МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ

БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕКОНОМІКИ ТА БІЗНЕСУ

Кафедра вищої математики

Шевченко Р.Л.,

Мельниченко О.П., Непочатенко В.А.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичні рекомендації
щодо самостійного вивчення дисципліни за кредитно-модульною технологією для студентів
економічних спеціальностей ОКР «бакалавр» всіх форм навчання

Біла Церква

2012

УДК 517(075.8)

Рекомендовано до видання

методичною комісією

Протокол № від 2011р.

Шевченко Р.Л., Мельниченко О.П., Непочатенко В.А. **Вища математика:** Навчально-методичні рекомендації щодо самостійного вивчення дисципліни за кредитно-модульною технологією для студентів економічних спеціальностей ОКР «бакалавр» всіх форм навчання. − Біла Церква.– 2012.− 280с.

Методичні рекомендації розраховані на студентів економічних спеціальностей стаціонарної та заочної форм навчання. Вони включають основні поняття лінійної алгебри, векторного числення, аналітичної геометрії, теорії границь, диференціального та інтегрального числень, диференціальних рівнянь та рядів відповідно до рекомендованої Міністерством освіти України типової навчальної програми для економічних спеціальностей. Перший підрозділ з основних понять елементарної математики розрахований на студентів, що мали перерву в навчанні після отримання середньої освіти. Наведено необхідний довідковий матеріал, розв’язування типових прикладів та задач, набори завдань для самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Рецензент:

ЗАТВЕРДЖЕНО
Департаментом аграрної освіти та науки
Міністерства аграрної політики України
27 серпня 2004 року

ПРОГРАМА

навчальної дисципліни для підготовки бакалаврів
в аграрних вищих навчальних закладах II−IV рівнів акредитації з напрямку
0501 «Економіка і підприємництво»

ВСТУП

Короткі відомості з історії розвитку математики. Роль математики в економічних дослідженнях та управлінні соціально-економічними процесами. Місце дисципліни в системі підготовки бакалаврів економічного профілю. Мета і задачі дисципліни.

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.1 Визначники

Визначники другого, третього та *n*-го порядку.

1.2. Системи лінійних рівнянь

Правило Крамера. Однорідні системи лінійних рівнянь. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь. Метод Жордана − Гаусса.

1.3. Елементи векторної алгебри

n-вимірний арифметичний простір R^n. Арифметичні вектори простору R^n. Лінійні операції над векторами. Скалярний добуток у R^n. Довжина вектора. Кут між векторами. Відстань між точками.

Системи векторів. Лінійно залежні і лінійно незалежні системи векторів. Базис і ранг системи векторів. Розклад вектора за базисом.

1.4. Елементи теорії матриць

Лінійні операції над матрицями. Поняття оберненої матриці. Знаходження оберненої матриці методом Жордана − Гаусса.

Матрична форма запису системи лінійних рівнянь та її розв'язок. Ранг матриці. Теорема Кронекера − Капеллі.

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Геометрія простору R^n.

Пряма і площина у просторі R^n. Площина в R^3. Пряма в R^2 та R^3. Опуклі множини. Системи лінійних нерівностей з n невідомими.

Поняття про лінії та поверхні другого порядку.

РОЗДІЛ 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Множина дійсних чисел. Абсолютна величина дійсного числа. Поняття функції, область визначення, способи задання. Основні елементарні функції, їх властивості та графіки.

Упорядкована змінна, послідовність як функція цілочислового аргументу. Границя послідовності. Нескінчено малі та нескінчено великі величини.

3.1. Границі функції

Границя функції у точці, на нескінченості, односторонні границі функції. Основні теореми про границі. Перша визначна границя та наслідки з неї. Друга визначна границя, число e, натуральні логарифми, експонента. Невизначеності.

3.2. Неперервність функції

Неперервність функції у точці та на відрізку. Точки розриву функції та їх класифікація. Основні теореми про неперервність функцій.

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1. Похідна функції.

Задачі, що призводять до поняття похідної. Економічний та геометричний зміст похідної. Темп росту та коефіцієнт еластичності. Диференційовність функції. Таблиця похідних. Похідні вищих порядків.

4.2. Диференціал функції

Геометричний зміст диференціалу функції. Інваріантність форми диференціала. Застосування в наближених обчисленнях.

4.3. Диференційовні функції

Основні теореми про диференційовні функції. Правило розкриття невизначеностей (правило Лопіталя).

Зростання та спадання функцій. Достатня умова монотонності. Екстремум функції. Необхідна та достатня умова існування екстремуму функції. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.Опуклість і ввгнутість кривої та точки перегину. Ознаки опуклості та угнутості.

Горизонтальні, вертикальні та похилі асимптоти функції.

Повне дослідження функції.Задачі економічного змісту.

РОЗДІЛ 5. ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Функції декількох та двох змінних. Геометричний зміст функції двох змінних. Неперервність. Границя. Частинні похідні функції двох змінних.

Повний диференціал та інваріанти його форм. Застосування повного диференціала в наближених обчисленнях.

Частинні похідні та частинні диференціали вищих порядків

Екстремум функції двох змінних. Умовний екстремум. Найбільше та найменше значення функції у замкненій області.

Метод найменших квадратів. Поняття про задачі лінійного програмування.

РОЗДІЛ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1. Невизначений інтеграл

Первісна, невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця інтегралів.

Найпростіші методи інтегрування. Інтегрування дробово-раціональних, ірраціінальних та тригонометричних функцій.

6.2. Визначений інтеграл

Визначений інтеграл, означення та властивості. Геометричний зміст визначеного інтеграла.

Інтеграл зі змінною верхнею границею. Формула Ньютона − Лейбніца. Невласні інтеграли, їх властивості та методи інтегрування.

Поняття про подвійні інтеграли. Зведення подвійного інтеграла до повторного. Поняття про потрійні інтеграли.

РОЗДІЛ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Задачі економіки, що приводять до поняття диференціального рівняння. Основні поняття та означення.

Диференціальні рівняння першого порядку, задача Коші, теорема існування та єдності розв'язку. Основні класи рівнянь, шо інтегруються в квадратурах.

Диференціальні рівняння другого порядку, задача Коші. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають пониження порядку.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Застосування комплексного числа до розв'язування таких рівнянь. Комплексні числа та їх форми. Дії над комплексними числами. Формули Ейлера.

Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь.

Використання диференціальних рівнянь в економіці. Різницеві методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

РОЗДІЛ 8. РЯДИ

8.1. Числові ряди

Означення ряду, частинної суми ряду, збіжності збіжності. Знакопозитивні ряди. Необхідна умова збіжності. Достатні умови збіжності. Знакозмінні ряди. Знакочергувальні ряди. Абсолютна та умовна збіжність знакочергувальних рядів. Теорема Лейбніца.

8.2. Степеневі ряди

Степеневі ряди. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду. Умови диференціювання та інтегрування степеневого ряду. Ряди Тейлора та Маклорена. Розкладання функцій в степеневий ряд.

Застосування розкладання функцій в ряд до наближеного інтегрування та розв'язування диференціальних рівнянь.

8.3. Ряди Фур'є

Тригонометричні ряди Фур'є.

Визначення обсягу годин з дисципліни та перелік тем аудиторних занять, самостійної роботи і контролю знань

Навчальний курс дисципліни “Вища математика ” проводиться впродовж двох семестрів та має наступні види робіт:

- аудиторні заняття: 64 лекцій, 64 практичних робіт;
- самостійна робота студентів – 88 годин;

Аудиторна робота з дисципліни здійснюється за тематичним планом (табл.1).

Таблиця 1.

Тематичний план аудиторної роботи (лекції та практичні заняття)

№ модуля		Теми	К-сть годин
Модуль 1.		**Лінійна алгебра та аналітична геометрія**	
	Тема 1.	Матриці та дії над ними	2
	Тема 2.	Визначники. Мінори. Алгебраїчні доповнення	2
	Тема 3.	Системи лінійних рівнянь	2
	Тема 4.	Застосування матричного числення при розв’язанні економічних задач	2
Всього за 1 модуль			8
Модуль 2.		**Аналітична геометрія**	
	Тема 5.	Вектори	2
	Тема 6.	Прямокутні координати на площині	2
	Тема 7.	Пряма і площина в просторі	2
	Тема 8.	Криві лінії другого порядку	2
Всього за 2 модуль			8
Модуль 3.		**Основи теорії границь**	
	Тема 9.	Функція. Основні елементарні функції	2
	Тема 10.	Границя функції . Основні невизначеності	2
	Тема 11.	Границя функції . Визначні та необхідні границі	2
	Тема 12.	Неперервність та розриви функції	2
	Тема 13.	Економічні задачі, пов’язані з послідовністю та її границею (елементи математики фінансів)	2
Всього за 3 модуль			10
Модуль 4.		**Основи диференціального числення**	
	Тема 14.	Основні правила та формули диференціювання	2

	Тема 15.	Диференціал функції та його застосування	2
	Тема 16.	Застосування похідної до дослідження функції	2
	Тема 17.	Диференціювання функції декількох змінних та його застосування	4
	Тема 18.	Економічні задачі, що зводяться до використання функцій двох змінних	2
Всього за 4 модуль			12
Модуль 5.		**Основи інтегрального числення**	
	Тема 19.	Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування	2
	Тема 20.	Інтегрування дробово-раціональних виразів	2
	Тема 21.	Інтегрування деяких тригонометричних виразів	2
	Тема 22.	Визначений інтеграла та його застосування	2
Всього за 5 модуль			8
Модуль 6.		**Диференціальні рівняння**	
	Тема 23.	Рівняння з відокремлюваними змінними	2
	Тема 24.	Лінійні диференціальні рівняння	2
	Тема 25.	Однорідні диференціальні рівняння	2
	Тема 26.	Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	2
	Тема 27.	Економічні задачі, що зводяться до диференційних рівнянь	2
Всього за 6 модуль			10
Модуль 7.		**РЯДИ**	
	Тема 28.	Числові ряди	4
	Тема 29.	Степеневі ряди	2
	Тема 30.	Ряди Фур’є	2
Всього за 7 модуль			8

Перелік тем винесених до самостійного опрацювання студентами наведено в таблиці 2.

Таблиця 2.

