МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ І ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ

БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Методичні рекомендації для студентів заочного відділення економічних спеціальностей

Біла Церква
2011

УДК 517(075.8)

Затверджено
методичною комісією університету
(протокол № 1 від 16.09 2010 р.)

Уклали: Мельниченко О.П., канд. с.-г. наук,
Ревицька У.С., канд. фіз.-мат. наук.

Вища математика в прикладах і задачах: Методичні рекомендації для студентів заочного відділення економічних спеціальностей / О.П. Мельниченко, У.С. Ревицька − Біла Церква. – 2011. − 30 с.

Методичні рекомендації включають задачі і приклади до основних розділів вищої математики відповідно до програми загального курсу вищої математики для студентів економічного профілю заочної форми навчання. Наведено необхідний довідковий матеріал, розв'язування типових прикладів та задач, набори завдань для самостійної роботи студентів.

Рецензент: **Трофимчук М.І.**, канд. фіз.-мат. наук; **Бондар О.С.**, канд. екон. наук.

ПЕРЕДМОВА

Методичні рекомендації «Вища математика в прикладах і задачах» для студентів заочного відділення економічних спеціальностей створено з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки таких фахівців і посилення прикладної її спрямованості.

Методичні рекомендації ставлять за мету допомогти студенту самостійно оволодіти розв’язуванням задач та прикладів з курсу вищої математики. Це визначило структуру посібника. В методичних рекомендаціях подано формули і таблиці, необхідні для розв’язку задач та наводиться достатня кількість детально розібраних задач з указаними методами їх розв’язку і пропонується низка задач для самостійного розв’язання. Серед розв’язаних задач немало таких, які можна назвати типовими; у будь-якому випадку ознайомлення з ними дозволяє студенту за самої мінімальної допомоги з боку викладача оволодіти основними методами розв’язання задач даного типу. Ця обставина особливо важлива для студентів, які навчаються заочно.

Як правило, в методичних рекомендаціях наводяться нескладні задачі. Автори свідомо намагаються уникнути задач підвищеної складності, оскільки ставили перед собою мету навчити студента розв’язувати основні задачі, дати деякий мінімум, необхідний для засвоєння ним вимог вузівської програми курсу вищої математики для економічних спеціальностей.

Під час написання методичних рекомендацій «Вища математика в прикладах і задачах» для студентів заочного відділення економічних спеціальностей було використано низку задач та прикладів, взятих із відомих задачників і навчальних посібників, які, як правило, використовуються на практичних заняттях зі студентами.

ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Варіант №1

Завдання 1. Перевірити правильність формули скороченого множення $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:
а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -6, \\ 3x + 3y - 2z = 20, \\ 5x - 6y + 4z = -12. \end{cases}$$

Завдання 3. Дано координати вершини трикутника $\Delta A_1A_2A_3$:
A_1 (3; 1); A_2 (–1; 6); A_3 (–1; 1) і точка A_4 (0; 4).
Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

е) побудувати рисунок в системі координат.

Завдання 4. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-3}{x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x+4}{x^3+3x^2+2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2-3}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{2x^2-3}\right)^{x^2-5}$.

Завдання 5. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = 4x^5 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2$; б) $y = \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{2}{x^3}$; в) $y = e^x \cdot \sin x$; г) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{tgx}$; д) $y = 5^{\arcsin 4x}$.

Завдання 6: Дослідити функцію і побудувати її графік $y = \dfrac{x^2+x}{x+2}$.

Завдання 7: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (10x^2 + 2x + \dfrac{3}{x})dx$; б) $\int (\sqrt{x} + 4x^7 + \dfrac{4}{x^2})dx$; в) $\int \cos(4x+1)dx$;

г) $\int \dfrac{x^4}{x^5+1}dx$; д) $\int xe^x dx$.

Завдання 8: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями: $y = x^3$, $y = 1$; $y = 2$. Зобразити фігуру в системі координат.

Варіант №2

Завдання 1. Перевірити правильність формули скороченого множення $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 9z = -20, \\ 9x - 7y + 3z = 1, \\ 6x + 4y + 7z = -2. \end{cases}$$

Завдання 3. Дано координати вершини трикутника $\Delta A_1A_2A_3$:

A_1 (3; 3); A_2 (6; 9); A_3 (1; 7) і точку A_4 (8; 5).

Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

е) побудувати рисунок в системі координат.

Завдання 4. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x + 25} - 5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x + 1\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{2x^2}$. е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{3x + 5}\right)^{x+3}$.

Завдання 5. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = \dfrac{1}{4}x^8 - x^2 + \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt[5]{x^3} + \dfrac{6}{x^7}$; в) $y = e^x \cdot \sqrt[3]{x}$; г) $y = \dfrac{x^6 - 25}{\sqrt{\ln x}}$; д) $y = \sqrt{\ln 2^x}$.

Завдання 6: Дослідити функцію і побудувати її графік $y = \dfrac{4x^2 - x}{x + 2}$.

Завдання 7: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (10x + \dfrac{1}{7} + \cos x)dx$; б) $\int (\sqrt[4]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}})dx$; в) $\int \dfrac{dx}{1 - 3x}$;

г) $\int \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1}dx$; д) $\int x^2 \ln x dx$.

Завдання 8: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями: $y = \sqrt{x}$, $x = 1$; $x = 9$. Зобразити фігуру в системі координат.

