XI. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Озн. Диференціальним називається рівняння, що зв'язує між собою незалежну змінну x, функцію y та її похідні або диференціали. Найвищий порядок похідної визначає порядок диференціального рівняння. Наприклад, рівняння

$$f(x, y, y', y'', y''', C) = 0 \qquad (11.1)$$

є диференціальним рівнянням третього порядку. Наявність похідної чи диференціала в диференціальному рівнянні обов'язкова, тоді як змінні x чи y можуть бути відсутні. Наприклад, рівняння $y'' = 4$ являє собою диференціальне рівняння другого порядку, не дивлячись на відсутність у ньому змінних x та y.

Озн. Розв'язком диференціального рівняння називається функція $y = f(x)$, яка, будучи підставленою разом зі своїми похідними у диференціальне рівняння, перетворює його у тотожність.

<u>Приклад 1:</u> розв'язати диференціальне рівняння $y' = 2x + 2$.

Тоді $dy = (2x+2)dx \Rightarrow y = \int (2x+2)dx = x^2 + 2x + C_1$.

<u>Приклад 2</u>: розв'язати диференціальне рівняння $y'' = 2x + 2.$

$$y'' = 2x + 2 \Rightarrow y' = x^2 + 2x + C_1 \Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1 x + C_2 .$$

<u>Приклад 3</u>: розв'язати диференціальне рівняння $y''' = 2x + 2.$

$$y''' = 2x + 2 \Rightarrow y'' = x^2 + 2x + C_1 \Rightarrow y' = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1 x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Розв'язки всіх трьох диференціальних рівнянь називаються загальними. У кожному з них число суттєво незалежних сталих співпадає з порядком рівняння.

Озн. Суттєво незалежними сталими називаються такі сталі, які не виражаються одна через одну.

Наприклад, якщо розв'язок третього рівняння записати у вигляді: $y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 + C_4 + C_5$, то сталі C_3, C_4, C_5 не належать до суттєво незалежних, так як $C_3 + C_4 + C_5 = C$, в той час як C_1 і C_2 одна через одну не виражаються.

Озн. Якщо для диференціального рівняння відомі деякі додаткові умови, за яких можемо визначити конкретні значення сталих, що задовольняють задані умови, то такі додаткові умови називаються початковими умовами.

Приклад: $y' = 2x + 2; y(1) = 2$. Початкова умова $y(1) = 2$ означає, що функція $y = f(x)$ проходить через точку *(1; 2)*. Тоді $y = x^2 + 2x + C$. Накладемо початкову умову $x = 1; y = 2 \Rightarrow 2 = 1 + 2 + C \Rightarrow C = -1$. Із загального розв'язку знаходимо частинний розв'язок $y = x^2 + 2x - 1$. При зміні початкових умов змінюється вигляд частинного розв'язку, яких із загального розв'язку можна знайти безліч.

Як відомо з інтегрального числення, знаходження функції за відомою її похідною проводиться за дією інтегрування, тому розв'язок диференціального рівняння зводиться до цієї дії. Якщо диференціальне рівняння має вигляд $y' = f(x)$, то його загальний розв'язок буде $y = \int f(x)dx + C$. При цьому не грає ролі, обчислюється цей інтеграл чи ні.

§1. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Існує декілька видів диференціальних рівнянь першого порядку, які досить легко обчислюються. Одним з таких типів є диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Озн: Диференціальними рівняннями I порядку з відокремленими змінними називають такі диференціальні рівняння загальний вигляд яких можна представити у виді: $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ (11.2)

Якщо $f_2(y) \neq 0$, то його можна записати у вигляді: $\dfrac{dy}{f_2(x)} = f_1(x)dx$. (11.3)

І тоді говорять, що змінні відокремили. В загальному випадку рівняння (11.3) є частковим випадком рівняння: $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$. У цьому рівнянні біля диференціала dx відсутня функція, що залежить від y, а біля диференціала dy відсутня функція, що залежить від x. Кажуть, що змінні відокремлені. З властивостей невизначеного інтеграла відомо, що мають зміст тільки ті інтеграли, у яких функція і диференціал мають одну і ту ж змінну. У рівнянні з відокремленими змінними саме такий випадок, тому такі рівняння розв'язують методом інтегрування:

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C.$$

Приклад: Розв'язати рівняння $x^2dx + y^2dy = 0$.

$$\int x^2dx + \int y^2dy = C \Rightarrow \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = C \Rightarrow x^3 + y^3 = 3C.$$

Отримали загальний розв'язок рівняння.

