alpha = 0.02$	1.2293	2.4112	5.6981
	$\mu_1 = 0.1$	$\alpha = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu_2 = 5$	$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Відрегульований ризиком	$q = 0.2$	$\rho = 1.5$	1.1378	1.8062	3.327
	$\mu_1 = 0.1$	$\rho = 3$	8.1941	10.3239	14.0117
	$\mu_2 = 5$	$\rho = 5$	22.9135	26.3207	31.6145
	$q = 0.5$	$\rho = 1.5$	2.0528	3.2587	6.0025
	$\mu_1 = 0.1$	$\rho = 3$	11.0739	13.9522	18.9361
	$\mu_2 = 5$	$\rho = 5$	27.4831	31.5698	37.9192
	$q = 0.8$	$\rho = 1.5$	2.7911	4.4305	8.1611
	$\mu_1 = 0.1$	$\rho = 3$	12.9336	16.2953	22.1162
	$\mu_2 = 5$	$\rho = 5$	30.1767	34.664	41.6357
Нульової корисності (лінійна)	$q = 0.2$ $\mu_1 = 0.1$ $\mu_2 = 5$		0.216	0.432	1.08
	$q = 0.5$ $\mu_1 = 0.1$ $\mu_2 = 5$		0.51	1.02	2.55
	$q = 0.8$ $\mu_1 = 0.1$ $\mu_2 = 5$		0.804	1.608	4.02
Нульової корисності (експоненційна)	$q = 0.2$	$\beta = 0.02$	0.2653	0.5293	1.3129
	$\mu_1 = 0.1$	$\beta = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu_2 = 5$	$\beta = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$q = 0.5$	$\beta = 0.02$	0.631	1.2542	3.0785
	$\mu_1 = 0.1$	$\beta = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu_2 = 5$	$\beta = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$q = 0.8$	$\beta = 0.02$	0.994	1.9688	4.7838
	$\mu_1 = 0.1$	$\beta = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\mu_2 = 5$	$\beta = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Рівномірний розподіл виплат

Табл. C.4: Рівномірний розподіл виплат

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Нетто	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$		0.03	0.06	0.15

Продовження на наступній сторінці

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Нетто	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$		0.1	0.2	0.5
	$d_1 = 2$ $d_2 = 20$		1.1	2.2	5.5
Математичного сподівання	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$	$\alpha = 0.2$	0.036	0.072	0.18
		$\alpha = 0.5$	0.045	0.09	0.225
		$\alpha = 0.8$	0.054	0.108	0.27
	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$	$\alpha = 0.2$	0.12	0.24	0.6
		$\alpha = 0.5$	0.15	0.3	0.75
		$\alpha = 0.8$	0.18	0.36	0.9
	$d_1 = 2$ $d_2 = 20$	$\alpha = 0.2$	1.32	2.64	6.6
		$\alpha = 0.5$	1.65	3.3	8.25
		$\alpha = 0.8$	1.98	3.96	9.9
Дисперсії	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$	$\alpha = 0.2$	0.0316	0.063	0.1548
		$\alpha = 0.5$	0.0342	0.0675	0.1621
		$\alpha = 0.8$	0.0367	0.0721	0.1693
	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$	$\alpha = 0.2$	0.1196	0.2353	0.5583
		$\alpha = 0.5$	0.1491	0.2883	0.6458
		$\alpha = 0.8$	0.1786	0.3413	0.7333
	$d_1 = 2$ $d_2 = 20$	$\alpha = 0.2$	3.881	7.152	14.25
		$\alpha = 0.5$	7.895	14.68	27.375
		$\alpha = 0.8$	11.972	22.008	40.5
Середньо-квадратичного відхилення	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$	$\alpha = 0.2$	0.0483	0.0845	0.1811
		$\alpha = 0.5$	0.0759	0.1213	0.2277
		$\alpha = 0.8$	0.1034	0.1582	0.2743
	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$	$\alpha = 0.2$	0.1627	0.2841	0.608
		$\alpha = 0.5$	0.2567	0.4101	0.7701
		$\alpha = 0.8$	0.3508	0.5362	0.9321
	$d_1 = 2$ $d_2 = 20$	$\alpha = 0.2$	1.8373	3.1952	6.8229
		$\alpha = 0.5$	2.9432	4.688	8.8072
		$\alpha = 0.8$	4.0492	6.1808	10.7915
Експоненційний	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$	$\alpha = 0.02$	0.0301	0.0602	0.1502
		$\alpha = 1$	0.0346	0.0681	0.1622
		$\alpha = 20$	0.2143	0.2496	0.2952
	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$	$\alpha = 0.02$	0.1009	0.2018	0.5029
		$\alpha = 1$	0.1683	0.3123	0.6504
		$\alpha = 20$	1.2351	1.2697	1.3156
	$d_1 = 2$ $d_2 = 20$	$\alpha = 0.02$	1.2484	2.4663	5.9517
		$\alpha = 1$	14.807	15.5002	16.4165
		$\alpha = 20$	19.5906	19.6252	19.671
Середнього значення	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$	$(x+1)^2$	0.0966	0.1366	0.2161
	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$	$(x+1)^2$	0.3291	0.4655	0.7359
	$d_1 = 2$				