Варіант №3

Завдання 1. Перевірити правильність формули скороченого множення $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ для матриць $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:
а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0, \\ 2x + y + 3z = 4, \\ 3x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

Завдання 3. Дано координати вершини трикутника $\Delta A_1A_2A_3$:
A_1 (3; 5); A_2 (5; 8); A_3 (3; 6) і точку A_4 (6; 4).
Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

е) побудувати рисунок в системі координат.

Завдання 4. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - 7x^2 + 5}{4x - 5x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$; в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{7x+4} - 5}{3x - x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$.

Завдання 5. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = 2x^3 - x^2 + \dfrac{1}{x}$; б) $y = \sqrt[3]{x^5} + \dfrac{6}{x^3}$; в) $y = cosx \cdot \ln x$; г) $y = \dfrac{arctgx}{\sqrt{x}}$; д) $y = \sqrt{\cos x}$.

Завдання 6: Дослідити функцію і побудувати її графік $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$.

Завдання 7: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (\frac{1}{5}x + 5 + \cos x)dx$; б) $\int (7x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}} + 6)dx$; в) $\int e^{6-4x} dx$;

г) $\int x^2 \sqrt{x^3 - 4}dx$; д) $\int xcosxdx$.

Завдання 8: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями: $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$. Зобразити фігуру в системі координат.

Варіант №4

Завдання 1. Перевірити правильність формули скороченого множення $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ для матриць $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 7 & -3\end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:
а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases}4x-2y+3z=-9,\\ 3x+5y-4z=25,\\ 7x+2y+3z=2.\end{cases}$$

Завдання 3. Дано координати вершини трикутника $\Delta A_1A_2A_3$:
A_1 (2; 4); A_2 (7; 6); A_3 (4; -3) і точка A_4 (3; 6).
Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

е) побудувати рисунок в системі координат.

Завдання 4. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+5}{x-5x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{5x+1}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{tg 8x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{8}{5x+3}\right)^{2x+5}$.

Завдання 5. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y=4x^3-x^2+x$; б) $y=\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{3}{x^6}$; в) $y=cosx\cdot\log_2 x$; г) $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$; д) $y=\sqrt{\sin x}$.

Завдання 6: Дослідити функцію і побудувати її графік $y=\dfrac{x^2}{x+5}$.

Завдання 7: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int(10x^5-x+\dfrac{3}{x})dx$; б) $\int(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}})dx$; в) $\int 4^{\frac{x}{4}+1}dx$;

г) $\int\dfrac{1}{x\ln x}dx$; д) $\int xsinxdx$.

Завдання 8: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями: $y=x^4$, $y=x$. Зобразити фігуру в системі координат.

Варіант №5

Завдання 1. Перевірити правильність формули скороченого множення $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ для матриць $A = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:
а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases} x + y + z = -2, \\ 2x + 3y - z = 1, \\ x - y + 2z = -7. \end{cases}$$

Завдання 3. Дано координати вершини трикутника $\Delta A_1A_2A_3$:
A_1 (9; 5); A_2 (–3; 7); A_3 (–2; 5) і точка A_4 (6; 9).
Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

е) побудувати рисунок в системі координат.

Завдання 4. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - 7x^2 + 2}{4x - x^2}$; а) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$; б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{4+x}}{5x - x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(5x - \sqrt{4x^2 + x - 5}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg3x}{\sin 4x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x+5}$.

Завдання 5. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = 4x^6 - x^7 + 3x$; б) $y = \sqrt[5]{x^6} + \dfrac{3}{x^5}$; в) $y = x \cdot \log_2 x$; г) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; д) $y = \sqrt{e^{3x}}$.

Завдання 6: Дослідити функцію і побудувати її графік $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

Завдання 7: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (3x^2 + 4x + \dfrac{5}{x})dx$; б) $\int (\sqrt[7]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^8}})dx$; в) $\int \dfrac{dx}{\sin(3-4x)}$;

г) $\int \dfrac{e^x}{e^x + 1}dx$; д) $\int x^2 sinxdx$.

Завдання 8: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями: $y = x^2$, $y = x$. Зобразити фігуру в системі координат.

Варіант №6

Завдання 1. Перевірити правильність формули скороченого множення $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ для матриць $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:
а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = -5, \\ 2x - 4y + 3z = 20, \\ 4x - 3y - 5z = 3. \end{cases}$$

Завдання 3. Дано координати вершини трикутника $\Delta A_1A_2A_3$:
A_1 (0; 7); A_2 (4; 1); A_3 (6; 2) і точка A_4 (3;9).
Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

е) побудувати рисунок в системі координат.

Завдання 4. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{4x - 5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x}{3x^2 - x - 2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x-2} - 1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{9x^2 + 1}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sin 4x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$.

Завдання 5. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = x^3 - \dfrac{1}{7}x^7$; б) $y = \sqrt[7]{x^6} + \dfrac{4}{x^7}$; в) $y = \cos x \cdot \log_5 x$; г) $y = \dfrac{x^2}{\sin x}$; д) $y = \sqrt{x^2 - x}$.

Завдання 6: Дослідити функцію і побудувати її графік $y = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$.

Завдання 7: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (10x^4 + 12x + \sin x)dx$; б) $\int (\sqrt[9]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^{12}}})dx$; в) $\int \dfrac{dx}{(3-4x)^2 + 1}$;

г) $\int \dfrac{\ln^2 x}{x} dx$; д) $\int x^2 cosx dx$.

Завдання 8: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями: $y = x^2 - 4$, $y = 1$. Зобразити фігуру в системі координат.