Досить часто для того, щоб отримати рівняння з відокремлюваними змінними змінні необхідно відокремити. Наприклад, як у наступному рівнянні:

$$f_1(x)f_2(y)+f_3(x)f_4(y)y'=0, \tag{11.4}$$

або у диференціальній формі, як

$$f_1(x)f_2(y)dx+f_3(x)f_4(y)dy=0. \tag{11.5}$$

Біля dx крім функції $f_1(x)$, яка цей диференціал задовольняє, знаходиться функція $f_2(y)$, яка цей диференціал не задовольняє, але задовольняє dy. Аналогічно функція $f_3(x)$ не задовольняє dy, але задовольняє dx. Функції, що не задовольняють диференціали, необхідно відокремити, що досягається шляхом ділення на всі функції, що не задовольняють диференціали. До них належать $f_2(y)$ та $f_3(x)$.

Таким чином, для відокремлення змінних рівняння необхідно поділити на добуток $f_2(y)\cdot f_3(x)$. Отримаємо:

$$\frac{f_1(x)\cdot f_2(y)dx+f_3(x)\cdot f_4(y)dy}{f_2(y)\cdot f_3(x)}=0 \Rightarrow \frac{f_1(x)\cdot f_2(y)dx}{f_2(y)\cdot f_3(x)}+\frac{f_3(x)\cdot f_4(y)dy}{f_2(y)\cdot f_3(x)}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}+\frac{f_4(y)dy}{f_2(y)}=0.$$

Змінні відокремлені, тому можемо рівняння інтегрувати:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=C.$$

<u>Приклад:</u> розв’язати диференціальне рівняння $ydx+xdy=0$.

$\frac{ydx+xdy}{xy}=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0 \Rightarrow \ln x+\ln y=\ln C \Rightarrow \ln xy=\ln C \Rightarrow xy=C$ – загальний розв’язок рівняння.

Однорідні диференціальні рівняння

Озн. Однорідним називається таке рівняння, в якому множення кожної невідомої на величину t призводить до множення всього рівняння на величину t^n. При цьому число n вказує на порядок однорідності цього рівняння.

Наприклад, рівняння $y^2+5xy-6x^2=0$ буде однорідним, бо множення кожної невідомої на t дає $(ty)^2+5(tx)(ty)-6(tx)^2=0$. Звідси:

$$t^2y^2+5tx\cdot ty-6t^2x^2=0 \Rightarrow t^2(y^2+5xy-6x^2)=0.$$

Рівняння помножене на t^2, тому воно має другий порядок однорідності. Розв’язується таке рівняння заміною $y=tx$ (тобто $t=\frac{y}{x}$, де $x\neq 0$).

Отже, маємо: $y^2+5xy-6x^2=0 \Rightarrow t^2x^2+5xtx-6x^2=0 \Rightarrow$

$$t^2x^2+5tx^2-6x^2=0 \Rightarrow x^2(t^2+5t-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} t^2+5t-6=0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$t^2+5t-6=0 \Rightarrow t_1=-6 \cup t_2=1 \Rightarrow y=-6x \cup y=x.$$

Озн. Однорідним диференціальним рівнянням називають диференціальне рівняння, яку можна записати у вигляді:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{11.9}$$

або $f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = 0$, де $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$ − однорідні функції, що мають порядок однорідності n. У цьому випадку можемо легко перейти до виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Якщо у кожній з функцій винести множник x^n, то вони запишуться:

$$f_1(x,y) = x^n F_1\left(\frac{y}{x}\right) \text{ і } f_2(x,y) = x^n F_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Тоді:

$$x^n F_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + x^n F_2\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0 \Rightarrow x^n\left(F_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + F_2\left(\frac{y}{x}\right)dy\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + F_2\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0 \Rightarrow F_1\left(\frac{y}{x}\right) + F_2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow F_2\left(\frac{y}{x}\right)y' + F_1\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{F_1\left(\frac{y}{x}\right)}{F_2\left(\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Диференціальне однорідне рівняння, як і звичайне однорідне, розв'язується заміною $y = tx$. Підставимо заміну в рівняння:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow t'x + tx' = f(t) \Rightarrow t'x + t = f(t) \Rightarrow t'x = f(t) - t \Rightarrow t'xdx = \left(f(t) - t\right) \Rightarrow$$

$$xdt = \left(f(t) - t\right)dx \Rightarrow \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dt}{f(t) - t} = \ln|x| + \ln|C|.$$

Якщо позначити $\int \frac{dt}{f(t) - t} = F(t),$ то $F(t) = \ln Cx \Rightarrow F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln Cx.$

Отримали розв'язок однорідного диференціального рівняння в загальному вигляді.