Продовження на наступній сторінці

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Серед. значення	$d_2 = 20$	$(x+1)^2$	3.8417	5.4406	8.6023
Квантільний	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$	$\varepsilon = 0.1$	0	0.3	0.36
		$\varepsilon = 0.2$	0	0	0.32
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	0.28
	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$	$\varepsilon = 0.1$	0	1	1.3
		$\varepsilon = 0.2$	0	0	1.1
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	0.9
	$d_1 = 2$ $d_2 = 20$	$\varepsilon = 0.1$	0	11	16.4
		$\varepsilon = 0.2$	0	0	12.8
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	9.2
Максимальних збитків	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$		0.4	0.4	0.4
	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$		1.5	1.5	1.5
	$d_1 = 2$ $d_2 = 20$		20	20	20
Есшера	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$	$\alpha = 0.02$	0.0302	0.0603	0.1505
		$\alpha = 1$	0.0396	0.0766	0.1744
		$\alpha = 20$	0.3494	0.3518	0.3534
	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$	$\alpha = 0.02$	0.1019	0.2036	0.5058
		$\alpha = 1$	0.2594	0.4486	0.7997
		$\alpha = 20$	1.45	1.45	1.45
	$d_1 = 2$ $d_2 = 20$	$\alpha = 0.02$	1.41	2.7521	6.4169
		$\alpha = 1$	19	19	19
		$\alpha = 20$	19.95	19.95	19.95
Відрегу-льований ризиком	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$	$\rho = 1.5$	0.0471	0.0797	0.1679
		$\rho = 3$	0.1012	0.1364	0.2116
		$\rho = 5$	0.1376	0.1691	0.2326
	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$	$\rho = 1.5$	0.1273	0.228	0.5249
		$\rho = 3$	0.2742	0.3898	0.6614
		$\rho = 5$	0.3728	0.4832	0.7254
	$d_1 = 2$ $d_2 = 20$	$\rho = 1.5$	0.7834	1.71	5.0397
		$\rho = 3$	1.6879	2.924	6.3496
		$\rho = 5$	2.2944	3.6239	6.9644
Нульової корисності (лінійна)	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$		0.03	0.06	0.15
	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$		0.1	0.2	0.5
	$d_1 = 2$ $d_2 = 20$		1.1	2.2	5.5
Нульової корисності (експоненційна)	$d_1 = 0.2$ $d_2 = 0.4$	$\beta = 0.02$	0.0301	0.0601	0.1502
		$\beta = 1$	0.0346	0.0681	0.1622
		$\beta = 20$	0.2143	0.2496	0.2952
	$d_1 = 0.5$ $d_2 = 1.5$	$\beta = 0.02$	0.1009	0.2017	0.5029
		$\beta = 1$	0.1683	0.3123	0.6505
		$\beta = 20$	1.2351	1.2697	1.3156

Продовження на наступній сторінці

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Нульової корисності (експоненційна)	$d_1 = 2$ $d_2 = 20$	$\beta = 0.02$	1.2484	2.4663	5.9517
		$\beta = 1$	14.807	15.5002	16.4165
		$\beta = 20$	19.5906	19.6252	19.671