Варіант №7

Завдання 1. Перевірити правильність формули скороченого множення $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ для матриць $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:
а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = -3, \\ 2x - 3y + z = -4, \\ 4x - 5y - 2z = 10. \end{cases}$$

Завдання 3. Дано координати вершини трикутника $\Delta A_1A_2A_3$:
A_1 (5; 5); A_2 (3; 8); A_3 (7; -3) і точку A_4 (5; 8).
Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

е) побудувати рисунок в системі координат.

Завдання 4. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - 2x^2 + 5}{4x^3 - 9x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{4 - 4x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{3x - x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3x - \sqrt{4x^2 - 1}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 9x}{3x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} (3 - 2x)^{\frac{x}{1-x}}$.

Завдання 5. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = x^2 - \dfrac{1}{5}x^5$; б) $y = \sqrt[6]{x^7} + \dfrac{2}{x^6}$; в) $y = \sin x \cdot \sqrt{x}$; г) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$; д) $y = \sqrt{4x^2 - 3}$.

Завдання 6: Дослідити функцію і побудувати її графік $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$.

Завдання 7: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (4x^3 + 2x^2 + \dfrac{1}{x})dx$; б) $\int (\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^6}})dx$; в) $\int cos(8x+3)dx$;

в) $\int \dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$; г) $\int \dfrac{x}{\sin^2 x}dx$.

Завдання 8: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями: $y = x^2 - 4x$, $y = 0$. Зобразити фігуру в системі координат.

Варіант №8

Завдання 1. Перевірити правильність формули скороченого множення $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ для матриць $A = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:
а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -2, \\ 4x + 4y - 2z = -17, \\ 2x + 3y + z = -9. \end{cases}$$

Завдання 3. Дано координати вершини трикутника $\Delta A_1A_2A_3$:
A_1 (6; 1); A_2 (–4; 6); A_3 (9; 4) і точку A_4 (1; 2).
Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

е) побудувати рисунок в системі координат.

Завдання 4. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2 - 7x + 5}{5x - 2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{4 - x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{2x+7} - 5}{9 - x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 25x}{10x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.

Завдання 5. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = 2x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 - 4$; б) $y = \sqrt[8]{x^7} + \dfrac{9}{x^8}$; в) $y = tgx \cdot \sqrt{x}$; г) $y = \dfrac{e^x - 5}{\arccos x}$; д) $y = \ln\sqrt{x}$.

Завдання 6: Дослідити функцію і побудувати її графік $y = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Завдання 7: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (\dfrac{1}{3}x^2 + 3x + \dfrac{4}{x})dx$; б) $\int (\sqrt[11]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}})dx$; в) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$;

г) $\int \dfrac{x^3}{x^4 + 1}dx$; д) $\int \dfrac{\ln x}{x^2}dx$.

Завдання 8: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями: $y = \sqrt{x}$, $x = 0$; $x = 4$. Зобразити фігуру в системі координат.

Варіант №9

Завдання 1. Перевірити правильність формули скороченого множення $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ для матриць $A = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв’язати систему лінійних рівнянь:
а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 2z = 9, \\ 4x + y - 4z = 9, \\ x + y - 4z = 9. \end{cases}$$

Завдання 3. Дано координати вершини трикутника $\Delta A_1A_2A_3$:
A_1 (5; 5); A_2 (9; 4); A_3 (2; –3) і точка A_4 (7; 9).
Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

е) побудувати рисунок в системі координат.

Завдання 4. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 7x^2 + 5}{4x - 5x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4 - x}{\sqrt{6x+1} - 5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

Завдання 5. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = 2x^7 - \dfrac{1}{6}x^6 - 2$; б) $y = \sqrt[7]{x^8} + \dfrac{1}{3x^3}$; в) $y = ctgx \cdot \sqrt{x}$; г) $y = \dfrac{5x}{\cos x}$; д) $y = \ln\sqrt{e^x}$.

Завдання 6: Дослідити функцію і побудувати її графік $y = \dfrac{x}{(x+2)^2}$.

Завдання 7: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(2x^7 - \dfrac{1}{6}x^6 - 2\right)dx$; б) $\int \left(4\sqrt[7]{x^8} + \dfrac{1}{3x^3} + 2\right)dx$; в) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 \dfrac{x}{3}}$;

г) $\int \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}dx$; д) $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

Завдання 8: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями: $y = x^3$ і $y = x$. Зобразити фігуру в системі координат.

Варіант №10

Завдання 1. Перевірити правильність формули скороченого множення $\left(A+B\right)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ для матриць $A = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв’язати систему лінійних рівнянь:
а) за правилом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

Завдання 3. Дано координати вершини трикутника $\Delta A_1A_2A_3$:
A_1 (7; 5); A_2 (1; 2); A_3 (7; 3) і точку A_4 (3; 8).
Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

е) побудувати рисунок в системі координат.

Завдання 4. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 2x^3 + 15}{x^3 - 5x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 5x^2 + 4}{x^2 - 16}$; в) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2 - 1} - x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2 - x\right)^{\frac{3x}{1-x}}$.

Завдання 5. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = 4x^2 - 7x + 2$; б) $y = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{x^4}$; в) $y = e^x \cdot \ln x$; г) $y = \dfrac{4x^4 - 9x^2}{\sqrt{x+4}}$; д) $y = 2^{\sin 4x}$.

Завдання 6: Дослідити функцію і побудувати її графік $y = \dfrac{x}{\left(x-2\right)^2}$.