Приклад: Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = \frac{y}{x} + tgx$.

Дане рівняння є однорідним, тому скористаємося заміною $y = xu$, тоді похідна $y' = u + xu'$. Підставимо покладену заміну у задане рівняння:

$$u + xu' = \frac{xu}{x} + tg\,\frac{xu}{x} \Rightarrow$$

$$u + xu' = u + tgu \Rightarrow$$

$$xu' = tgu \Rightarrow x\frac{du}{dx} = tgu\,.$$

Помножимо дане рівняння на $ctgudx$, тоді отримане рівняння $ctgudu = \frac{dx}{x}$ – рівняння є диференційним з відокремлюваними змінними.

Інтегруючи обидві частини рівняння одержимо:

$$\ln|sinu| = \ln|x| + \ln C;$$

$$\ln|sinu| = \ln|Cx|;$$

$$sinu = Cx \Rightarrow u = arcsin(Cx).$$

Так як $y = xu$, то $y = xarcsin(Cx)$ – загальний розв'язок рівняння.

Лінійні диференціальні рівняння з правою частиною

Озн. Лінійним диференціальним рівнянням називається таке рівняння, в якому величини y та y' знаходяться в першому степені і не перемножуються між собою. Загальний вигляд таких рівнянь:

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{11.6}$$

Наявність правої частини позбавляє можливості відокремити змінні. У диференціальній формі рівняння буде:

$$dy + p(x)ydx = q(x)dx\,.$$

При діленні на y, яке знаходиться біля dx, отримаємо:

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = \frac{q(x)}{y}dx\,.$$

У правій частині відокремлення відсутнє. Це тому, що справа присутня функція $q(x)$, яка в попередніх типах рівнянь була відсутня (права частина рівняння дорівнювала нулю).

Існує декілька способів розв'язування лінійних рівнянь з правою частиною. За методом Бернуллі позначимо $y = uv$, з яких одну (u або v) можемо вибрати наперед. Наприклад, функцію $y = \sin x$ можемо виразити через наперед задану функцію $y = \ln x$ наступним чином: $\sin x = \ln x \cdot \frac{\sin x}{\ln x}$.

Отже, в рівнянні $y' + p(x)y = q(x)$ зробимо заміну $y = uv$, причому виберемо v наперед (функцію v необхідно вибрати такою, щоб вона полегшила розв'язування рівняння). Для спрощення запису рівняння замість $p(x)$ будемо писати p, а замість $q(x)$ відповідно q. Тоді:

$$y' + px = q \Rightarrow u'v + uv' + puv = q \Rightarrow u'v + u(v' + pv) = q\,.$$

Виберемо v такою, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, тобто: $v' + pv = 0$.

При підстановці в рівняння отримаємо: $u'v + 0 \cdot u = q \Rightarrow u'v = q$.

Таким чином, отримали два рівняння:

$$v' + pv = 0;\ u'v = q .$$

Розв'язуємо перше рівняння і знаходимо значення v, яке підставляємо в друге рівняння і знаходимо u'. Завдяки праву вибору функції v виберемо з них ту, у якої стала, що з'являється при обчисленні невизначеного інтеграла, дорівнює нулю. Шляхом інтегрування знаходимо функцію u, після чого знаходимо $y = uv$. Досить зручно з обох знайдених рівнянь скласти систему:

$$\begin{cases} v' + pv = 0 \\ u'v = 0 \end{cases}. \tag{11.7}$$

<u>Приклад:</u> Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = 2y + x$.

Дане рівняння є лінійним, так як y і y' у однаковому степені (першому). Тому скористаємося заміною $y = uv$ і $y' = u'v + uv'$. Тоді:

$$u'v + uv' = 2uv + x,$$

$$v(u' + 2u) = x - uv',$$

$$\begin{cases} u' + 2u + 0, \\ x - uv' = 0, \end{cases}$$

Розв'яжемо окремо перше рівняння системи:

$$u' + 2u = 0,$$

$$\frac{du}{dx} + 2u = 0, \left| \cdot \frac{dx}{u} \right.,$$

$$\frac{du}{u} + 2dx = 0,$$

$$\int \frac{du}{u} + 2\int dx = 0,$$

$$\ln u + 2x = 0 \Rightarrow u = e^{-2x}.$$

Отриманий вираз підставимо в друге рівняння системи:

$$x - uv' = 0 \Rightarrow x - e^{-2x}v' = 0,$$

$$x - e^{-2x} \cdot \frac{dv}{dx} = 0, \left| \cdot \frac{dx}{e^{-2x}} \right.,$$

$$xe^{2x}dx - dv = 0,$$

$$\int xe^{2x}dx - \int dv = 0.$$

Обчислимо частинами перший інтеграл:

$$\int xe^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & \dfrac{e^{2x}}{2} = v \end{vmatrix} = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^2 x}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

Тоді, $\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C=v$.