Зсунутий нормований пуасонівський розподіл виплат

Табл. C.5: Зсунутий нормований пуасонівський розподіл виплат

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Нетто	$\kappa = 0.2$ $\lambda = 2$		0.06	0.12	0.3
	$\kappa = 2$ $\lambda = 0.2$		0.24	0.48	1.2
	$\kappa = 5$ $\lambda = 5$		3	6	15
Математичного сподівання	$\kappa = 0.2$ $\lambda = 2$	$\alpha = 0.2$	0.072	0.144	0.36
		$\alpha = 0.5$	0.09	0.18	0.45
		$\alpha = 0.8$	0.108	0.216	0.54
	$\kappa = 2$ $\lambda = 0.2$	$\alpha = 0.2$	0.288	0.576	1.44
		$\alpha = 0.5$	0.36	0.72	1.8
		$\alpha = 0.8$	0.432	0.864	2.16
	$\kappa = 5$ $\lambda = 5$	$\alpha = 0.2$	3.6	7.2	18
		$\alpha = 0.5$	4.5	9	22.5
		$\alpha = 0.8$	5.4	10.8	27
Дисперсії	$\kappa = 0.2$ $\lambda = 2$	$\alpha = 0.2$	0.0673	0.1334	0.324
		$\alpha = 0.5$	0.0784	0.1536	0.36
		$\alpha = 0.8$	0.0894	0.1737	0.396
	$\kappa = 2$ $\lambda = 0.2$	$\alpha = 0.2$	0.2876	0.5683	1.368
		$\alpha = 0.5$	0.3592	0.7008	1.62
		$\alpha = 0.8$	0.4307	0.8332	1.872
	$\kappa = 5$ $\lambda = 5$	$\alpha = 0.2$	21.25	39	71.25
		$\alpha = 0.5$	48.625	88.5	155.62
		$\alpha = 0.8$	76	138	240
Середньо-квадратичного відхилення	$\kappa = 0.2$ $\lambda = 2$	$\alpha = 0.2$	0.0984	0.1718	0.3692
		$\alpha = 0.5$	0.1559	0.2496	0.47321
		$\alpha = 0.8$	0.2134	0.3274	0.5771
	$\kappa = 2$ $\lambda = 0.2$	$\alpha = 0.2$	0.3376	0.6129	1.3833
		$\alpha = 0.5$	0.4841	0.8122	1.6583
		$\alpha = 0.8$	0.6306	1.0116	1.9332
	$\kappa = 5$ $\lambda = 5$	$\alpha = 0.2$	4.9105	8.569	18.3541
		$\alpha = 0.5$	7.7762	12.4226	23.3853

Продовження на наступній сторінці

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Сер. квад. відх.		$\alpha = 0.8$	10.642	16.2762	28.4164
Експоненційний	$\kappa = 0.2$ $\lambda = 2$	$\alpha = 0.02$	0.0604	0.1207	0.3013
		$\alpha = 1$	0.0863	0.1658	0.3721
		$\alpha = 20$	5.4447	5.4793	5.5252
	$\kappa = 2$ $\lambda = 0.2$	$\alpha = 0.02$	0.2461	0.4909	1.2185
		$\alpha = 1$	1.2674	1.8089	2.6217
		$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\kappa = 5$ $\lambda = 5$	$\alpha = 0.02$	4.1704	8.0195	18.0555
		$\alpha = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		$\alpha = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Середнього значення	$\kappa = 0.2$ $\lambda = 2$	$(x+1)^2$	0.044	0.088	0.22
	$\kappa = 2$ $\lambda = 0.2$	$(x+1)^2$	0.656	1.312	3.28
	$\kappa = 5$ $\lambda = 5$	$(x+1)^2$	102.5	205	512.5
Квантільний	$\kappa = 0.2$ $\lambda = 2$	$\varepsilon = 0.1$	0	0.8	1
		$\varepsilon = 0.2$	0	0	0.8
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	0.6
	$\kappa = 2$ $\lambda = 0.2$	$\varepsilon = 0.1$	0	4	4
		$\varepsilon = 0.2$	0	0	4
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	4
	$\kappa = 5$ $\lambda = 5$	$\varepsilon = 0.1$	0	35	45
		$\varepsilon = 0.2$	0	0	35
		$\varepsilon = 0.3$	0	0	30
Макс. збитків			$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Есшера	$\kappa = 0.2$ $\lambda = 2$	$\alpha = 0.02$	0.0608	0.1214	0.3026
		$\alpha = 0.1$	0.0641	0.1276	0.3132
		$\alpha = 0.4$	0.0788	0.1535	0.3555
	$\kappa = 2$ $\lambda = 0.2$	$\alpha = 0.02$	0.2523	0.5021	1.2373
		$\alpha = 0.1$	0.3091	0.6021	1.3955
		$\alpha = 0.4$	0.6939	1.2009	2.1383
	$\kappa = 5$ $\lambda = 5$	$\alpha = 0.02$	5.6129	10.3941	21.2596
		$\alpha = 0.1$	38.1017	42.2208	45.1494
		$\alpha = 0.4$	189.726	189.726	189.726
Відрегульований ризиком	$\kappa = 0.2$ $\lambda = 2$	$\rho = 1.5$	0.0431	0.0684	0.1259
		$\rho = 3$	0.0909	0.1145	0.1555
		$\rho = 5$	0.114	0.1309	0.1573
	$\kappa = 2$ $\lambda = 0.2$	$\rho = 1.5$	0.4302	0.6829	1.2581
		$\rho = 3$	0.8926	1.1246	1.5264
		$\rho = 5$	1.0833	1.2444	1.4946
	$\kappa = 5$ $\lambda = 5$	$\rho = 1.5$	1.0772	1.7099	3.1496
		$\rho = 3$	2.3045	2.9035	3.9407
		$\rho = 5$	2.9939	3.4391	4.1307
Нул. корисності (лінійна)	$\kappa = 0.2$ $\lambda = 2$		0.06	0.12	0.3