Завдання 7: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int\left(4x^2 - 7x + 2\right)dx$; б) $\int\left(3\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{x^4} + 1\right)dx$; в) $\int \dfrac{dx}{3 - 8x}$;

г) $\int \dfrac{\ln x}{x}dx$; д) $\int xe^x dx$.

Завдання 8: За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями: $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4$. Зобразити фігуру в системі координат.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Перевірити правильність формули скороченого множення $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$ для матриць $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 7 & 3\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Для перевірки правильності формули різниці квадратів для матриць *A* та *B* виконаємо дії над цими матрицями справа та зліва від знака «дорівнює» окремо:

$$(A-B)\cdot(A+B)=\left(\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & -4\\ 7 & 3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -4\\ 7 & 3\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}4-5 & 5-(-4)\\ -3-7 & 1-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4+5 & 5+(-4)\\ -3+1 & 1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 9\\ -10 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot 9+9\cdot(-2) & (-1)\cdot 1+9\cdot 4\\ (-10)\cdot 9+(-2)\cdot(-2) & (-10)\cdot 1+(-2)\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9-18 & -1+36\\ -90+4 & -10-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27 & 35\\ -86 & -18\end{pmatrix}.$$

Обчислимо різницю квадратів матриць *A* та *B*:

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & -4\\ 7 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -4\\ 7 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot 4+5\cdot(-3) & 4\cdot 5+5\cdot 1\\ (-3)\cdot 4+1\cdot(-3) & (-3)\cdot 5+1\cdot 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\cdot 5+(-4)\cdot 7 & 5\cdot(-4)+(-4)\cdot 3\\ 7\cdot 5+3\cdot 7 & 7\cdot(-4)+3\cdot 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 25\\ -15 & -14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & -32\\ 56 & -19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-(-3) & 25-(-32)\\ -15-56 & -14-(-19)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 57\\ -71 & 5\end{pmatrix}.$$

Оскільки $\begin{pmatrix}-27 & 35\\ -86 & -18\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}4 & 57\\ -71 & 5\end{pmatrix}$, то для матриць *A* та *B* формула $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$ не справджується.

Завдання №2. Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера та матричним методом: $\begin{cases}2x+7y+z=-17,\\ 7x+3y+5z=8,\\ 3x+2y+6z=9.\end{cases}$

Розв'язання:

а) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за правилом Крамера. Для цього обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot6 + 1\cdot7\cdot2 + 7\cdot5\cdot3 - 1\cdot3\cdot3 - 2\cdot5\cdot2 - 7\cdot7\cdot6 =$$

$$= 36 + 14 + 105 - 9 - 20 - 294 = -168.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо додаткові визначники, замінюючи по черзі перший, другий та третій стовпець головного визначника стовбцем вільних елементів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -17 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-17)\cdot3\cdot6 + 8\cdot2\cdot1 + 7\cdot5\cdot9 - 1\cdot3\cdot9 - 2\cdot5\cdot(-17) - 8\cdot7\cdot6 =$$

$$= -306 + 16 + 315 - 27 + 170 - 336 = -168;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -17 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot8\cdot6 + 7\cdot9\cdot1 + 3\cdot(-17)\cdot5 - 1\cdot8\cdot3 - 2\cdot5\cdot9 - 7\cdot6\cdot(-17) =$$

$$= 96 + 63 - 255 - 24 - 90 + 714 = 504;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot9 + 7\cdot8\cdot3 + 7\cdot2\cdot(-17) - (-17)\cdot3\cdot3 - 2\cdot2\cdot8 - 7\cdot7\cdot9 =$$

$$= 54 + 168 - 238 + 153 - 32 - 441 = -336.$$

Визначимо корені системи рівнянь за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, $\{1;-3;2\}$ – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

б) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь матричним методом, скориставшись формулою:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

де Δ – головний визначник системи, A^* – зведена матриця, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – стовпець вільних елементів.

З попередніх обчислень головний визначник системи дорівнює $\Delta = -168$. Обчислимо математичні доповнення до кожного елемента матриці за формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -(42 - 15) = -27;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 14 - 9 = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = -(42 - 2) = -40;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 12 - 3 = 9;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 7 \cdot 3) = -(4 - 21) = 17;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 35 - 3 = 32;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 7) = -(10 - 7) = -3;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 6 - 49 = -43.$$

Запишемо зведену матрицю: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix}$.

Тоді стовпець невідомих елементів $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ дорівнює: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot (-17) - 40 \cdot 8 + 32 \cdot 9 \\ (-27) \cdot (-17) + 9 \cdot 8 + (-3) \cdot 9 \\ 5 \cdot (-17) + 17 \cdot 8 + (-43) \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -136 - 320 + 288 \\ 459 + 72 - 27 \\ -85 + 136 - 387 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -168 \\ 504 \\ -336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\{1;-3;2\}$ – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

Відповідь: $\{1,-3,2\}$.

Завдання №3. Дано координати вершини трикутника $\Delta A_1A_2A_3$: A_1 *(0; 6); A_2 (3; 2); A_3 (5; 3)* і точку A_4 *(2; 1)*. Побудувати рисунок в системі координат.