Тематичний план та перелік тем і питань самостійної роботи, які не розглядаються на аудиторних заняттях

№ модуля		Теми	К-сть годин
Модуль 1.		**Лінійна алгебра та аналітична геометрія**	
	1.	Ранг матриці	5
	2.	Системи лінійних рівнянь. Метод Гауса	5

	3.	Прямокутні системи рівнянь	5
	4.	Власні вектори та власні числа матриці	5
Всього за 1 модуль			20
Література [1-7]			
Форма контролю: написання індивідуальних робіт			
Модуль 2.		**Аналітична геометрія**	
	5.	Нерівності та їх геометричний зміст	5
	7.	Поверхні другого порядку. Циліндричні поверхні	5
	8.	Поверхні другого порядку. Конічні поверхні	5
	9.	Поверхні другого порядку. Поверхні обертання	5
Всього за 2 модуль			20
Література [1-7]			
Модуль 3.		**Основи теорії границь**	
	5.	Змінні величини. Послідовності та функції	5
	7.	Властивості границь	5
	8.	Основні теореми про границі	5
	9.	Правила розкриття невизначеностей (нерозглянуті випадки)	5
Всього за 3 модуль			20
Література [1-7]			
Модуль 4.		**Основи диференціального числення**	
	5.	Правило Лопіталя	5
		Основні теореми диференційного числення	5
Всього за 4 модуль			10
Література [1-7]			
Модуль 6.		**Диференціальні рівняння**	
	5.	Диференціальні рівняння другого порядку	18
Всього за 5 модуль			18
Література [1-7]			

Розрахунок балів для дисципліни “Вища математика ”

за пропорційною системою

КМС передбачає визначення за стобальною системою рейтингу студента на основі комплексної оцінки його в тому числі по залишкових знаннях з певної дисципліни за наступною формулою:

$$A = 0,4\left(0,5\left(a_1 + a_2\right) + a_3 + 3a_4 + 1,5a_5 + 1,8a_6 + 6a_7 - 0,8a_8 - 1,5a_9 - 0,8a_{10}\right)$$

Орієнтовний розподіл балів по дисципліні:

Назва контролю	Коефіцієнт	Мінімальна кількість балів	Максимальна кількість балів
Відвідування лекцій	a_1	0	4
Відвідування практичних	a_2	0	4
Виконання індивідуальних завдань	a_3	7	10
Написання модуля	a_4	20	30
Усне опитування	a_5	3	7
Написання самостійної роботи	a_6	10	15
Здача заліку	a_7	20	30
Пропуски лекцій та практичних занять	a_8	–	–
Отримана двійка	a_9	–	–
Невчасна здача індивідуального заняття	a_{10}	–	–
ВСЬОГО:		60	100

Шкала оцінювання

Сума балів	Оцінка в ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		Екзамен	
90-100	A	Відмінно (5)	Зараховано
82-89	B	Дуже добре(4)	
74-81	C	Добре(4)	
64-73	D	Задовільно (3)	
60-63	E	Достатньо (3)	
35-59	FX	Незадовільно (2)	Не зараховано
1-34	F	Незадовільно (2) з обов’язковим повторним курсом навчання	Не зараховано

МЕТА ВИВЧЕННЯДИСЦИПЛІНИ

«Вища математика» є нормативною дисципліною циклу природничо-наукової та загальноекономічної підготовки бакалавра напряму 0501 «Економіка і підприємництво».

Мета вивчення дисципліни − засвоєння студентами базових математичних знань, необхідних під час професійної діяльності, формування логічного мислення та вироблення навичок математичного дослідження прикладних економічних задач.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен

знати: основи вищої математики, що є фундаментом математичної освіти спеціалістів економічного профілю; роль та місце математичних методів у розв'язуванні низки практичних задач;

вміти: формулювати економічну задачу в математичних термінах і знаходити шляхи розв'язку цієї задачі; аналізувати одержані результати і на їх основі створювати практичні рекомендації.

Навчання проводиься у формі проведення лекцій, практичних занять, виконання індивідуальних завдань, контрольних робіт та самостійної роботи студентів.

Згідно з освітньо-професійною програмою тат навчальними планами підготовки бакалавра напряму 0501 «Економіна і підприємництво» на вивчення дисципліни відведено 216 год.,у тім числі 64 год. − лекційні заняття, 64 год. − практичні заняття, 88 год. − самостійна робота.

Підсумковий контроль знань та умінь проводиться у формі складання заліку у пешому семестрі та іспиту у другому.

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ КУРСУ

Робота з літературою

Працюючи з методичними рекомендаціями, особливу увагу потрібно звертати на визначення основних понять та аксіоматику, зміст теорем, формул та інших положень курсу, що відображають кількісні співвідношення та просторові форми навколишнього світу.

Робота з методичними рекомендаціями повинна супроводжуватися записами визначеннь, теорем, рівнянь та основних положень. Записи потрібно робити чітко, теореми підкреслювати, а виведені формули бажано обводити рамкою.

Розв'язування задач

Кожен розділ курсу супроводжується підібраним блоком задач, які необхідно розв'язати після вивчення теми та детального ознайомлення з розв'язаними задачами у посібнику. Для глибокого опанування матеріалом при розв'язуванні задач необхідно робити пояснення, посилаючись на теоретичні положення.

За неможливості самостійно розібратися у матеріалі студент може одержати консультацію на кафедрі вищої математики університету.

Список рекомендованої літератури

1. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. − Біла Церква, 2005.

2. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика, ч. І. − К., 2001.

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. − М.: Физматгиз, 1959.

4. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. − М.: Физматгиз, 1963.

5. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. − К., 1999.

6. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. − М.: Физматгиз, 1972.

7. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. − М.: Наука, 1986.

ВСТУП

У XVII столітті Європа вступила на шлях інтенсивного розвитку ринкової економіки, і точні науки одержали могутні стимули для швидкого розвитку. Розвиток торгівлі, економіки, астрономії, фізики, техніки, машинобудування вимагав рішучого оновлення математичного апарату. Це оновлення пройшло під знаком введення змінної величини, а вивчення її привело до поняття нескінченно малих величин, яке стало основним у математичному аналізі. Саме тому математичний аналіз ще називають аналізом нескінченно малих величин.

Ідеї Архімеда (ІІІ ст. до н. е.) і І.Кеплера (1615 р.), роботи Б.Кавальєрі (1635 р.), П.Ферма (1634 р.), Б.Паскаля (1654 р.), Д.Валліса (1655 р.), Деттонвілля (1658 р.), А.І.Барроу (1669 р.), Е.Торрічеллі та Ж.де Роберваля (1644 р.) з введенням зачатків понять про нескінченно малі величини та методи обчислення площ і об'ємів створили сприятливі умови для появи нового числення, яке називається диференціальним та інтегральним численням. Творцями його незалежно один від одного стали І.Ньютон та Г.Лейбніц (1671−1675 рр.). Ньютон основну увагу приділив поняттю похідної як швидкості зміни функції, ввів позначення y'. Лейбніц головний наголос зробив на понятті різниці між значеннями дотичної та функції, позначивши його dy. Позначення Лейбніца dy та Ньютона y' залишилися до наших часів, як основні символи диференціального числення.

Відсутність у створеному численні строгого визначення поняття нескінченно малої величини породила багато критичних статей на адресу числення та неприйняття його математиками світу, незважаючи на успішне практичне та теоретичне його застосування. За образним виразом учня Лейбніца маркіза де Лопіталя, прекрасна будівля числення стоїть на піску, і для доказу своєї теореми, що має назву «правила Лопіталя», як до останнього аргументу, зазначив: "Даю чесне слово дворянина, що ця теорема вірна". У XVIII столітті роботами Ж.Даламбера, С.Гур'єва, Л.Карно почалась інтенсивна побудова фундаменту числення − теорії границь. Тільки математики XIX століття (Г.Кантор, Б.Больцано, К.Вейерштрас, особливо О.Коші) зробили з поняття границі фундамент для послідовної побудови багатоповерхової споруди математичного аналізу.

Подальший розвиток ідей математичного аналізу в XVIII та XIX століттях привів до створення теорії диференціальних рівнянь (термін "диференціальні рівняння" введено Г. Лейбніцем), теорії рядів, функціонального аналізу, варіаційного та операційного числень, теорії функцій комплексної змінної тощо. Великий внесок у розвиток математичних наук, особливо в розвиток теорії ймовірностей та математичної статистики, зробили П.Чебишев, М.Остроградський, М.Лобачевський, А.Марков, М.Лузін, А.Ляпунов, Б.Гнеденко та інші. Ці науки стали математичними в строгому розумінні після аксіоматики Б.Гнеденка.

Методи математичного аналізу широко застосовуються у всіх науках, яким приходиться використовувати математику. Багато господарських задач економіки були розв'язані завдяки диференціальному та інтегральному численню.

Застосування в економіці методів математичного моделювання і створення для її потреб таких дисциплін, як математичне програмування (лінійне, динамічне тощо), дослідження операцій, економетрія, викликали необхідність вивчення таких підрозділів математики , як аналітична геометрія, векторна та лінійна алгебра, теорія ймовірностей та математична статистика.

Вивчення теоретичних основ, підкріплене практичним застосуванням при розв'язуванні задач, дає студентам можливість опанувати економічні дисципліни і в подальшій роботі складати математичні моделі економічних систем, успішно їх розв'язувати і застосовувати на виробництві та в бізнесі.

Посібник розраховано на студентів стаціонарної та заочної форм навчання. Певна категорія студентів має перерву в освіті після закінчення школи і відчуває труднощі у вивченні курсу. Тому в посібник включено матеріал з основних понять елементарної математики, після повторення якого студенти мають можливість опанувати підрозділи курсу вищої математики згідно з програмою.

Грецька абетка

Α α альфа	Η η ета	Ν ν ні (ню)	Σ σ сигма
Β β бета	Θ θтета	Ξ ξ ксі	Τ τ тау
Γ γ гамма	Ι ι йота	Ο ο омікрон	Φ φ фі Ω
Δ δ дельта	Κ κ каппа	Π π пі	Υ ύ іпсилон
Ε ε епсилон	Λ λ лямбда	Ρ ρ ро	Ψ ψ псі
Ζ ζ дзета	Μ μ мі (мю)	Χ χ хі	ω омега

Латинська абетка

A a (*A a*) а	J j (*J j*) йот	S s (*S s*) ес
B b (*B b*) бе	K k (*K k*) ка	T t (*T t*) те
C c (*C c*) це	L l (*L l*) ель	U u (*U u*) у
D d (*D d*) де	M m (*M m*) ем	V v (*V v*) ве
E e (*E e*) е	N n (*N n*) ен	W w (*W w*) дубль-ве
F f (*F f*) еф	O o (*O o*) о	X x (*X x*) ікс
G g (*G g*) же	P p (*P p*) пе	Y y (*Y y*) ігрек
H h (*H h*) аш	Q q (*Q q*) кю	Z z (*Z z*) зет
I i (*I i*) і	R r (*R r*) ер	

Таблиця множення $a \times b$

$a \backslash b$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Таблиця квадратів чисел

Десятки	Одиниці									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Основні математичні позначення

$=$	дорівнює	$a = b$
$\neq$	не дорівнює	$a \neq b$
$\equiv$	тотожньо дорівнює	$a \equiv b$
$\approx$	наближено дорівнює	$a \approx b$
$>$	більше	$a > b$
$<$	менше	$a < b$
$\geq$	більше або дорівнює	$a \geq b$
$\leq$	менше або дорівнює	$a \leq b$
$\vert\ \vert$	модуль	$\vert a \vert$
$\in$	належить	$a \in A$
$\notin$	не належить	$a \notin B$
$\Leftrightarrow$	рівносильно	$a = b \Leftrightarrow b = a$
$\Rightarrow$	слідує	$2a = b \Rightarrow a = 0{,}5b$
$\subset$	включення	$A \subset B$
$\cup$	об’єднання (або)	$c \in A \cup B$
$\cap$	перетин	$c \in A \cap B$
$\sum$	сума	$\sum_{1}^{3} n = 1 + 2 + 3 = 6$
$\parallel$	паралельність	$AB \parallel CD$
$\perp$	перпендикулярність	$AB \perp CD$
$\sim$	подібність	$\Delta ABC \sim \Delta DEF$
$\varnothing$	порожня множина	$x^2 < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$

I. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

§1. Арифметика

Арифметика як наука про числа (від грецького *αριτμοσ* – число) вивчає найпростіші властивості чисел та правила обчислень.

Вся нескінчена множина дійсних чисел (R) складається з підмножин цілих чисел (Z), серед яких виділяються цілі додатні або натуральні числа (N), та дробових чисел, до складу яких входять раціональні та ірраціональні числа. Число 0 (від лат. *nullum* – ніщо) не відноситься до натуральних чисел у повному розумінні слова (ніхто в старовину не казав, що у нього є 0 овець) і складає разом з множиною натуральних чисел розширений натуральний ряд.

Вся множина чисел записується за допомогою цифр (на арабській сифр – пусте місце), для чого спочатку використовували букви алфавітів, а пізніше перейшли до спеціальних значків. ***Цифра − це письмовий знак, який відображає число***.