Продовження на наступній сторінці

Спосіб оцінювання	Виплата	Надбавка	Ймовірність виплати		
			$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$
Нульової корисності (лінійна)	$\kappa = 2$ $\lambda = 0.2$		0.24	0.48	1.2
	$\kappa = 5$ $\lambda = 5$		3	6	15
Нульової корисності (експоненційна)	$\kappa = 0.2$ $\lambda = 2$	$\beta = 0.02$	0.0604	0.1207	0.3013
		$\beta = 1$	0.0863	0.1658	0.3721
		$\beta = 20$	5.4447	5.4793	5.5252
	$\kappa = 2$ $\lambda = 0.2$	$\beta = 0.02$	0.2461	0.4909	1.2185
		$\beta = 1$	1.2674	1.8089	2.6217
		$\beta = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\kappa = 5$ $\lambda = 5$	$\beta = 0.02$	4.1704	8.0195	18.056
		$\beta = 1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		$\beta = 20$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Бібліоґрафія

[1] Бойков А.В. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями / А.В. Бойков // Теория вероят. и ее применения. – 2002. – **47**, № 3. – С. 549–553.

[2] Буняковский В.Я. Основания математической теории вероятностей / Буняковский В.Я. — Санкт–Петербург: 1846. — 480 с.

[3] Граве Д.А. Страховая математика / Граве Д.А. — Киев: 1912.

[4] Граве Д.А. Теория пенсионных фондов / Граве Д.А. — Киев: 1917.

[5] Граве Д.А. Математика социального страхования: Общедоступное изложение для не–специалистов / Граве Д.А. — Ленинград: Государственное издательство, 1924. — 152 с.

[6] Гусак Д.В. Процеси з незалежними приростами в теорії ризику / Гусак Д.В. — Київ: Ін-т математики, 2011. — 544 с. — (Математика та її застосування) (Праці / Ін-т математики НАН України; т. 88)

[7] Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань у фінансовій математиці та теорії ризику / [Гусак Д.В., Кулик О.М., Мішура Ю.С., Пилипенко А.Ю.]. — Київ: Видавництво Київського університету, 2008. — 287 с.

[8] Дрозденко В.О. Гранична поведінка страхових премій, залежних від параметрів / В.О. Дрозденко // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2010. — №11. — С. 211–224.

[9] Королёв В.Ю. Математические основы теории риска / Королёв В.Ю., Бенинг С.Я., Шоргин С.Я. — Москва: Физматлит, 2011. — 620 с.

[10] Теоретико–ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці / М.М. Леоненко, Ю.С. Мішура, В.М. Пархоменко, М.Й Ядренко. // Теоретико–ймовірнісні моделі в страховій математиці. — Київ: Інформтехніка, 1995. — 380 с.

[11] Марков А.А. Исчисление вероятностей / А.А Марков // О страховании жизни. — Санкт–Петербург: Типография Императорской акадимии наук, 1900. — 280 с.

[12] Мельников А.В. Риск–менеджмент: стохастический анализ рисков в экономике финансов и страховании / Мельников А.В. — Москва: Анкил, 2001. — 112 с.