Знайти: а) рівняння прямої A_1A_2;

б) рівняння висоти та медіани $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2;

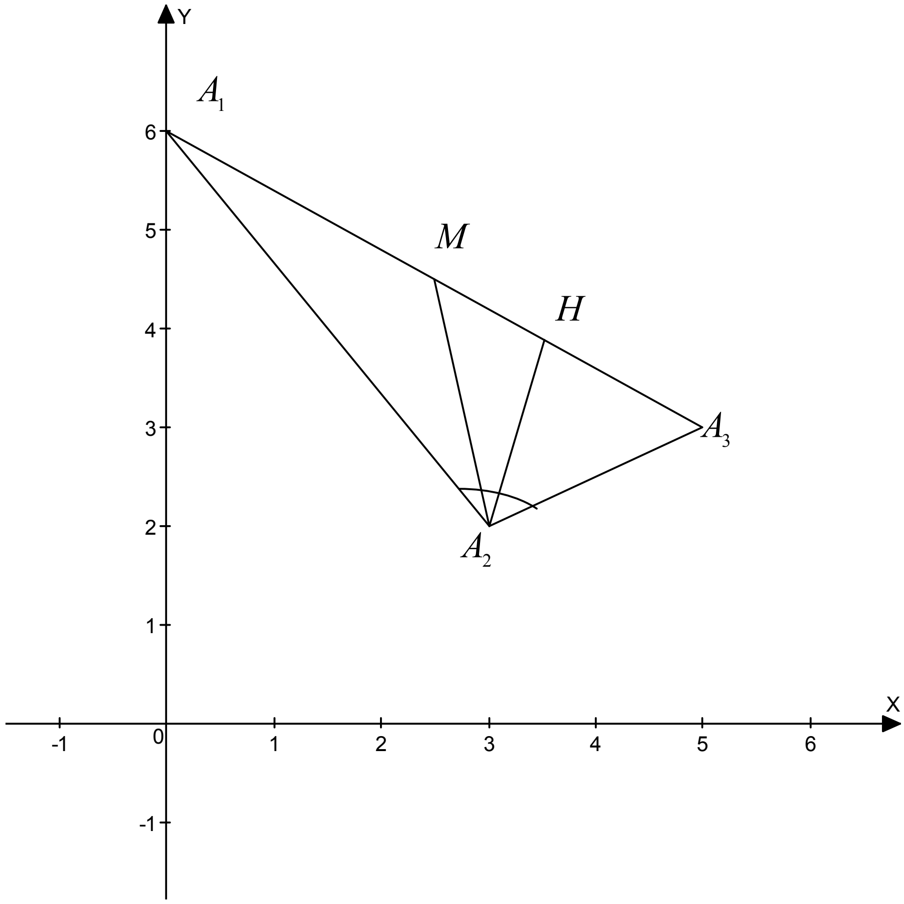
в) тангенс кута A_2;

г) площу трикутника $\Delta A_1A_2A_3$;

д) відстань від точки A_4 до прямої A_1A_2.

Розв'язання:

Побудуємо рисунок в системі координат.



а) Запишемо <u>рівняння прямої A_1A_2</u>:

Рівняння прямої, що проходить через дві точки, має вигляд: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Координати точок A_1 $(0; 6)$ і A_2 $(3; 2)$ відомі, тому рівняння набуватиме вигляду: $\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-6}{2-6}$, або після спрощення: $4x+3y+18=0$.

б) Запишемо <u>рівняння висоти та медіани</u> $\Delta A_1A_2A_3$, опущених з вершини A_2: Для запису рівняння висоти A_2H, що перпендикулярна стороні A_1A_3, запишемо рівняння сторони A_1A_3, користуючись попередньою формулою: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Координати точок A_1 $(0; 6)$ і A_3 $(5; 3)$ відомі, тому рівняння набуватиме вигляду: $\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-6}{3-6}$, або після спрощення: $3x+5y-30=0$.

Кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює: $k_{A_1A_3}=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{5}$. Кутовий коефіцієнт перпендикулярної прямої: $k_{A_1A_3}=-\frac{1}{k_{A_1A_3}}=-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$.

Рівняння прямої, що проходить через точку A_2 $(3; 2)$ з кутовим коефіцієнтом $k_{A_2H}=\frac{5}{3}$ має вигляд: $y-y_2=k(x-x_2)$, або $y-2=\frac{5}{3}\cdot(x-3)$. Після перетворення рівняння висоти набуває вигляду: $5x-3y-9=0$.

Для запису рівняння медіани A_2M знайдемо координати точки M, як середини сторони A_1A_3: $x_м=\frac{x_{A_1}+x_{A_3}}{2}=\frac{0+5}{2}=2{,}5$, $y_м=\frac{y_{A_1}+y_{A_3}}{2}=\frac{6+3}{2}=4{,}5$.

Запишемо рівняння медіани, як рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Оскільки координати точок A_2 і M відомі, то: $\frac{x-3}{2{,}5-3}=\frac{y-2}{4{,}5-2}$. Після спрощення рівняння медіани: $5x+y-17=0$.

в) Знайдемо <u>тангенс кута A_2</u>, обчисливши кутові коефіцієнти прямих A_1A_2 і A_2A_3. Рівняння прямої A_1A_2, з попередніх обчислень: $4x+3y+18=0$, тоді $k_{A_1A_2}=-\frac{A}{B}=-\frac{4}{3}$. Кутовий коефіцієнт прямої A_2A_3 обчислимо за формулою: $k_{A_2A_3}=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=\frac{2-3}{3-5}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$.

Кут між прямими знаходимо за годинниковою стрілкою, користуючись формулою: $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{11}{6} : \frac{1}{3} = \frac{11}{2} = 5{,}5$.