З поставленої умови: $y=uv=e^{-2x}(\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{C}{e^{2x}}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Узагальнене диференціальне лінійне рівняння Я.Бернуллі

Озн. Узагальненим диференціальним лінійним рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y'+p(x)y=q(x)\cdot y^n. \tag{11.8}$$

Якщо $n=0$, то отримаємо лінійне рівняння, розглянуте у попередньому пункті. Узагальнене рівняння також розв'язується заміною $y=uv$. Функції $p(x)$ та $q(x)$ позначатимемо p та q. Тоді:

$$y'+py=qy^n \Rightarrow u'v+uv'+puv=q(uv)^n \Rightarrow u'v+u(v'+pv)=qu^nv^n \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v'+pv=0 \\ u'v=qu^nv^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'+pv=0 \\ u'=qu^nv^{n-1} \end{cases}.$$

Знайдене з першого рівняння значення v підставляємо у друге рівняння і знаходимо спочатку значення u', а потім u.

<u>Приклад:</u> Розв'язати диференціальне рівняння $y'-\frac{y}{x}=x^2y^2$ за початкової умови: $y(1)=1$.

Введемо заміну $y=uv$ і розглянемо систему рівнянь $\begin{cases} v'-\frac{v}{x}=0 \\ u'v=x^2u^2v^2 \end{cases}$.

Розв'яжемо перше рівняння: $v'-\frac{v}{x}=0 \Rightarrow v'dx-\frac{v}{x}dx=0 \Rightarrow dv-\frac{v}{x}dx=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v=\ln x \Rightarrow v=x.$

Підставимо отримане значення v у друге рівняння:

$$u'v=x^2u^2v^2 \Rightarrow u'=x^2u^2v \Rightarrow u'dx=x^2u^2xdx \Rightarrow du=x^3u^2dx \Rightarrow \frac{du}{u^2}=x^3dx \Rightarrow$$

$$\int\frac{du}{u^2}=\int x^3dx \Rightarrow -\frac{1}{u}=\frac{x^4}{4}-C_1 \Rightarrow u=-\frac{4}{x^4-4C_1} \Rightarrow u=\frac{4}{C-x^4}.$$

Тоді: $y=uv=x\cdot\frac{4}{C-x^4}=\frac{4x}{C-x^4}$.

Накладемо початкову умову: якщо $x=1$, то $y=1$. Тоді: $\dfrac{4}{C-1}=1 \Rightarrow C=5$. Підставимо отримане значення C у загальний розв'язок рівняння і отримаємо частковий розв'язок: $y=\dfrac{4x}{5-x^4}$.

Рівняння у повних диференціалах

Для функції двох змінних $z=f(x,y)$ повний диференціал є виразом $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$, де частинні похідні − деякі функції від змінних x та y, тобто $\dfrac{\partial z}{\partial x}=P(x,y)$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}=Q(x,y)$, а мішані похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ рівні між собою. Тому: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Досить часто зустрічаються рівняння I порядку у вигляді

$$f_1(x,y)dx+f_2(x,y)dy=0 \qquad (11.10)$$

Озн. Якщо функції $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$ такі, що $\dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}$, то ці функції є частинними похідними, а саме диференціальне рівняння називається рівнянням у повних диференціалах, в якому $dz=0$ (тоді $z=C$).

Якщо $f_1(x,y)$ є частинною похідною $\dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial x}$, в якій y виконує роль сталої, то $\int\dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial x}dx=\int f_1(x,y)dx=F_1(x,y)+C(y)$.

Функція $C(y)$ грає роль сталої. Отримана функція виконує роль розв'язку рівняння, але функція $C(y)$ невідома. Разом з тим $f_2(x,y)$ – частинна похідна $\dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}$, тому похідна від отриманого розв'язку:

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_1(x,y)+C(y))=f_2(x,y)\Rightarrow\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial C(y)}{\partial y}=f_2(x,y).$$

Звідси: $\dfrac{\partial C(y)}{\partial y}=f_2(x,y)-\dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\Rightarrow C(y)=\int(f_2(x,y)-\dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y})dy$.