[13] Савич С.Е. Элементарная теория страхования жизни и трудоспособности / Савич С.Е. — Санкт–Петербург: 1900. — 496 с. — (Книга була перевидана видавництвом Янус–К (Москва) в 2003–му році).

[14] Слутский Е.Е. Теория предельной полезности / Слутский Е.Е. — Киев: Национальная научная библиотека Украины, неопубликованная рукопись, $\approx$ 400 страниц.

[15] Фалин Г.И. Математический анализ рисков в страховании / Фалин Г.И. — Москва: Российский юридический издательский дом, 1994. — 130 с.

[16] Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем / Фалин Г.И. — Издание 2–е, переработанное и дополненное. — Москва: Анкил, 2002. — 262 с.

[17] Фалин Г.И. Введение в актуарную математику / Г.И Фалин, А.И. Фалин. — Москва: Издательство Московского университета, 1994. — 110 с.

[18] Albrecher H. Reinsurance: Actuarial and Financial Aspects / H. Albrecher, J. Teugels. — Chichester: Wiley–Blackwell, 2008. — 288 p.

[19] Livförsäkringsmatematik II / [Alm E., Andersson G., von Bahr B., Martin–Löf A.] — Stockholm: Svenska Försäkringsföreningen, 2006. — 206 s.

[20] Andersson G. Livförsäkringsmatematik / Andersson G. — Stockholm: Svenska Försäkringsföreningen, 2005. — 369 s.

[21] Asmussen S. Ruin Probabilities (2nd Edition) / S. Asmussen, H. Albrecher. — Singapore: World Sientific, 2010. — 620 p.

[22] Beard R.E. Risk Theory / Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E. — London: Mathuen & Co LTD, 1969. — 191 p.

[23] Bening V.E. Generalized Poisson Models and their Applications in Insurance and Finance / V.E. Bening, V.Yu. Korolev — Utrecht: Brill Academic Publishers, 2002. — 434 p.

[24] Benjamin B. The Analysis of Mortality and other Actuarial Statistics / B. Benjamin, J.H. Pollard — London: Institute of Actuaries, The Chameleon Press Ltd., 1980. — 466 p.

[25] Berliner B. A risk measure alternative to the variance / B. Berliner // ASTIN Bulletin. — 1977. — Vol. 9. — P. 42–58.

[26] Blom R. Livförsäkringsmatematik / Blom R. — Stockholm: IFU Utbildnings AB och BICON, 2002. — 167 s.

[27] Boland P.J. Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science / Boland P.J. — Boca Raton: Chapman & Hall, 2007. — 368 p.

[28] Boos A. Effizienz von Bonus–Malus–Systemen / Boos A. — Wiesbaden: Gabler–Verlag, 1991. — 202 s.

[29] Modern Actuarial Theory and Practice / [P.M. Booth, R. Chadburn, D. Cooper, S. Haberman, D James]. — Boca Raton: Chapman & Hall, 1998. — 716 p.

[30] Borowiak D.S. Financial and Actuarial Statistics: An Introduction / Borowiak D.S. — Boca Raton: Chapman & Hall, 2003. — 352 p.

[31] Financial and Actuarial Statistics / [Borowiak D.S., Balakrishnan N., Schucany W.R., Schilling E.G.]. — Boca Raton: Chapman & Hall, 2009. — 400 p.

[32] Actuarial Mathematics / [N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbit]. — Illinoice: The Society of Actuaries, 1986. — 753 p.

[33] Bühlmann H. Mathematical Methods in Risk Theory / Bühlmann H. — Berlin: Springer, 1970. — 210 p.

[34] Bühlmann H. An economic premium principle / H. Bühlmann // ASTIN Bulletin. — 1980. — Vol. 11, №1. — P. 52–60.

[35] Bühlmann H. A Course in Credibility Theory and its Applications / H. Bühlmann, A. Gisler — Berlin: Springer, 2005. — 336 p.

[36] Chan W.–S. Financial and Actuarial Mathematics / W.–S. Chan, Y.–K. Tse — Asia: Mc Graw–Hill, 2007. — 352 p.

[37] Corazza M. Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance / M. Corazza, P. Claudio — Berlin: Springer, 2009. — 300 p.

[38] Cramér H. On the Mathematical Theory of Risk / Cramér H. — Stockholm: Försäkringsaktiebolaget Skandia, 1930. — 77 p.