г) Визначимо площу трикутника $A_1A_2A_3$:

$$S = \pm\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\left(0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 6 - 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 - 0 \cdot 6\right) = \frac{1}{2} \cdot 11 = 5{,}5(кв.од.)$$

д) Відстань від точки A_4 *(2; 1)* до прямої A_1A_2, $4x + 3y + 18 = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 18|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{29}{5} = 5{,}8(од.)$$

Відповідь: а) $4x + 3y + 18 = 0$;

б) $5x - 3y - 9 = 0$; $5x + y - 17 = 0$;

в) $tg\varphi = 5{,}5$;

г) $5{,}5кв.од.$;

д) $5{,}8од.$

Завдання 4. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2 + 5x + 6}{7x^2 + 9x + 4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2 + 5x - 8}{3x^2 - 5x + 2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2 + 10x + 5} - 4x)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}$.

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2 + 5x + 6}{7x^2 + 9x + 4} = \left[\frac{3 \cdot \infty^2 + 5 \cdot \infty + 6}{7 \cdot \infty^2 + 9 \cdot \infty + 4}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ необхідно чисельник і знаменник поділити на x^n, де $n-$ найбільше значення степеня. Найбільше значення степеня n=2, тому ділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{9x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7+\frac{9}{x}+\frac{4}{x^2}}=\left[\frac{3+\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}}{7+\frac{9}{\infty}+\frac{4}{\infty}}\right]=\frac{3+0+0}{7+0+0}=\frac{3}{7}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}=\dfrac{3\cdot 1^2+5\cdot 1-8}{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ від раціональних дробів необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники і однакові скоротити.

Розкладаємо квадратичні вирази на множники за теоремою Вієта і отримаємо:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(3x+8)}{(x-1)(3x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+8}{3x-2}=\dfrac{3\cdot 1+8}{3\cdot 1-2}=\dfrac{11}{1}=11$, (скоротили на $x-1$).

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\dfrac{\sqrt{4-0}-\sqrt{4+0}}{0}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ від ірраціональних дробів необхідно позбавитись від ірраціональності, помноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз. Спряженими називають такі ірраціональні вирази, які під час множення один на інший утворюють раціональні вирази:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4-x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\cdot(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\left[\sqrt{\infty}-\infty\right]=\left[\infty-\infty\right].$

Для розкриття невизначеності $\left[\infty-\infty\right]$ необхідно вираз представити у вигляді дробу $\dfrac{a}{1}$; в утвореному дробі помножити чисельник і знаменник на спряжений вираз. У подальшому позбавитися утвореної невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}-4x}{1}\cdot\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+10x+5-16x^2}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Поділимо кожен елемент чисельника і знаменника на x, під коренем на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}}{x}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2+10x+5}{x^2}}+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{5}{x}}{\sqrt{16+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}}+4}=\frac{10+\frac{5}{\infty}}{\sqrt{16+\frac{10}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}}+4}=\frac{10+0}{\sqrt{16+0+0}+4}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}.$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$. Скористаємося першою визначною границею: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{x}=1$.

Введемо заміну $7x=y\Rightarrow y\to 0$ при $x\to 0$.

Маємо: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{3\cdot\frac{y}{7}}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{7}{3}\cdot\frac{\sin y}{y}=\frac{7}{3}\cdot 1=\frac{7}{3}$.

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}$. Безпосередня підстановка $x=\infty$ дає невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$,

тому скористаємося другою визначною границею: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{an+в}=e^a$, $e\approx 2{,}72$.

Введемо заміну $1+\frac{1}{n}=\frac{x-3}{x+2}$. Зведемо до спільного знаменника і виразимо *x* через *n*: $x=-5n-2$. При чому, якщо $x\to\infty$, то $n\to-\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x-1}=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\cdot(-5n-2)-1}=\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-10n-4-1}=e^{-10}=\frac{1}{e^{10}}.$$

Завдання 5. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y=4x^3-\frac{1}{2}x^2+7$; б) $y=\sqrt[7]{x^3}+\frac{4}{5x^{13}}$; в) $y=\cos x\cdot\log_9 x$;

г) $y=\frac{\arcsin x}{\ln x}$; д) $y=\sqrt{tg\left(x^3-4x\right)}$.

Розв'язання:

Для знаходження похідних функцій користуємося таблицею похідних (табл. 1 додатку).

а) $y = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7$.

$y' = 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 12x^2 - x$;

б) $y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}}$.

Скористаємося властивостями степеня $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$, отримаємо:

$y = \sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{5x^{13}} = x^{\frac{3}{7}} + \frac{4}{5}x^{-13}$.

Тоді похідна функції $y' = \frac{3}{7} \cdot x^{\frac{3}{7}-1} + \frac{4}{5} \cdot (-13) \cdot x^{-13-1} = \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}} - \frac{52}{5}x^{-14} = \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}} - \frac{52}{5x^{14}}$.

в) $y = \cos x \cdot \log_9 x$.

Скористаємося формулою похідної добутку: $(uv)' = u'v + uv'$, тоді $y' = (\cos x)' \cdot \log_9 x + \cos x \cdot (\log_9 x)' = -\sin x \cdot \log_9 x + \cos x \cdot \frac{1}{x \ln 9}$

г) $y = \frac{\arcsin x}{\ln x}$.