Найбільш розповсюдженою стала індійська позиційна система запису числа, в якій його величина залежить не тільки від самої цифри, але й від місця її знаходження (позиції). В позиційній десятковій системі числення число 3275 означає 3·1000+2·100+7·10+5. До Європи система потрапила з написаними арабською мовою науковими працями відомого узбецького вченого Мухаммеда з Хорезму і стала називатись арабською. Використовується також римська система, в основному для позначення ювілейних дат, підрозділів книги тощо. Для арифметичних дій використовується зручніша в користуванні ”арабська” система.

Відголосками більш древніх систем людство користується й досі. Наприклад, при поділі часу та кутів використовується вавілонська шістдесяткова система, тому 1 година (як і градус) складається з 60 хвилин. Поділ дня на 12 годин − наслідок дванадцяткової системи.

Дробом називається частина (доля) одиниці або декілька рівних частин одиниці. Якщо розрізати яблуко на 5 рівних частин, то взята одна частина − це дріб $\frac{1}{5}$ або $1/5$, а якщо взяти 2 частини − отримаємо дріб $\frac{2}{5}$ (це означає два з п’яти). Довільний дріб записується як $\frac{m}{n}$, де число над рискою дробу називається чисельником, а під рискою дробу − знаменником. Отже, чисельником дробу $\frac{2}{5}$ є число 2, а знаменником − 5. Якщо $m < n$, то дріб називається правильним ($\frac{2}{5}$ – правильний дріб), а якщо $m \geq n$, то неправильним ($\frac{12}{5}$, $\frac{5}{5}$ − неправильні дроби). Серед неправильних дробів зустрічаються такі, в яких

$m = kn$, тоді $\dfrac{m}{n} = \dfrac{kn}{n} = k -$ціле число. Отже, можемо стверджувати, що множина цілих чисел − це підмножина дробових чисел.

З неправильного дробу можна виділити цілу частину.

Наприклад, $\dfrac{12}{5} = \dfrac{10+2}{5} = \dfrac{10}{5} + \dfrac{2}{5} = 2 + \dfrac{2}{5} = 2\dfrac{2}{5}$. Отримали мішаний дріб.

Якщо нас цікавить тільки величина числа, без урахування його знаку (додатнє воно чи від'ємне), то така величина називається ***модулем*** числа a і позначається $|a|$. Наприклад, $|7| = 7$ і $|-7| = 7$.

Якщо за допомогою відрізка n можемо виміряти довжину відрізка m, то дріб $\dfrac{m}{n}$ називається раціональним (лат. *ratio* − зміст). Наприклад, $\dfrac{12}{5}$, $\dfrac{5}{5}$, $\dfrac{105}{5}$ − раціональні дроби. Якщо довжина відрізка n не може бути мірою довжини відрізка m, то $\dfrac{m}{n}-$число ірраціональне. Так, діаметр кола d не може бути мірою довжини кола: l, бо $\dfrac{l}{d} = \pi$, а $\pi -$ число ірраціональне і наближено дорівнює 3,1415926... . Довжина катета прямокутного рівнобедреного трикутника не може бути мірою довжини гіпотенузи: $a^2 + a^2 = 2a^2$. Тоді гіпотенуза має довжину $a\sqrt{2}$, де $\sqrt{2} \approx 1{,}4142...-$ число ірраціональне.

Довільне ірраціональне число записується у вигляді нескінченого неперіодичного дробу. Періодичний десятковий дріб − є числом раціональним ($0{,}33333... = \dfrac{1}{3}$). Ірраціональні числа діляться на алгебраїчні ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ тощо) та трансцендентні (π − число Піфагора, e − число Ейлера тощо). Будь-який простий дріб можна записати у вигляді десяткового дробу та навпаки. Наприклад, $\dfrac{7}{8} = 0{,}875$, $0{,}125 = \dfrac{1}{8}$.

В арифметиці додати від'ємне число означає відняти його. Тому $a + (-b)$ означає $a - b$: $7 + (-3) = 7 - 3 = 4$. Також $-b + a = a - b$: $-3 + 7 = 7 - 3 = 4$. Відняти від'ємне число означає додати його: $a - (-b) = a + b$, тобто $7 - (-3) = 7 + 3 = 10$.

Знак добутку чисел визначається за схемою:

$$(+a)\cdot(+b) = +ab \qquad (+a)\cdot(-b) = -ab$$

$$(-a)\cdot(-b) = +ab \qquad (-a)\cdot(+b) = -ab$$

Якщо від яблука, яке поділене на 5 частин, взяти спочатку 1 частину, а потім ще 2 частини, то всього взято 3 частини з 5, тому $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$. Отже, ***дроби можна додавати (віднімати) тільки при однакових знаменниках***. Якщо дроби мають різні знаменники, то їх слід перед додаванням зробити однаковими, після чого додати чисельники. Наприклад, якщо треба додати дроби $\frac{2}{7}$ і $\frac{4}{9}$, то попередньо необхідно вирівняти їх знаменники: $\frac{2}{7}=\frac{2\cdot 9}{7\cdot 9}=\frac{18}{63}$ і $\frac{4}{9}=\frac{4\cdot 7}{9\cdot 7}=\frac{28}{63}$.

Тоді $\frac{18}{63}+\frac{28}{63}=\frac{46}{63}$. Це записують: $\frac{2}{7}+\frac{4}{9}=\frac{^{9\diagup}2}{7}+\frac{^{7\diagup}4}{9}=\frac{18+28}{63}=\frac{46}{63}$. Отже, вирівнювання знаменників, тобто зведення дробів до спільного знаменника, обов'язкове.

При множенні дробів окремо перемножуються чисельники і знаменники $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$. Наприклад: $\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{5}=\frac{7\cdot 2}{9\cdot 5}=\frac{14}{45}$.

Множення чисельника і знаменника на одне і те ж число не змінює дріб. Ділення чисельника та знаменника на одне і те ж число (операція скорочення дробу) також дріб не змінює. Пригадуємо, що $\frac{a}{a}=1$. Приклади: $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2}{6}$; $\frac{14}{28}=\frac{2\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 7}=\frac{1}{2}$.

Ділення числа на дріб $\frac{a}{b}$ означає множення цього числа на обернений дріб $\frac{b}{a}$: $\frac{c}{d}:\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{a}=\frac{bc}{ad}$. Наприклад: $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

Якщо множення числа a на число n означає, що число a треба додати само до себе n разів ($a\cdot n=\underbrace{a+a+a+...+a}_{n}$), то піднесення числа a до степеня n означає, що число a треба помножити само на себе n разів.

($a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{n}$), тому в цілому $a\cdot n\neq a^n$ $(3\cdot 2\neq 3^2\Rightarrow 6\neq 3\cdot 3=9)$.

Необхідно пам'ятати, що:

1) $a^0=1$; 2) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$; 3) $a^n\cdot b^n=(ab)^n$; 4) $(a^b)^c=a^{bc}$;

5) $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$; 6) $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$; 7) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$; 8) $a^{b^c}\neq(a^b)^c$

В останній властивості необхідно спочатку зробити дію $b^c=d$, після чого знаходити a^d.

Приклади:

1) $3^0=1$; 2) $3^2\cdot3^3=3^{2+3}=3^5=243$; 3) $2^2\cdot3^2=(2\cdot3)^2=6^2=36$;

4) $(3^2)^2=3^{2\cdot3}=3^6=729$; 5) $\frac{5^3}{2^3}=\left(\frac{5}{2}\right)^3=(2{,}5)^3=15{,}625$; 6) $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$;

7) $\frac{3^5}{3^2}=3^{5-2}=3^3=27$; 8) $2^{2^3}=2^8=256$, тоді як $(2^2)^3=2^6=64$.

Існує степенева форма запису числа:

$300=3\cdot100=3\cdot10\cdot10=3\cdot10^2\Rightarrow300=3\cdot10^2;327=3\cdot100+2\cdot10+7=$ $=3\cdot100+2\cdot\frac{100}{10}+7\cdot\frac{100}{100}=3\cdot100+\frac{2}{10}\cdot100+\frac{7}{100}\cdot100=(3+0{,}2+0{,}07)\cdot100=$ $=(3+0{,}2+0{,}07)\cdot10^2=3{,}27\cdot10^2$. Ця форма запису досить компактна для великих чисел: $2\,000\,000\,000=2\cdot10^9$.

Добування кореня − дія, обернена відносно дії піднесення до степеня: якщо $3^2=9$, то $\sqrt{9}=3$, а якщо $3^3=27$, то $\sqrt[3]{27}=3$. Взагалі $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

Приклад: $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3^{\frac{2}{2}}=3^1=3$, $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$, $\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{2^3}=2^{\frac{3}{5}}$.

Не існує число a, яке при множенні на a дорівнює $-a^2$: $a\cdot a=a^2$ і $(-a)\cdot(-a)=a^2$), тому $\sqrt{-a^2}$ не існує. Взагалі для всіх парних степенів корені від'ємних чисел не існують. Разом з тим, $(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27$, тому $\sqrt[3]{-27}=-3$. Отже, корені непарного степеня від'ємних чисел існують.

Арифметичним коренем називається невід'ємне значення кореня: $\sqrt[n]{a^n}=|a|$. Наприклад, $\sqrt{3^2}=|3|=3$ і $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$. Отже, $\sqrt{9}=3$, а не ±3.

Необхідно пам'ятати, що:

1. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, де $a\ge0,b\ge0$;

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, де $a\ge0$, $b>0$;

3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$, де $a\ge0$;

4. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$, де $a\ge0$;

5. $\sqrt[n]{a^n\cdot b}=|a|\cdot\sqrt[n]{b}=a\cdot\sqrt[n]{b}$, де $a\ge0,b\ge0$.

Якщо існує два рівних по величині відношення чисел, то вони утворюють про пропорцію. Якщо $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ рівні між собою, то $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ − пропорція, з якої знаходиться будь-яке з чисел. Наприклад, $\frac{a}{3}=\frac{7}{5}\Rightarrow a\cdot5=7\cdot3\Rightarrow a=\frac{21}{5}$.

Величини a і b називаються пропорційними, якщо іх відношення не змінюється: $\frac{a}{b}=k$. Якщо зростання величини a збільшує величину b, то їх відношення прямо пропорційне, а якщо зростання a супроводжується зменшенням b, то маємо обернену пропорційність (тоді $a \cdot b = k$).

Відсотком або процентом (лат. pro cento − від сотні) називається сота частина будь-якої величини і позначається %. Наприклад, 2% від 1000 гривень складає 20 гривень. Банківські нарахування на внески абонентів проводяться за формулою складених відсотків:

$$N = N_0(1+0{,}01p)^n, \qquad (0.1)$$

де N_0 – початковий внесок, p – банківський відсоток, n – термін зберігання грошей в банку.

§2. Алгебра

Засновником алгебри як науки про розв’язок рівнянь вважається Мухаммед аль-Хваризмі (Хорезмійський), який в IX ст. написав математичну працю під назвою ”Книга відновлення та протиставлення” (на арабській аль-джебр означає відновлення). Франсуа Вієт та Рене Декарт ввели в алгебру буквенні позначення та символіку (XVI−XVII ст.), які в основному використовуються й сьогодні.

Основні правила та співвідношення

1. *Множення многочленів*:

$$(a+b)(c+d+e) = a(c+d+e) + b(c+d+e) = ac+ad+ae+bc+bd+be.$$

2. *Ділення многочлена на число*:

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}.$$

3. *Формули скороченого множення*:

а) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$;

б) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a^n \pm b^n)^2 = a^{2n} \pm 2a^n b^n + b^{2n}$;

в) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

г) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

$a^{3n} \pm b^{3n} = (a^n \pm b^n)(a^{2n} \mp a^n \cdot b^n + b^{2n})$;

$a+b=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})$;

$a-b=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})$.