Оскільки $dz=0$, то отриманий розв'язок $F_1(x,y)+C(y)$ необхідно прирівняти деякій сталій, тому $F_1(x,y)+C(y)=C_1$ буде розв'язком диференціального рівняння.

<u>Приклад 1:</u> Розв'язати рівняння $(x^2+y)dx+(x^3+4y^2)dy+0$.

Перевіряємо наявність повного диференціала:

$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y)=1;\ \frac{\partial}{\partial x}(x^3+4y^2)=3x^2$. Але $3x^2\neq 1$, тому це рівняння не буде рівнянням у повних диференціалах.

<u>Приклад 2:</u> Розв'язати рівняння $2xy^3dx+(3x^2y^2+1)dy=0$.

Перевіряємо умову $\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2+1)\Rightarrow 2x\cdot 3y^2=3\cdot 2x\cdot y^2$.

Отже, це є рівняння у повних диференціалах. Тому:

$$\int 2xy^3dx = y^3\int 2xdx = x^2y^3+C(y).$$

Отримана функція така, що частинна похідна по змінній y є $3x^2y^2+1$, тому:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3+C(y))=3x^2y^2+1\Rightarrow x^2\cdot 3y^2+C'(y)=3x^2y^2+1\Rightarrow C'(y)=1\Rightarrow C(y)=y.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння буде:

$$x^2y^3+y=C.$$

Зауваження: замість $\frac{\partial C(y)}{\partial y}$ записали $C'(y)$, тому що у функції $C(y)$ відсутня змінна x.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними:

11.1. $y'=e^{-2x}$;

11.2. $y'=sin5x$;

11.3. $y'=\frac{1}{x^2+4}$;

11.4. $y'=\frac{1}{sin^2 2x}$;

11.5. $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}$

11.6. $y'=e^{x+y}$

11.7. $y'=\sqrt[3]{x^5y^2}$;

11.8. $y'=y\sqrt[4]{xy}$;

11.9. $\sqrt{x^3}\,y'=y^2x$;

11.10. $\sqrt[3]{x}\,y'=y^2$;

11.11. $\sqrt{xy}\,y'=y^2$;

11.12. $y'=y\sqrt[5]{x^3y^2}$;

11.13. $y'=y\sqrt[3]{xy^2}$

11.14. $\sqrt[3]{x}\,y'=\sqrt[4]{yx}$

11.15. $y'=y\sqrt[4]{x^3y}$;

11.16. $y'=\sqrt[3]{x^8y}$;

11.17. $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy+0$;

11.18. $xyy'=1-x^2$;

11.19. $y'=10^{2x+y}$;

11.20. $y'=(2y+1)ctgx$.

Розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

11.21. $(x+y)dx-(x-y)dy=0$; **11.22.** $xdx-ydy=ydy$;

11.23. $(x^2+xy+y^2)dx=x^2dy$; **11.24.** $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$;

11.25. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$; **11.26.** $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$;

11.27. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$; **11.28.** $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$;

11.29. $xy'-y=\sqrt{y^2+x^2}$; **11.30.** $y^2+x^2y'=xyy'$.

Розв'язати лінійні диференціальні рівняння:

11.31. $y'+2xy=xe^{-x^2}$; **11.32.** $xy'=y\ln y$;

11.33. $xy'-2y=2x^4$; **11.34.** $(2x+1)y'=4x+2y$;

11.35. $y'+y=x$; **11.36.** $(xy+e^x)dy-xdy=0$;

11.37. $x^2y'+xy+1=0$; **11.38.** $y=x(y'-xcosx)$;

11.39. $2y=x(xy'-1)\ln x$; **11.40.** $y'-y=e^x$.

Розв'язати узагальнене диференціальні рівняння Бернуллі:

11.41. $y'x+y=-xy^2$; **11.42.** $y'+2xy=2x^3y^3$;

11.43. $xy'+y=x^2\ln x$; **11.44.** $(2xy+y^3)dy=dx$;

11.45. $(x^2\ln y-x)y'=y$; **11.46.** $y'+2xy=x^2y^3$;

11.47. $y'x+y=5x^3y^2$; $y(1)=1$; **11.48.** $y'x+3y=4x^4y^2$; $y(1)=1$;

11.49. $(2xy+y^4)dy=dx$; $y(1)=1$; **11.50.** $xy'+y=x\ln x$; $y(e)=1$.