Скористаємося формулою похідної частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, тоді

$$y = \frac{(\arcsin x)' \cdot \ln x - \arcsin x \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x - \arcsin x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}.$$

д) $y = \sqrt{tg(x^3 - 4x)}$. Враховуючи, що функція складена, то її похідна дорівнюватиме: $y' = \frac{1}{2\sqrt{tg(x^3 - 4x)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^3 - 4x)} \cdot (3x^2 - 4)$.

Завдання 6. Дослідити функцію і побудувати її графік: $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання:

1. Елементарні дослідження:

Область визначення функції : $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;\infty)$.

Точки перетину графіка функції з осями координат:

$(0;0)$ − єдина точка перетину з віссю абсцис та ординат.

Функція непарна, оскільки: $y(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1}$. Отже, графік функції симетричний відносно початку координат.

2. Дослідження точок розриву:

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{-0} = \infty; \quad \lim_{x \to -1-0} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} = \infty; \quad \lim_{x \to 1-0} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Отже, $x = -1$ і $x = 1$ − вертикальні асимптоти.

3. Знаходження похилих асимптот:

Похилі асимптоти визначатимемо за формулою: $y = kx + b$. Для цього знайдемо невідомі коефіцієнти k і b:

$$k = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{\infty} \right] = 0.$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Тоді рівняння асимптоти набуватиме вигляду: $y = 0$.

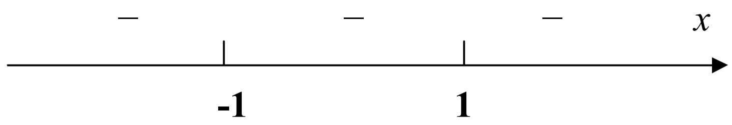
4. Дослідження функції на монотонність:

Знайдемо першу похідну функції:

$$y' = \frac{(x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-1 - x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Прирівняємо першу похідну до нуля: $-\dfrac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0$.

Оскільки рівняння не має розв'язків, то критичних точок першого роду не має. Тому на числовій осі OX позначаємо лише точки розриву функції:



Отже, функція спадає на всій області визначення.

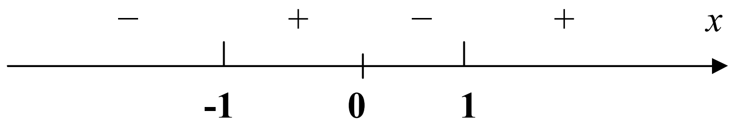
5. Дослідження на опуклість та ввігнутість:

Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \frac{-2x\cdot\left(x^2-1\right)^2+\left(1+x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left(-x^2+1-2+2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

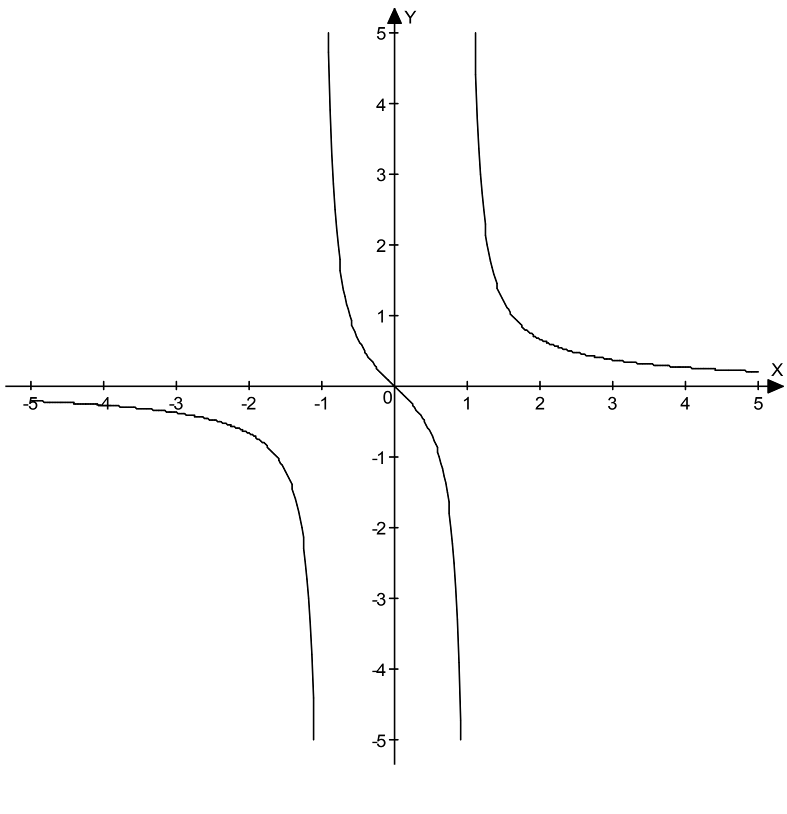
$$= \frac{2x\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

Прирівняємо другу похідну до нуля: $\frac{2x\cdot\left(x^2-2x-1\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0$, $x=0$ – критична точка другого роду. Визначимо знаки другої похідної на отриманих інтервалах:



Отже, функція опукла вниз на проміжках: $x\in\left(-1;0\right)\cup\left(1;\infty\right)$, опукла вгору – $x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(0;1\right)$. Точка (0; 0) – точка перегину.

6. Побудова графіка функції:



Завдання 7: Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int\left(5x^3-\frac{1}{4}x^4+2x-1\right)dx$; б) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^5}-\frac{7}{x^3})dx$; в) $\int\cos(9x-4)dx$;

г) $\int\frac{\ln x}{x}dx$; д) $\int\ln x\cdot dx$.