4. *Біном Ньютона*:

$$(a+b)^n = a^n + A_1 a^{n-1}b + A_2 a^{n-2}b^2 + \ldots + A_{n-1}ab^{n-1} + b^n, \qquad (0.2)$$

де біноміальні коефіцієнти $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ знаходяться за так званим трикутником Паскаля , відомим китайцям ще з XIII ст. і повторно відкритим у Європі Штихелем на 250 років пізніше.

n	коефіцієнти
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

У кожному з рядків трикутника крайні числа повторюються, а числа всередині утворюються додаванням сусідніх чисел попереднього рядка.

Розкладання $(a-b)^n$ відрізняється від розкладання $(a+b)^n$ тільки почерговою зміною знака: за кожним знаком «+» слідує знак «–» та навпаки. Наприклад, $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.Сума степенів у всіх добутках ab завжди співпадає зі степенем бінома.

Дії додавання, віднімання, множення та ділення алгебраїчних дробів аналогічні діям з числовими дробами. Наведемо приклади:

1) $\dfrac{a+b}{a-b} \pm \dfrac{c+d}{c-d} = \dfrac{(a+b)(c-d) \pm (c+d)(a-b)}{(a-b)(c-d)}$.

2) $\dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{c+d}{c-d} = \dfrac{(a+b)(c+d)}{(a-b)(c-d)}$.

3) $\dfrac{a+b}{a-b} : \dfrac{c+d}{c-d} = \dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{c-d}{c+d} = \dfrac{(a+b)(c-d)}{(a-b)(c+d)}$.

5. *Модуль числа*:

$|a| = a$ при $a \geq 0$ і $|a| = -a$ при $a < 0$. Наприклад: $|5| = 5$ і $|-5| = -(-5) = 5$.

Властивості модуля:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$;
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$;
3. $|a| \geq 0$;
4. $|a| = |-a|$;
5. $|a|^2 = a^2$.

Виразом називається сукупність дій, які необхідно виконати в певному порядку над деякими величинами для отримання значення об'єкта . Якщо у виразі використовується скінчена кількість дій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня, то такі вирази називаються алгебраїчними. Якщо у цих виразах добування кореня відсутнє, то вони називаються раціональними, а якщо корінь присутній − то ірраціональними. Так,

$\dfrac{a-b}{a+b}$ − раціональний вираз, а $\dfrac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$ − ірраціональний.

Якщо прирівнюються один до одного два вирази, то отримаємо ***рівність***. Якщо ця рівність справедлива при всіх значеннях її величин, то вона називається ***тотожністю***. Наприклад, рівність $2x-3 \equiv 2x-3$ задовольняється при всіх значеннях змінної, тому вона утворює тотожність.

Якщо рівність задовольняється не при всіх значеннях величин, то вона називається ***рівнянням***. Наприклад, рівність $2x+3=5$ задовольняється тільки при $x=1$ і тому називається рівнянням.

Найвищий степінь невідомої величини в рівнянні вказує на його порядок. Наприклад, $x^3+3x^2+5x-9=0$ є рівнянням третього порядку. Число розв'язків рівняння не може перевершувати його порядок.

Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$ називається ***квадратним рівнянням*** і має розв'язки:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \text{ де } b^2-4ac\geq 0 \tag{0.3}$$

Вираз b^2-4ac називається дискримінантом.

Якщо квадратне рівняння можна подати у вигляді $ax^2+2bx+c=0$, то його розв'язки обчислюють за формулою:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}, \text{ де } b^2-ac\geq 0 \tag{0.4}$$

Якщо квадратне рівняння має вигляд $x+2px+q=0$, то його розв'язки:

$$x_{1,2}=-p\pm\sqrt{p^2-q}, \text{ де } p^2-q\geq 0 \tag{0.5}$$

Використання формул розв'язків для рівнянь, що мають вигляд (0.4) та (0.5), дає можливість значно спростити обчислення.

Наприклад, рівняння $x^2-18x-243=0$ можна розв'язати за формулою $x_{1,2}=\dfrac{18\pm\sqrt{18^2+4\cdot 243}}{2}$. Але задане рівняння має вигляд (1.5), тому $x_{1,2}=9\pm\sqrt{9^2+243}$, що обчислюється набагато простіше.

Якщо дискримінант дорівнює нулю, то квадратне рівняння є повним квадратом, для якого $x_1=x_2$.

Теорема Вієта: Якщо x_1 та x_2 − корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то правильною є рівність:

$$\begin{cases} x_1x_2=\dfrac{c}{a} \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \end{cases} \qquad (0.6)$$

Наприклад, рівняння $x^2-5x+4=0$ має корені $x_1=2$ і $x_2=3$, бо $x_1x_2=6$ і $x_1+x_2=5$.

Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$ називаються біквадратними і зводяться до квадратних заміною $x^2=t$. Аналогічно розв'язуються рівняння виду $ax^6+bx^3+c=0$ заміною $x^3=t$ і т. д. Взагалі для рівнянь виду $ax^{2n}+bx^n+c=0$ застосовується заміна $x^n=t$,звідки $at^2+bt+c=0$.

Алгебраїчні нерівності

Нерівність $a>b$ називається строгою, а нерівність $a\geq b$ − нестрогою.

Властивості нерівностей:

1. Якщо $a\geq b$, то $b\leq a$.
2. Якщо $a>b$ і $b>c$, то $a>c$.
3. Якщо $a>b$, то $a+c>b+c$.
4. Якщо $a>b$, то $ka>kb$ при $k>0$.
5. Якщо $a>b$, то $ka<kb$ при $k<0$.

Якщо нерівності містять квадратичний вираз ax^2+bx+c (розглядаємо випадок, коли $a>0$; якщо $a<0$, то множенням нерівності на «−1» переходимо до випадку, коли $a>0$), то при від'ємному дискримінанті нерівність $ax^2+bx+c>0$ для всіх значень x.

Якщо $D=0$, то ax^2+bx+c є повним квадратом, тому нерівності

$ax^2+bx+c>0$ і $ax^2+bx+c<0$ задовольняються для $x\in R$, крім однієї точки $x=x_0$, для якої задовольняється умова $ax^2+bx+c=0$.

Якщо $D>0$, то для $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$, а для $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow x\in(x_1;x_2)$, де x_1 та x_2 − корені рівняння (1.3).

Якщо нерівність третього порядку перетворюється в рівняння при значеннях x_1, x_2, x_3, то її можна записати як $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)>0$ або $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)<0$. Для розв'язування нерівностей зручно застосувати метод інтервалів.

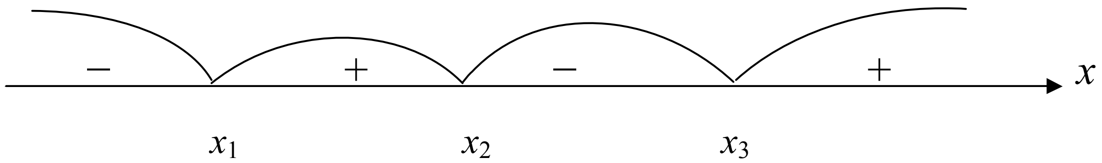


Рис. 0.1.

На різних інтервалах отримаємо різні знаки, тому для множення за схемою $(+)(+)(+)$ та $(-)(+)(-)$ отримаємо, що нерівність >0, а за схемою $(-)(-)(-)$ та $(-)(+)(-)$ – що <0.

Метод інтервалів аналогічно можна застосувати й до нерівностей довільного порядку.

Приклад: $(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)>0$

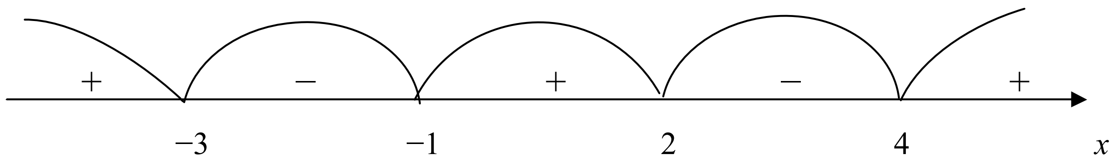


Рис. 0.2.

З рис. 2 видно, що нерівність задовольняється, якщо $x \in (-\infty;-3) \cup$ $\cup (-1;2) \cup (4;+\infty)$.

Послідовності та прогресії

Числовою послідовністю називається множина нумерованих чисел, кожне із значень якої знаходиться за її порядковим номером. Наприклад, послідовність $a_n = 2n$ має вигляд: 2; 4; 6; 8; …; 200; …1000; … .

Арифметичною прогресією називається така числова послідовність, у якої наступний член відрізняється від попереднього на деяку сталу d, що називається різницею прогресії. Якщо $d>0$, то прогресія зростає, а якщо $d<0$, то прогресія спадна. Вона має вигляд: $a_1;a_2;a_3;.....a_n;...$ або $a_1;a_1+d;a_1+2d;$ $a_1+3d;....a_1+(n-1)d;...$. Наприклад, якщо $a_1 = 2$, $d = 3$, то маємо арифметичну прогресію: 2; 5; 8; 11; 14;… .

Загальний член прогресії a_n знаходиться за формулою: $a_n = a_1 + d(n-1)$, а сума перших n членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n \qquad (0.7)$$

Геометричною прогресією називається така числова послідовність, кожен наступний член якої відрізняється від попереднього в q разів. Величина q називається знаменником прогресії. Геометрична прогресія має вигляд:

$$a_1;a_1q;a_1q^2;a_1q^3;a_1q^4....$$

Сума перших n членів прогресії знаходиться за формулою:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}. \qquad (0.8)$$

Для нескінченно спадної прогресії ($q < 1$): $S = \frac{a_1}{1-q}$. (0.9)

<u>Наприклад</u>, геометрична прогресія 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; …, знаменник якої $q = \frac{1}{2}$, має суму $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

§3. Функція. Класифікація функцій.

Функцією називають відповідність між елементами двох множин *x* та *y*, при якій кожному елементові першої множини *x* відповідає не більше одного елемента *y* другої множини. Наприклад: $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x + 2$.

Змінна *x* називається незалежною змінною, або аргументом, а змінна ***y*** – залежною змінною, або функцією; під символом $y = f(x)$ розуміють те правило, за яким кожному *x* відповідає *y,* або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Множина всіх тих елементів з *X*, для яких є відповідні елементи множини *У*, називається ***областю визначення***, а множина всіх тих елементів з *У*, що відповідають елементам з *X*, − ***областю значень*** даної функції.

<u>Приклад:</u> Для функції $y = x + 4$ область визначення – всі дійсні числа: $x \in R$. Область значень – це також множина всіх дійсних чисел: $y \in R$.

Для функції $\acute{o} = \frac{4}{\tilde{o}}$ область визначення $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, область значень $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

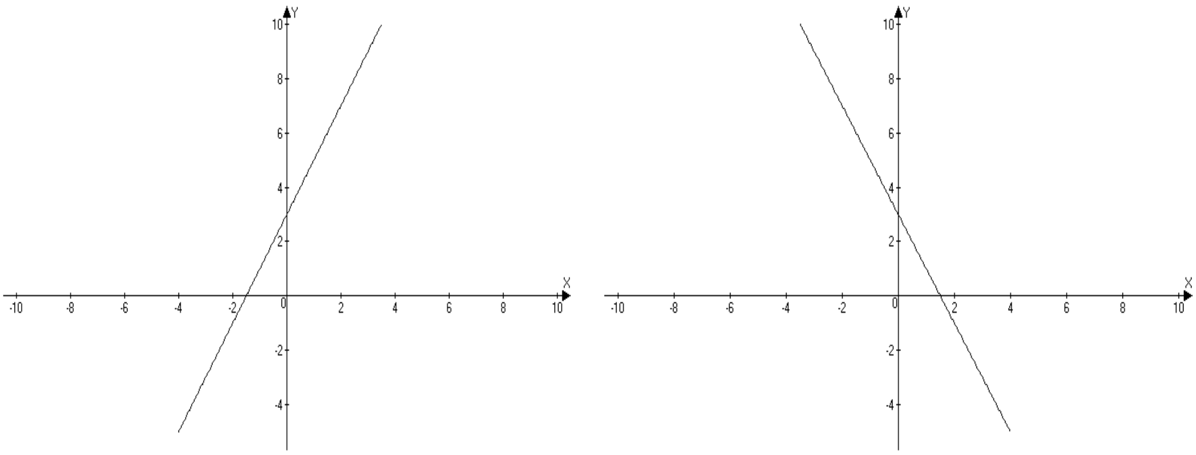
Графіком функції *f* називається множина точок (*x;y*) на координатній площині, таких, що перебігають всю множину D(*f*), а $y = f(x)$.