[39] Cramér H. Collective Risk Theory, a Survey of the Theory from the Point of View of Stochastic Processes / Cramér H. — Stockholm: Försäkringsaktiebolaget Skandia, 1955. — 92 p.

[40] Daykin C.D. Practical Risk Theory for Actuaries / Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M. — London: Chapman & Hall, 1994. — 546 p.

[41] Denneberg D. Premium calculation: Why standard deviation should be replaced by absolute deviation / D. Denneberg // ASTIN Bulletin. — 1990. — Vol. 20, №2. — P. 181–190.

[42] Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models / [Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M., Kaas R.]. — Chichester: John Wiley & Sons, 2005. — 458 p.

[43] Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus–Malus Systems / [Denuit M., Marechal X., Pitrebois S., Walhin J.–F.]. — Chichester: John Wiley & Sons, 2007. — 384 p.

[44] Dickson D.C.M. Insurance Risk and Ruin / Dickson D.C.M. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — 229 p.

[45] Dickson D.C.M. Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks / Dickson D.C.M., Hardy M.R., Waters H. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. — 488 p.

[46] Dorfman M.S. Introduction to Risk Management and Insurance / — New Jersey: Prentice Hall, 2002. — 580 p.

[47] Embrechts P. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance / Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. — Berlin: Springer, 1997. — 648 p.

[48] Esscher F. On the probability function in the collective theory of risk / F. Esscher // Skandinavisk Aktuarietidskrift. — 1932. — Vol. 15. — P. 175–195.

[49] Esscher F. On approximate computations when the corresponding characteristic functions are known / F. Esscher // Skandinavisk Aktuarietidskrift. — 1963. — Vol. 46. — P. 78–86.

[50] Fisher H.F. Actuarial Practice of Life Assurance / H.F. Fisher, J. Young. — Cambridge: Cambridge University Press, 1965. — 450 p.

[51] Freeman H. Finite Differences for Actuarial Students (2nd Edition) / Freeman H. — Cambridge: Institute of Actuaries, 1962. — 228 p.

[52] Gerber H.U. An Introduction to Mathematical Risk Theory / Gerber H.U. — Philadelpia: Huebner S. S. Foundation for Insurance Education, 1979. — 164 p.

[53] Gerber H.U. Life Insurance Mathematics / Gerber H.U. — Berlin: Springer, 1990. — 217 p.

[54] Effective Actuarial Methods / [Goovaerts M.J., Kaas R., van Heerwarden A.E., Bauwelinckx T.]. — Amsterdam: North-Holland, 1990. — 217 p.

[55] Grandell J. Aspects of Risk Theory / Grandell J. — New York: Springer, 1991. — 175 p.

[56] Grandell J. Mixed Poisson Processes / Grandell J. — London: Chapman & Hall, 1997. — 267 p.

[57] Grandell J. Simple approximations of ruin probabilities / J Grandell // Insurance: Mathematics and Economics. – 2000. – Vol. **26**. – P. 157–173.

[58] Gupta A.K. An Introduction to Actuarial Mathematics / A.K. Gupta, T. Varga — Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 350 p.

[59] Theory of Stochastic Processes with Applications to Financial Mathematics and Risk Theory / [D. Gusak, A. Kukush, A. Kulik, Yu. Mishura, A. Pylipenko]. — Berlin: Springer, 2010. — 350 p.

[60] Haberman S. Actuarial Models for Disability Insurance / S. Haberman, E. Pitacco — Boca Raton: Chapman & Hall, 1999. — 280 p.

[61] Haberman S. The History of Actuarial Science (10 Volume Set) / S. Haberman, T. Sibbett (editors) — London: Pickering & Chatto Publishers, 1995. — 3488 p.

[62] Heilman W.–R. Fundamentals of Risk Theory / Heilman W.–R. — Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 1988. — 288 p.

[63] Hogg R.U., Klugman S.A. Loss Distributions / R.U. Hogg, S.A. Klugman — New York: John Wiley & Sons, 1984. — 248 p.

[64] Iyer S. Actuarial Mathematics of Social Security Pensions / Iyer S. — Geneva: International Labour Office, 1999. — 130 p.

[65] Janssen J., Manca R. Semi–Markov Risk Models for Finance, Insurance and Reliability / J. Janssen, R. Manca — New York: Springer, 2010. — 448 p.