Розв'язання:

Для знаходження невизначеного інтегралу користуємося таблицею інтегралів (табл. 2 додатку).

а) $\int\left(5x^3-\frac{1}{4}x^4+2x-1\right)dx=5\int x^3dx-\frac{1}{4}\int x^4dx+2\int xdx-\int dx=$

$=\frac{5x^{3+1}}{3+1}-\frac{x^{4+1}}{4(4+1)}+\frac{2x^{1+1}}{1+1}-x+C=\frac{5x^4}{4}-\frac{x^5}{20}+x^2-x+C.$

б) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^5}-\frac{7}{x^3})dx=\int\sqrt{x}dx+\int\sqrt[3]{x^5}dx-\int\frac{7}{x^3}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{5}{3}}dx-7\int x^{-3}dx=$

$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}-7\int x^{-3}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}-7\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}-7\frac{x^{-2}}{-2}+C=$

$7\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{x^8}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+C.$

в) $\int\cos(9x-4)dx=\left|\begin{array}{c}9x-4=t\\ 9dx=dt\\ dx=\frac{1}{9}dt\end{array}\right|=\int\cos t\cdot\frac{1}{9}dt=\frac{1}{9}\int\cos t\cdot dt=\frac{1}{9}\sin t+C=$

$=\frac{1}{9}\sin(9x-4)+C.$

(В даному випадку користувалися заміною змінної).

г) $\int\frac{\ln x}{x}dx=\left|\ln x=t\Rightarrow\frac{dx}{x}=dt\right|\Rightarrow\int t\cdot dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\ln^2x+C.$

(В даному випадку користувалися заміною змінної).

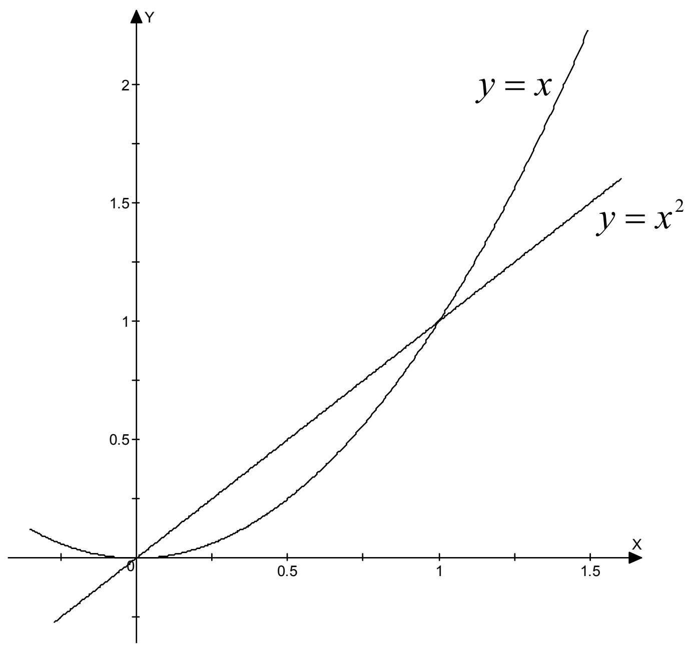
д) $\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u; \dfrac{dx}{x} = du \\ dx = dv; x = v \end{matrix} \right| = x \ln x - \int x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx = x \ln x - \int dx + C = x \cdot \ln x - x + C.$

(В даному випадку користувалися формулою інтегрування частинами: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$*)*

Завдання №8. За допомогою визначеного інтеграла знайти площу фігури, обмежену лініями $y = x^2$, $y = x$. Зобразити фігуру в системі координат.

Розв'язання:

Побудуємо фігуру, площу якої необхідно знайти:



$$S = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} (кв.од.)$$

Відповідь: $S = \frac{1}{6}$ *кв.од.*

ДОДАТКИ

Таблиця 1

Таблиця похідних

№	функція	похідна	№	функція	похідна
1	$y = C(const)$	$y' = 0$	2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	4	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	6	$y = e^x$	$y' = e^x$
7	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	8	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
9	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	10	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
11	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	12	$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14	$y = arccosx$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	16	$y = arcctgx$	$y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила диференціювання

функція	похідна
$y = c \cdot u$	$y' = c \cdot u'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

Таблиця 2

Таблиця невизначених інтегралів

1	$\int dx = x + C$	2	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ (n \neq -1)$
3	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$	4	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$	6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	8	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
9	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	10	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\ \dfrac{x}{a} + C$
11	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a - x^2}} = \arcsin\ \dfrac{x}{a} + C$	12	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|v + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
13	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\|\dfrac{x - a}{x + a}\right\| + C$	14	$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\|\dfrac{a + x}{a - x}\right\| + C$

Правила інтегрування

$\int (u + v + w) dx = \int u dx + \int v dx + \int w dx$
$\int u dv = uv + \int v du$
$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$
$\int f(kx + b) dx = \dfrac{1}{k} \cdot F(kx + b)$

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Вища математика в прикладах і задачах (методичні рекомендації для студентів заочного відділення економічних спеціальностей)

Мельниченко О. П.
Ревицька У. С.

Редактор В.І.Драчук
Комп’ютерна верстка

Здано до складання . Підписано до друку
Формату 60×84 $1/16$ Ум. друк. арк. Тираж 50 Зам. ціна

РВІХВ, Сектор оперативної поліграфії БНАУ
09117 Біла Церква, Соборна пл., 8, тел. 33-11-01