Лінійна функція

Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою $y = ax + b$, де *x* – аргумент, *a* і *b* – будь-які числа.

1. Область визначення: $\mathrm{x} \in (-\infty;+\infty)$.
2. Область значень: $\mathrm{y} \in (-\infty;+\infty)$.
3. При а > 0 функція зростає, при а < 0 – спадає.

Графіком функції є пряма. Для побудови графіка необхідно мати дві точки.



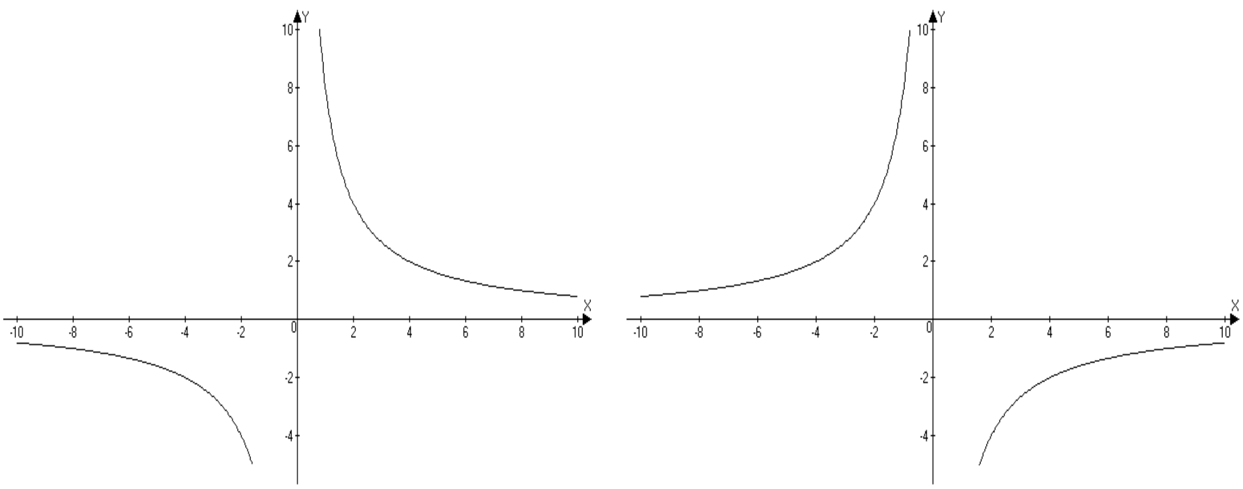
$a > 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $a < 0$

Рис. 0.3.

Обернена пропорційність

Змінну y називають ***обернено пропорційною*** до змінної x, якщо відповідні значення цих змінних зв'язані рівністю $y = \dfrac{k}{x}$, де k – якесь дійсне число, відмінне від нуля. Число k називають коефіцієнтом оберненої пропорційності. Жодна з змінних не може набувати значення 0.

1. Область визначення: $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
2. Область значень: $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
3. При $k>0$ функція спадає, при $k<0$ – зростає на всій області визначення.



$k>0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $k<0$

Рис. 0.4.

Графіком цієї функції $y = \dfrac{k}{x}$ є крива, що складається з двох гілок. Цю криву називають гіперболою.

Зауважимо, що графіками функцій $y = \frac{1}{x} + 3$, $y = \frac{3}{x-2}$, $y = \frac{x+3}{x-2}$ теж є гіперболи, однак вони – необернено пропорційні. Це приклади дробово-раціональних функцій. Обернена пропорційність є найпростішим випадком дробово-раціональних функцій.

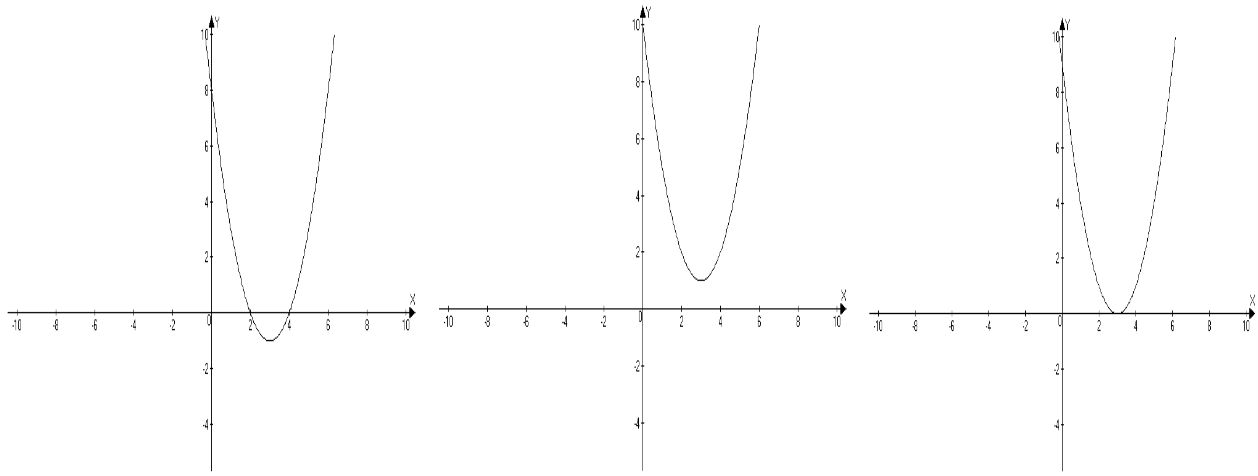
Квадратична функція

Квадратичною називають функцію, яку можна задати формулою $y=ax^2+bx+c$, де x – змінна, $a \neq 0$, b і c – числа.

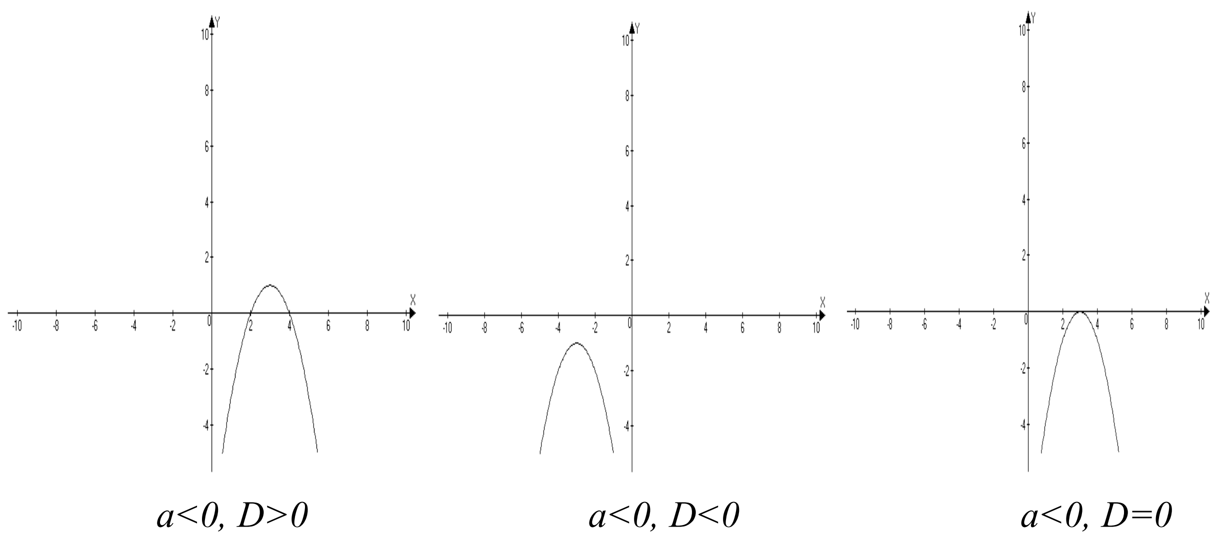
1. Область визначення: $x \in (-\infty;+\infty)$.

2. Область значень: $y \in (-\infty;+\infty)$.

Графіком квадратичної функції є парабола, її гілки напрямлені вгору, якщо a>0, гілки напрямлені вниз, якщо $a < 0$. Вершина цієї параболи має координати $\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$.



a>0, D>0 *a>0, D<0* *a>0, D=0*



a<0, D>0 *a<0, D<0* *a<0, D=0*

Рис. 0.5.

Якщо дискримінант квадратного тричлена ax^2+bx+c додатній, парабола перетинає вісь абсцис у двох точках, що є коренями рівняння: $ax^2+bx+c=0$. Якщо дискримінант дорівнює 0, то графік функції дотикається до осі абсцис, причому абсциса дотику є коренем рівняння $ax^2+bx+c=0$. Якщо дискримінант від'ємний, то графік функції не перетинає вісь абсцис.

Показникова функція

Функція має вигляд: $y=a^x$, де $a>0$, $a\neq 1$ (рис. 6). Якщо $a<1$, то її графік співпадає з графіком функції $y=a^{-x}$, де $a>1$, бо $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$.

Властивості показникової функції:

1. Область завдання: $x\in(-\infty;+\infty)$.
2. Область значень: $y\in(0;+\infty)$.
3. $a^b>a^c$ при $a>1$, якщо $b>c$.
4. $a^b<a^c$ при $a<1$, якщо $b>c$.
5. Перехід до іншої основи: $a^x=b^{x\log_b a}$.

Показникову функцію ще називають експоненціальною (лат. exponere − показувати).

З властивостей 1 і 2 робимо висновок: показникова функція відображає всю множину дійсних чисел на множину додатних дійсних чисел.

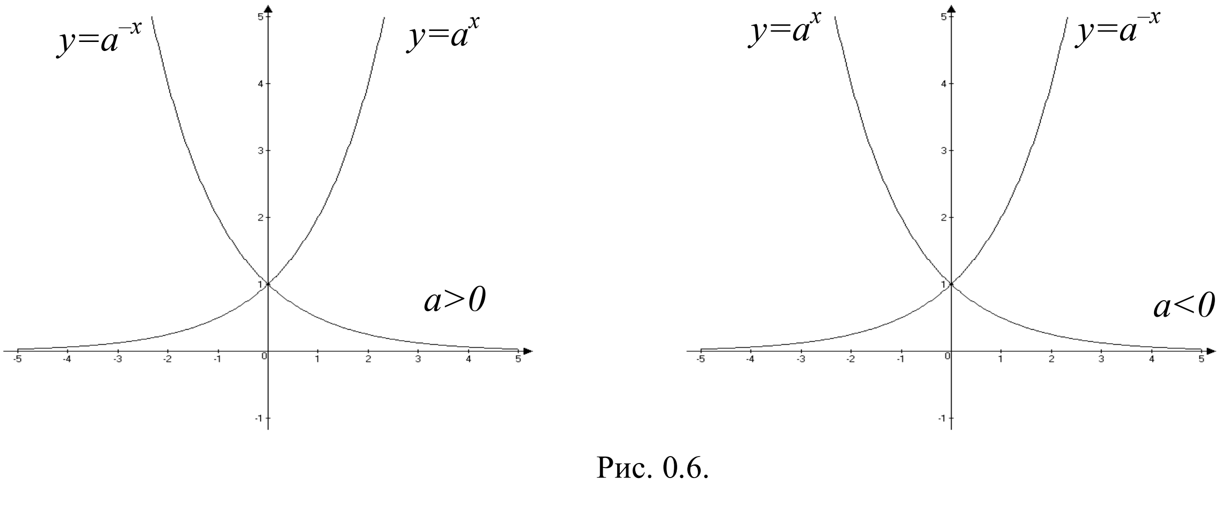


Рис. 0.6.