[66] Johansson J. Matematiska Modeller inom Sakförsäkring / Johansson J. — Stockholm: Kompendium, Stockholms universitet 1997. — 155 s.

[67] de Jong P. Generalized Linear Models for Insurance Data / P. de Jong, G.Z. Heller — Cambridge: Cambridge University Press, 2008. — 216 p.

[68] Kaas R. Ordering of Actuarial Risks / Kaas R., van Heerwaarden A.E., Goovaerts M.J. — Brussels: Caire Education Series, 1994. — 309 p.

[69] Modern Actuarial Risk Theory using R / [Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M.]. — Berlin: Springer, 2008. — 381 p.

[70] Kalashnikov V.V. Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications to Risk Analysis, Reliabilities, and Queueings / Kalashnikov V.V. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 265 p.

[71] Kleiber C. Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences / C. Kleiber, S. Kotz — Chicester: Wiley–Blackwell, 2003. — 352 p.

[72] Klugman S.A. Bayesian Statistics in Actuarial Science / Klugman S.A. — Berlin: Springer, 1992. — 256 p.

[73] Klugman A.S. Loss Models: from Data to Decisions / Klugman A.S., Panjer H.H., Willmot G.E. — New York: John Wiley & Sons, 2008. — 644 p.

[74] Kremer E. Applied Risk Theory / Kremer E. — Aachen: Shaker, 1999. — 218 p.

[75] Lemaire J. Automobile Insurance: Actuarial Models / Lemaire J. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 1985. — 248 p.

[76] Lemaire J. Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance / Lemaire J. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995. — 316 p.

[77] Lin X.S. Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance / Lin X.S. — New Jersey: John Wiley & Sons, 2006. — 248 p.

[78] Lundberg F. Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen. Återförsäkring av Kollektivrisker (PhD thesis) / Lundberg F. — Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1903. — 53 s.

[79] Mikosch T. Non–Life Insurance Mathematics. An Introduction with Stochastic Processes / Mikosch T. — Berlin: Springer, 2009. — 249 p.

[80] Møller T. Market–Valuation Methods in Life and Pension Insurance / T. Møller, M. Steffensen — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — 294 p.

[81] Panjer H.H. Actuarial Mathamatics / Panjer H.H. — New York: American Mathematical Society, 1986. — 294 p.

[82] Panjer H.H. Operational Risk: Modeling Analytics / Panjer H.H. — New York: John Wiley & Sons, 2006. — 448 p.

[83] Panjer H.H. Insurance Risk Models / H.H. Panjer, G.E. Willmot — Schaumburg, Illinois: American Society of Actuaries, 1992. — 294 p.

[84] Paulsen J. Stochastic Calculus with Applications to Risk Theory / Paulsen J. — unpublished manuscript, 1986. — 294 p.

[85] Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business / [Pitacco E., Denuit M., Haberman S., Olivieri A.]. — Oxford: Oxford University Press 2009. — 400 p.

[86] Pratsiovytyi M.V. Characterization theorems for mean value insurance premium calculation principle / M.V. Pratsiovytyi, V.O. Drozdenko // Tbilisi Mathematical Journal. — 2013. — №6. — P. 57–71.

[87] Pratsiovytyi M.V. Characterization theorems for scale invariance property of insurance premium calculation principles / M.V. Pratsiovytyi, V.O. Drozdenko // European Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2014. — Vol.7 — №3. — P. 267–288.

[88] Pratsiovytyi M.V. Limit behavior of the expected (averaged) Esscher transform / M.V. Pratsiovytyi, V.O. Drozdenko — Proceedings of the fifth international conference dedicated to the commemoration of G. Voronyi, accepted for publication, ≈ 10 pages.

[89] Pratsiovytyi M.V. Characterization theorems for customer equivalent utility insurance premium calculation principle / M.V. Pratsiovytyi, V.O. Drozdenko // European Actuarial Journal. — 2014. — Vol.4 — №2. — P. 437–451.

[90] Pratsiovytyi M.V. Characterization theorems for insurer equivalent utility premium calculation principle / M.V. Pratsiovytyi, V.O. Drozdenko // Applied Statistics. Actuarial and Financial Mathematics. — 2014. — №1. — P. 21–41.

[91] Promislow S.D. Fundamentals of Actuarial Mathematics / Promislow S.D. — Toronto: John Wiley & Sons, 2005. — 392 p.