Логарифмічна функція

Якщо $a^x=y$, то $x=\log_a y$. Бажаючи, як завжди, мати функцію у вигляді $y=f(x)$, поміняємо змінні x та y місцями і отримаємо логарифмічну функцію $y=\log_a x$, де $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$, $x>0$. Зі сказаного слідує простий спосіб побудови графіка логарифмічної функції: графік показникової функції необхідно повернути проти годинникової стрілки на 90° (заміна місцями змінних x та y), після чого повернути його на 180° навколо вертикальної осі для надання горизонтальній осі напрямку зліва направо (рис. 0.7).

Саме слово логарифм (від грецького logos + arithmos − відношення до числа) в математиці означає показник степеня, до якого треба піднести основу a для отримання даного числа.

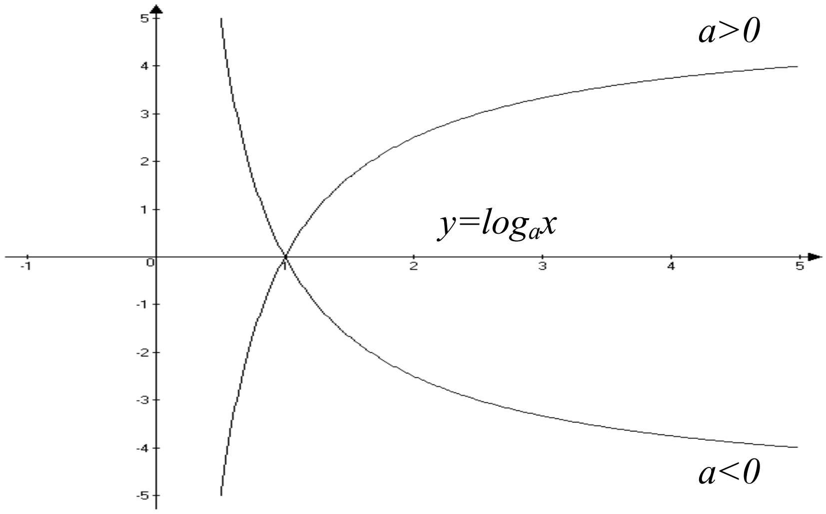


Рис. 0.7.

Властивості логарифмів:

1. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$.

2. $\log_a \dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$.

3. $\log_a b^c = c\log_a b,\ b>0$.

4. $\log_{a^n} b=\dfrac{1}{n}\log_a b$.

5. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ – формула переходу до другої основи.

Властивості логарифмічних функцій:

1. Функція визначена для всіх $x>0$.
2. Область значень функції: $y\in(-\infty;+\infty)$.
3. З ростом аргументу функція зростає при $a>0$ і спадає при $a<0$.
4. Функція додатна для $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ a>1\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(0;1)\\ a\in(0;1)\end{cases}\end{array}\right.$ і від'ємна для $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ a\in(0;1)\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(0;1)\\ a>1\end{cases}\end{array}\right.$.

Показникові та логарифмічна функції взаємно обернені.

Залежно від основи для логарифмів існують спеціальні позначення для двох випадків: $\log_{10}x=\lg x$ (десятковий логарифм) та $\log_e x=\ln x$ (натуральний логарифм).

§4. Геометрія

Геометрія (гр. Γεομετρια − землемірство, Гея − богиня Землі у древніх греків) вивчає просторові властивості предметів, незважаючи на інші ознаки і поділяється на планіметрію (лат.planum − поверхня) та стереометрію (гр. στερεοσ − просторовий).

I. Планіметрія

Основні співвідношення в трикутниках:

1. Прямокутний трикутник:

$c^2 = a^2 + b^2$; $S = \frac{1}{2}ab$; $a = c\sin\alpha = c\cos\beta$.

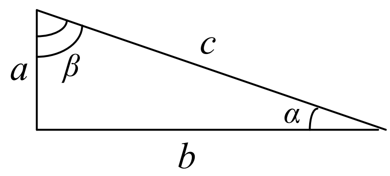


Рис. 0.8.

2. Рівнобедрений трикутник:

$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$; $S = \frac{1}{2}ah_a$; $S = \frac{1}{2}b^2\sin(180 - 2\alpha)$;

$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

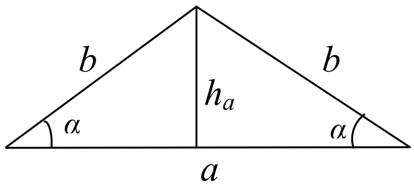


Рис. 0.9.

3. Рівносторонній трикутник:

$\alpha = 60^\circ$; $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

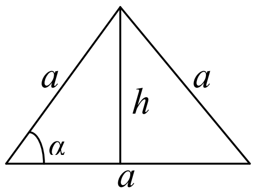


Рис. 0.10.

4. Довільний трикутник:

$h = b\sin(180 - (\alpha + \beta)) = c\sin\alpha$;

медіана: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\beta}$;

$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$; $S = rp = \frac{abc}{4R}$;

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

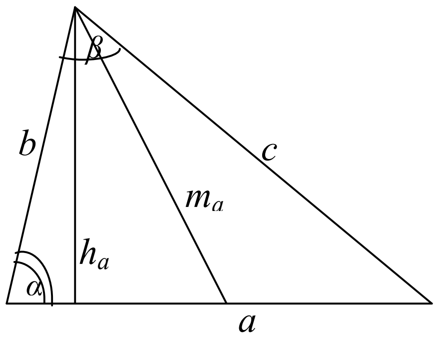


Рис. 0.11.

Теорема синусів:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

Теорема косинусів:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

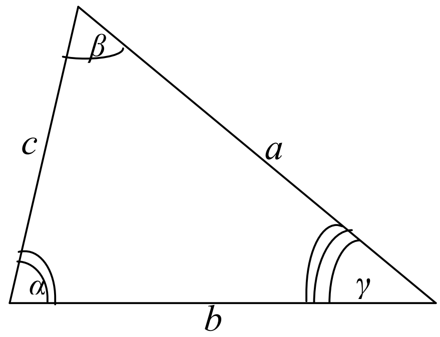


Рис. 0.12.

Основні співвідношення в чотирикутниках:

1. Квадрат:

$$S=a^2;\ d=a\sqrt{2}.$$

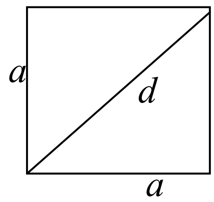


Рис. 0.13.

2. Прямокутник:

$$S=ab;\ d=\sqrt{a^2+b^2}.$$

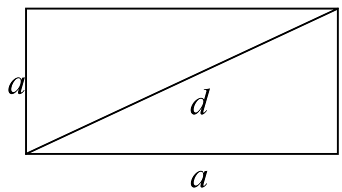


Рис. 0.14.

3. Ромб:

$$S=\frac{d_1d_2}{2}=ah=a^2\sin\alpha;\ d_1^2+d_2^2=4a^2;$$

$$d_1=2a\sin\frac{\alpha}{2};\ d_2=2a\cos\frac{\alpha}{2}.$$

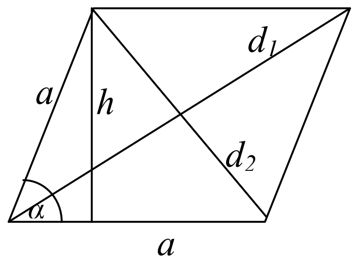


Рис. 0.14.

4. Паралелограм:

$$S=ah=ab\sin\alpha;$$

$$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2).$$

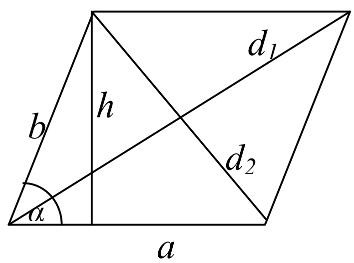


Рис. 0.15.

5. Трапеція:

$$S=\frac{a+b}{2}h=c\cdot h\text{, де } c=\frac{a+b}{2}.$$

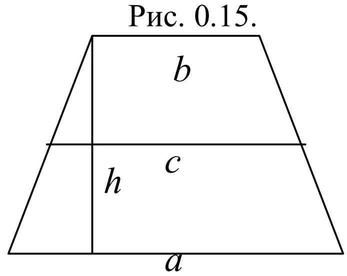


Рис. 0.16.

6. Довільний чотирикутник:

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$; $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$.

Якщо $a + c = b + d$, то в чотирикутник можна вписати коло.

Якщо $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$, то навколо чотирикутника можна описати коло, площа чотирикутника буде: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

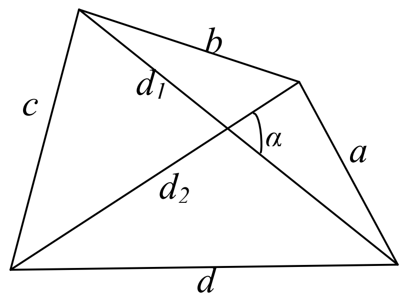


Рис. 0.17.

Коло:

Довжина кола радіуса R: $l = 2\pi R$.

Площа круга: $S = \pi R^2$.

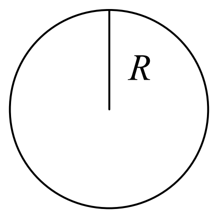


Рис. 0.18.

II.Стереометрія

Многогранники

Усі многогранники − це тіла, обмежені площинами. Введені позначення: V – об'єм тіла, S – площа повної поверхні, S_0 – площа основи, $S_б$ – площа бічної поверхні, h – висота.

1. Призма − це тіло, основи якого − рівні многокутники, а бічні грані − паралелограми. Якщо ребра перпендикулярні до площини основи, то призма називається прямою. Якщо пряма призма в основі має правильні многокутники, то вона називається правильною.

Тоді $V = S_0 h$; $S = S_б + 2S_0$.

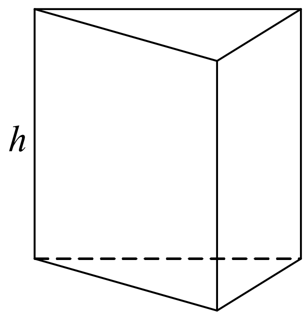


Рис. 0.19.

2. Паралелепіпед − це призма, основами якої є паралелограми. Прямий паралелепіпед, основи якого утворені прямокутниками, називається прямокутним з ребрами a, b, c. В такому паралелепіпеді всі діагоналі d рівні між собою і задовольняють умову: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. $V = abc$, $S = 2(ab + bc + ac)$.

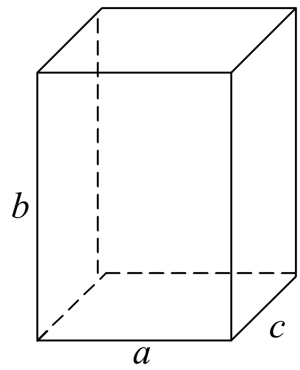


Рис. 0.20.

3. Куб − це прямокутний паралелепіпед, у якого $a = b = c$, $d^2 = 3a^2$,
$V = a^3$, $S = 6a^2$.