[92] Stochastic Processes for Insurance and Finance / [Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.]. — Chichester: John Wiley & Sons, 1999. — 654 p.

[93] Rotar V.I. Actuarial Models: the Mathematics of Insurance / Rotar V.I. — Boca Raton: Chapman & Hall, 2006. — 656 p.

[94] Schmidli H. Perturbed Risk Processes: a Review / H. Schmidli // Theory of Stochastic Processes. – 1999. – Vol. **5**. – P. 145–165.

[95] Schmidli H. Stochastic Control in Insurance / Schmidli H. — Berlin: Springer, 2007. — 274 p.

[96] Schmidli H. Lecture Notes on Risk Theory / Schmidli H. — unpublished manuscript.

[97] Schmidt K.D. Lectures on Risk Theory / Schmidt K.D. — Stuttgart: Teubner, 1996. — 200 p.

[98] Seal H.L. Stochastic Theory of Risk Business / Seal H.L. — New York: John Wiley & Sons, 1969. — 210 p.

[99] Seal H.L. Survival Probabilities / Seal H.L. — Chichester: John Wiley & Sons, 1978. — 103 p.

[100] Shang H. Actuarial Science: Theory and Methodology / Shang H. — Singapore: World Sientific, 2006. — 280 p.

[101] Sherris M. Principles of Actuarial Science / Sherris M. — unpublished m-script.

[102] Shiryaev A.N. Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory / Shiryaev A.N. — Singapur: World Scientific, 1999. — 834 p.

[103] Sparre Andersen E. On the Collective Theory of Risk in the Case of Contagion Between the Claims / E. Sparre Andersen // Transactions of XVth International Congress of Actuaries, New York, 1957. — P. 219–229.

[104] Straub E. Non–Life Insurance Mathematics / Straub E. — Berlin: Springer, 1988. — 136 p.

[105] Sundt B. An Introduction to Non–Life Insurance Mathematics / Sundt B. — Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 1999. — 230 p.

[106] Taylor G. Loss Reserving: an Actuarial Perspective / Taylor G. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. — 408 p.

[107] Teugels J. Encyclopedia of Actuarial Science / J. Teugels, B. Sundt (editors) — New York: John Wiley & Sons, 2004. — 1944 p.

[108] Tse Y.–K. Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation / Tse Y.–K. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. — 544 p.

[109] Vaughan E.J., Vaughan T. Fundamentals of Risk and Insurance / E.J. Vaughan, T. Vaughan — New York: John Wiley & Sons, 2008. — 704 p.

[110] de Vylder F.E. Advanced Risk Theory: a Self–Conteined Introduction / de Vylder F.E. — Bruxelles: Editions de I'Université de Bruxelles, 1996. — 969 p.

[111] de Vylder F.E. Life Insurance Theory: Actuarial Perspectives / de Vylder F.E. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 248 p.

[112] de Vylder F.E. Premium Calculation in Insurance (collection of articles) / de Vylder F.E., Goovaerts M., Haezendonck J. (editors) — Boston: Kluwer Academic Publishers, 1984. — 576 p.

[113] de Vylder F.E., Goovaerts M., Haezendonck J. (editors) Insurance and Risk Theory (collection of articles) / de Vylder F.E., Goovaerts M., Haezendonck J. (editors) — Boston: Kluwer Academic Publishers, 1986. — 500 p.

[114] Wang S. Insurance pricing and increased limits rate making by proportional hazard transforms / S. Wang // Insurance: Mathematics and Economics. — 1995. — Vol. 17. — P. 43–56.

[115] Wolthuis H. Life Insurance Mathematics: the Markovian Model / Wolthuis H. — Brussels: Caire Education Series, 2003. — 288 p.

[116] Wüthrich M.V. Market–Consistent Actuarial Valuation / Wüthrich M.V., Bühlmann H., Furrer H. — Berlin: Springer, 2007. — 120 p.

[117] Wüthrich M.V., Merz M. Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance / M.V. Wüthrich, M. Merz — New York: John Wiley & Sons, 2008. — 438 p.

[118] Yang H. Esscher transform, in: J. L. Teugels and B. Sundt (Edt.), Encyclopedia of Actuarial Science / H. Yang — Chichester: John Wiley & Sons, 2004. – P. 617–621.

[119] Zhu Y. Actuarial Model: Life Insurance and Annuity / Y. Zhu — Boston: International Press of Boston, 2008. — 341 p.