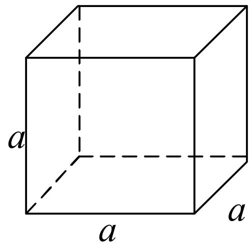


Рис. 0.21.

4. Піраміда − це тіло, основа якого − многокутник, а бічні грані − трикутники, що збігаються в одній вершині, для неї $V = \frac{1}{3} S_0 h$.

Висота будь-якої бічної грані називається *апофемою*. Якщо основа піраміди − правильний многокутник, а висота проходить через центр основи, то піраміда називається правильною, а її бічні грані − рівнобедрені трикутники. Для такої піраміди $S_б = \frac{1}{2} p \cdot l$, де p – периметр основи, l – апофема.

Якщо всі грані і основа рівносторонні трикутники, то піраміда називається тетраедром.

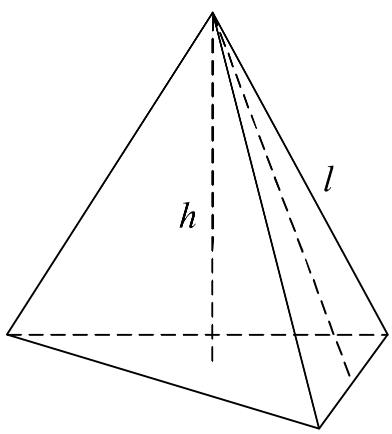


Рис. 0.22.

Тіла обертання:

1. Круговий циліндр − тіло, основа якого − круг радіусом R, а твірна перпендикулярна до площини основи. $S_б = 2\pi Rh$; $S - 2\pi R(R+h)$; $V = \pi R^2 h$.

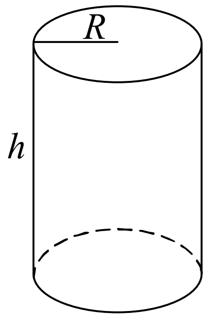


Рис. 0.23.

2. Круговий конус − тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо одного з катетів. $S_б = \pi Rl = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$, де l − твірна; $S = \pi R(R+h)$; $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

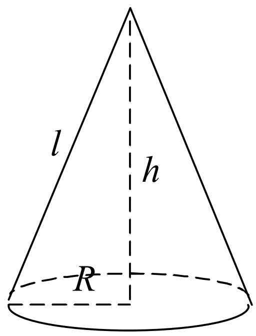


Рис. 0.24.

3. Куля − тіло, утворене обертанням круга навколо діаметра.
$S = 4\pi R^2$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

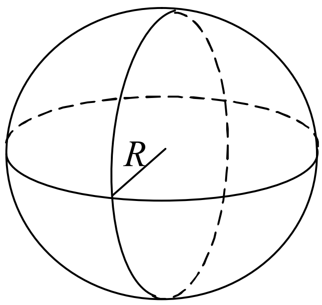


Рис. 0.25.

§5. Тригонометрія

Тригонометрія (гр. Τριγουου − трикутник + μετρεζισ − вимірювання) – це наука, що вивчає способи вимірювання геометричних розмірів на основі неалгебраїчного співвідношення між величинами кутів та сторін трикутника.

Одна дев'яноста частина прямого кута називається градусом (1°). Якщо $\angle\alpha$ опирається на дугу $\overset{\frown}{AB}$ (рис.10), довжина якої дорівнює радіусу, то його величина дорівнює одному радіану.

Одна сота частина прямого кута в міжнародній системі одиниць *SI* називається градом. $360^\circ = 400$ град. Прямий кут складає $\frac{\pi}{2}$ радіан. $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ *ðàä³àí* $\approx 0{,}017453$. 1 *ðàä³àí* $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44{,}8''$.

Синусом (лат. sinus − затока) кута α називається відношення BC до радіуса кола (рис. 7): $\sin\alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{R}$.

Косинусом (лат. co − при +sinus − затока) кута α називається відношення OC до радіуса кола: $\cos\alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{R}$.

Тангенсом (лат. tangens − дотична) кута α називається відношення дотичної AD, що спирається на кут α, до радіуса кола: $tg\alpha = \frac{AD}{AO} = \frac{AD}{R}$.

Котангенсом кута α називається відношення радіуса кола до дотичної, на яку спирається кут α: $ctg\alpha = \frac{AO}{AD} = \frac{R}{AD} = \frac{1}{tg\alpha}$.

Величини $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$ − математичні символи, що означають певні поняття, тому неправильно вважати, що, наприклад, між знаками sin та α існує дія множення ($\sin\alpha$ − це єдиний і нероздільний символ).

Побудовані на колі (рис. 7) трикутники OBC та OAD прямокутні, тому можемо стверджувати, що відношення протилежного до кута α катета до гіпотенузи утворює $\sin\alpha$, відношення прилеглого до кута катета до гіпотенузи утворює $\cos\alpha$, відношення протилежного катета до прилеглого − $tg\alpha$ і відношення прилеглого катета до протилежного − $ctg\alpha$. Поняття тригонометричних функцій кута α побудовані на колі, тому нази-ваються круговими тригонометричними функціями.

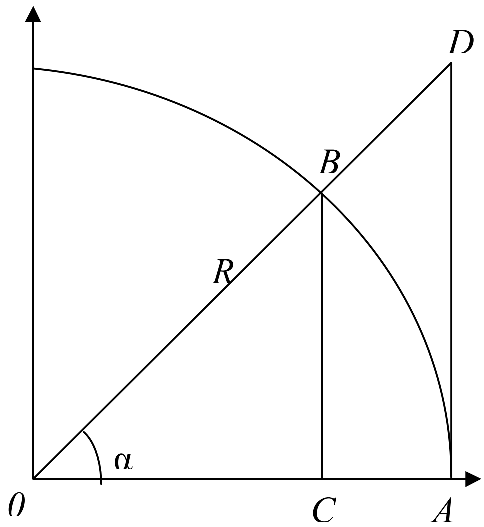


Рис. 0.26.

Якщо $R = 1$, то $\sin\alpha = BC$; $\cos\alpha = OC$; $tg\alpha = AD$; $ctg\alpha = \frac{1}{AD}$. За теоремою Піфагора $BC^2 + OC^2 = OB^2 \Rightarrow BC^2 + OC^2 = R^2 \Rightarrow (\frac{BC}{R})^2 + (\frac{OC}{R})^2 = 1 \Rightarrow$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (1.10)$$

Отримали теорему Піфагора в тригонометричній формі.

В першій чверті кола всі тригонометричні функції додатні. Знаки функцій в різних чвертях показано на рис. 8.

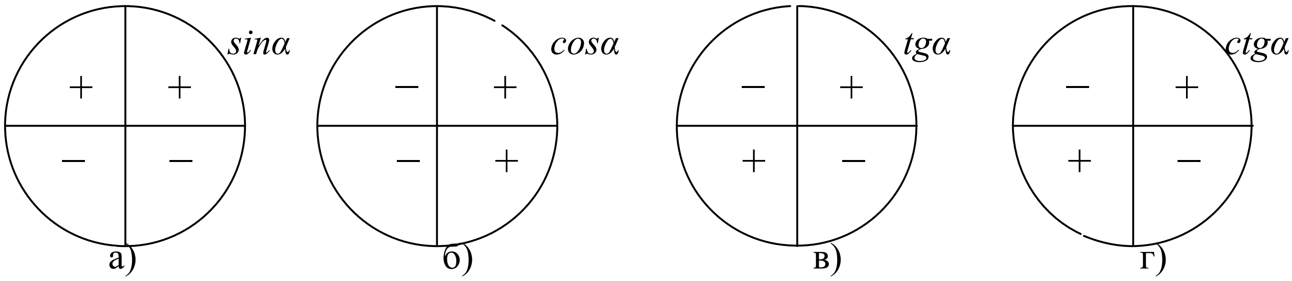


Рис. 0.27.

Кут $720^\circ = 2 \cdot 360^\circ$ означає, що зроблено два повних оберти. Напрямок обертання − проти годинникової стрілки (рис. 9). Кут, що відноситься до першого оберту, є головним значенням кута.

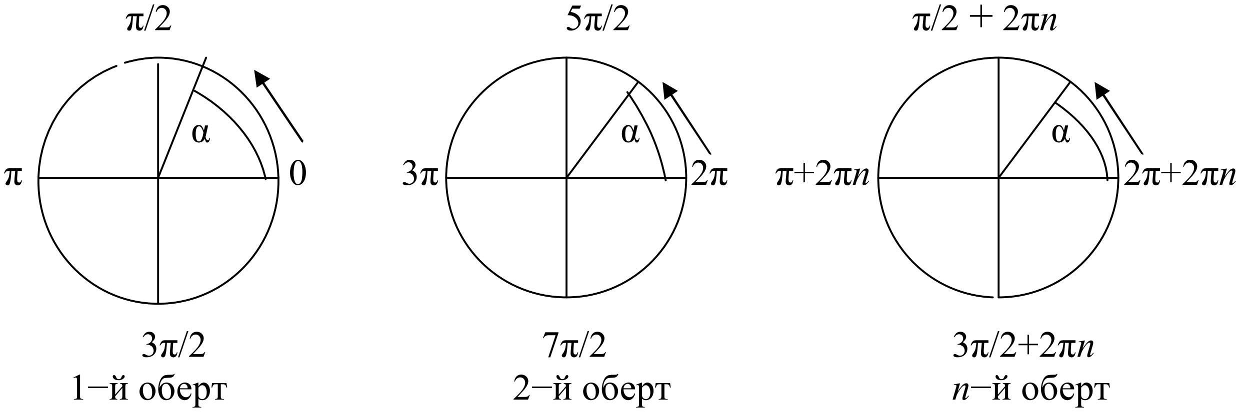


Рис. 0.28.

Значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ та $ctg\alpha$ змінюються зі зміною кута α, тому вони утворюють тригонометричні функції $\sin x$, $\cos x$, tgx та $ctgx$.

Область значень тригонометричних функцій: $\sin x \in [-1;1]$; $\cos x \in [-1;1]$; $tgx \in (-\infty;+\infty)$; $ctgx \in (-\infty;+\infty)$.

Значення тригонометричних функцій для кутів 0°, 30°, 45°, 60°, 90°:

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує
$ctg\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Формули зведення:

Для знаходження значень тригонометричних функцій будь-якого кута застосовують так звані формули зведення, які дають можливість виразити тригонометричні функції через їх значення в першій чверті.

Якщо задана тригонометрична функція кута $\beta = \pi n \pm \alpha$, то функція не змінюється, а її знак знаходиться згідно з рис. 9.

<u>Приклад:</u> $\sin(5\pi + \alpha)$. Число 5 − ціле, тому функція не змінюється. Кут $5\pi + \alpha = 2 \cdot 2\pi + \pi + \alpha$, тобто зроблено два повних оберти, а кут після цього складає $\pi + \alpha$. Отже, гострий кут α знаходиться в третій чверті, де синус має від'ємне значення. Тому $\sin(5\pi + \alpha) = -\sin\alpha$.

Якщо $\beta = \frac{\pi}{2} n \pm \alpha$, то функція змінюється: синус на косинус, тангенс на котангенс та навпаки, а знак функції знаходиться згідно з рис. 9.

Приклад: $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{4\pi + 3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$. Маємо кут $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, тобто кут α знаходиться в четвертій чверті. Функція змінюється з косинуса на синус, від'ємний в четвертій чверті, тому $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$.

Формули зведення можна подати в узагальненій таблиці:

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$ctg\alpha$
$ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$tg\alpha$

Основні співвідношення:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$; $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Формули суми та різниці кутів:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$; $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$;

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$; $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$; $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$.

Формули подвійних та половинних кутів:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$;

$\sin\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$; $tg\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Зауваження. Поняття подвійних чи половинних кутів досить умовні. Будь-який кут можна вважати як половинним, так і подвійним. Наприклад, $\sin 4\alpha = \sin 2\beta$, де $\beta = 2\alpha$, або $\sin 4\alpha = \sin\frac{1}{2}\beta$, де $\beta = 8\alpha$.

Сума та різниця тригонометричних функцій:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$tg\alpha + tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; $tg\alpha - tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$;

$ctg\alpha + ctg\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$; $ctg\alpha - ctg\beta = -\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

Добуток тригонометричних функцій

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)).$$

Обернена дія знаходження величини кута за відомими тригонометричними функціями дає обернені тригонометричні функції: $\arcsin a$, $\arccos a$, $arctga$, $arcctga$ (лат. *arcus* − дуга).

$$\alpha = \arcsin a \Rightarrow \sin\alpha = a, \quad \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right];$$

$$\alpha = \arccos a \Rightarrow \cos\alpha = a, \ \arccos a \in [0;\pi];$$

$$\alpha = arctga \Rightarrow tg\alpha = a, \quad arctga \in (\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2});$$

$$\alpha = arcctga \Rightarrow ctg\alpha = a, \quad arcctga \in (0;\pi).$$

Графіки тригонометричних функцій

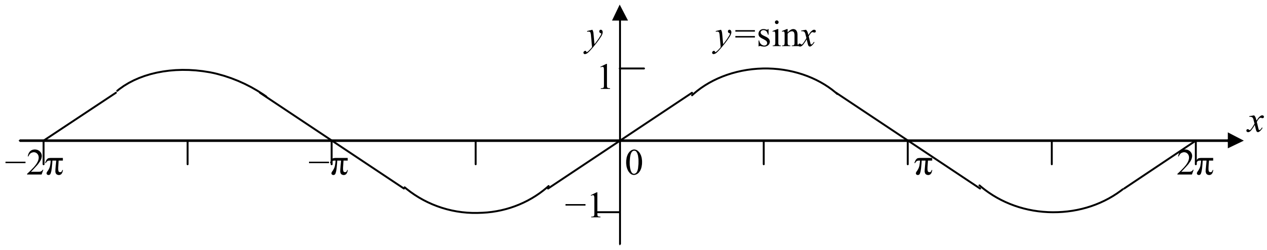


Рис. 0.29.

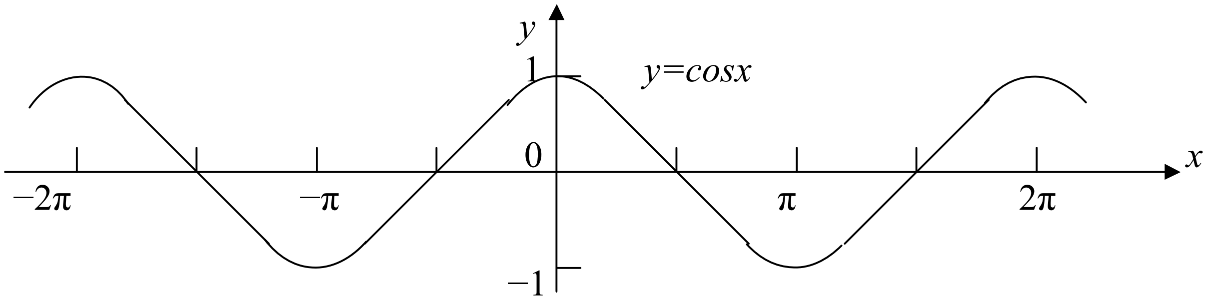


Рис. 0.30.

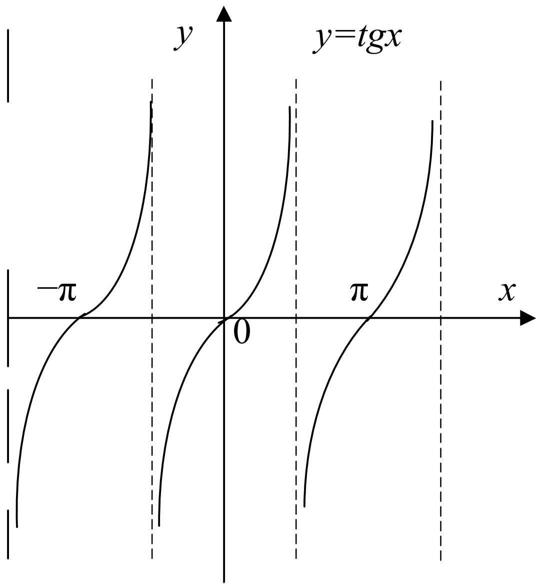


Рис. 0.31.

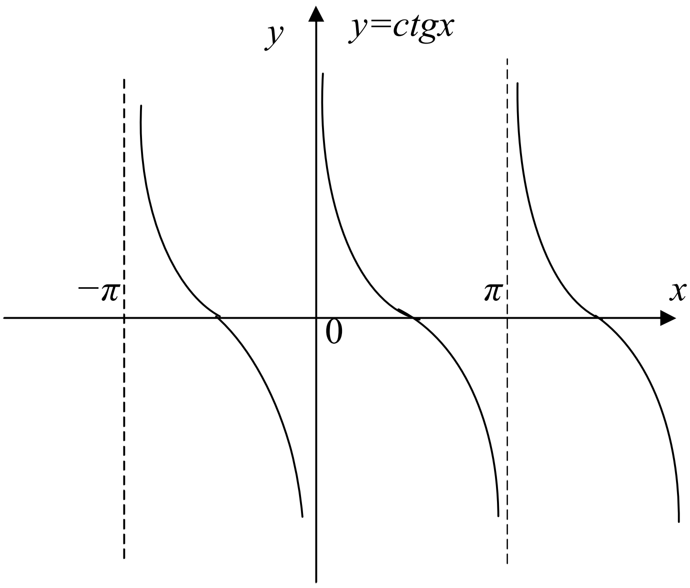


Рис. 0.32.

Графіки обернених тригонометричних функцій

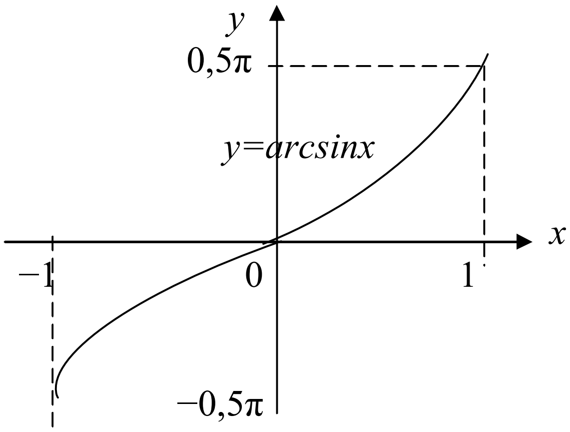


Рис. 0.33.

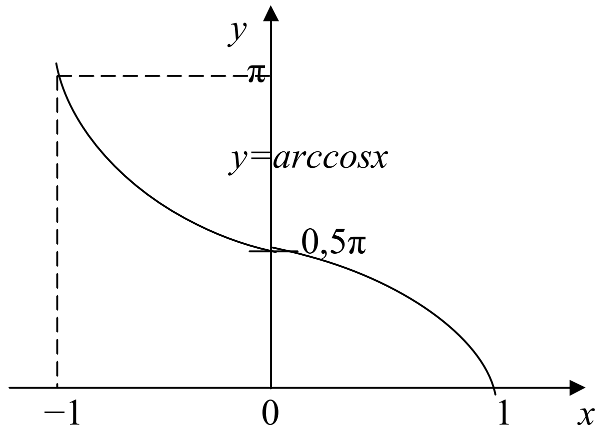


Рис. 0.34.

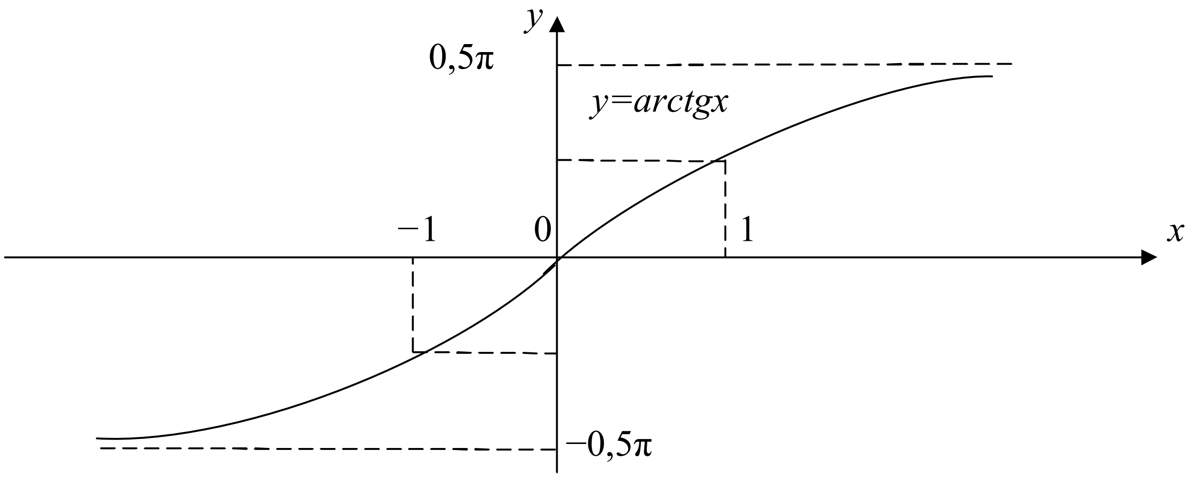


Рис. 0.35.

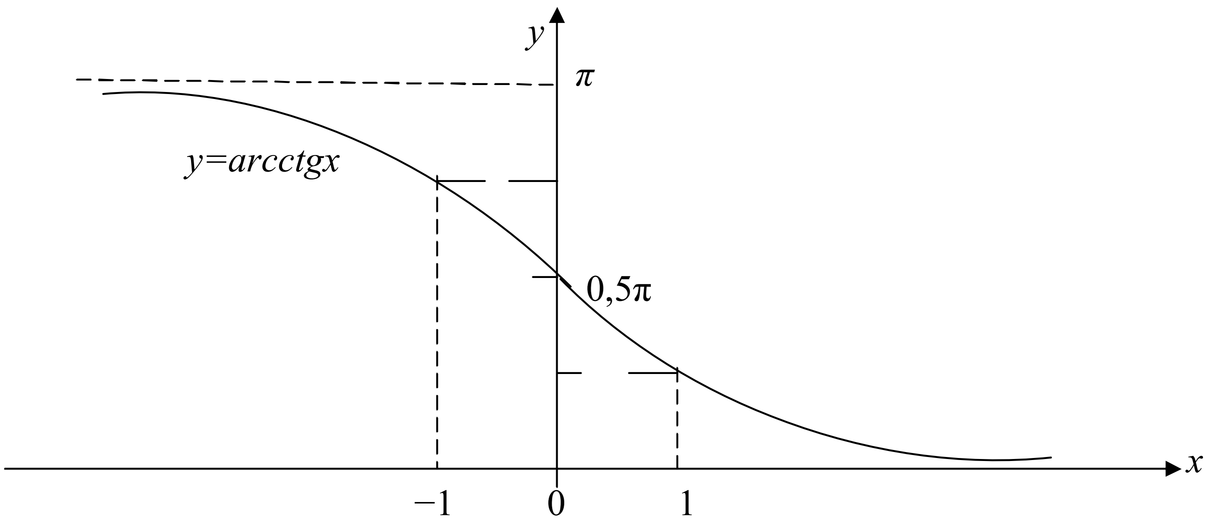


Рис. 0.36.