Розв'язати диференціальні рівняння у повних диференціалах:

11.51. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$; **11.52.** $(3y+4x)dx+(3x+3y^2)dy=0$;

11.53. $(y^2+8x)dx+(2xy+5y^3)dy=0$; **11.54.** $(xe^y)y'+e^y+ye^x=0$;

11.55. $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx=\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)ydy=0$;

Індивідуальне завдання

Розв'язати диференціальні рівняння:

а) $y'=\frac{x^n}{e^{2n-3y}}$; б) $\sqrt[n]{x}y'=y^{n-2}$;

в) $(x^n+y^n)dx-(x^n-y^n)dy=0$; г) $y'-\frac{y}{n}=e^{nx}$;

д) $y'-\frac{y}{x}=x^ny^n$; е) $2xy^ndx+(nx^2y^{n-1}+n)dy=0$.

де n – номер студента за списком.

§ 2. Диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальні рівняння II порядку з явно відсутнім *y*

Загальний вигляд рівнянь II порядку:

$$f(x, y, y', y'') = 0. \qquad (11.11)$$

Як було показано, рівняння другого порядку вміщує дві суттєві сталі. Деякі з рівнянь допускають зниження порядку, в результаті якого отримуємо рівняння першого порядку.

Озн. Диференціальним рівняння з явно відсутнім y називають рівняння виду:

$$f(x, y', y'') = 0. \qquad (11.12)$$

Якщо ввести заміну $y' = z$, то після повторного диференціювання отримаємо: $y'' = z'$, тому рівняння буде мати вигляд $f(x, z, z') = 0$, яке розв'язується як рівняння першого порядку.

<u>Приклад:</u> Розв'язати рівняння $y'' + y' \cdot tgx = \cos x$. Знайти частинний розв'язок, який відповідає початковим умовам: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

У рівнянні відсутнє y, тому вводимо заміну $y' = z \Rightarrow y'' = z'$. Підставляючи в рівняння, отримаємо:

$$z' + z \cdot tgx = \cos x.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння I порядку, яке розв'язується заміною $z = uv$. Після підстановки отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} v' + v \cdot tgx = 0 \\ u'v = \cos x \end{cases}.$$

Перше з отриманих рівнянь розв'язуємо, як рівняння з відокремленими змінними:

$$dv + v \cdot tgx \cdot dx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} + tgx \cdot dx = 0 \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int tgx \cdot dx \Rightarrow \ln v =$$

$$= \int \frac{-\sin x \cdot dx}{\cos x} \Rightarrow \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right| \Rightarrow \ln v = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln v = \ln t \Rightarrow v = t \Rightarrow v = \cos x.$$

Розв'язуємо друге рівняння системи:

$$u'v = \cos x \Rightarrow u' \cos x = \cos x \Rightarrow u' = 1 \Rightarrow u = x + C_1.$$

Тоді: $z = uv \Rightarrow z = (x + C_1)\cos x \Rightarrow y' = (x + C_1)\cos x.$

Накладемо початкову умову:

$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = (0 + C_1)\cos 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = 0.$

Отже, частинний розв'язок рівняння першого порядку буде:

$$y' = x \cdot \cos x.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$y' = x \cdot \cos x \Rightarrow dy = x\cos x \cdot dx \Rightarrow \int dy = \int x\cos x \cdot dx.$

Підінтегральна сума є добутком функцій, не зв'язаних між собою через похідну, тому потрібно застосувати формулу інтегрування "частинами ":

$$\int udv = uv - \int vdu \Rightarrow y = \int x\cos x \cdot dx = \left| \begin{matrix} x = u; \cos x \cdot dx = dv \\ dx = du; v = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin xdx =$$

$x\sin x - \cos x + C$.

В результаті отримали розв'язок рівняння другого порядку у вигляді:

$$y = x\sin x + \cos x + C.$$

Накладемо початкову умову:

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = 0 \cdot \sin 0 + \cos 0 + C \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

Звідси частинний розв'язок рівняння буде:

$$y = x\sin x + \cos x.$$

Диференціальні рівняння II порядку з явно відсутнім *x*

Озн. Диференціальним рівняння з явно відсутнім *x* називають рівняння виду:

$$f(y, y', y'') = 0. \qquad (11.13)$$

Дані рівняння розв'язують за допомогою введення заміни $y' = z(y) \Rightarrow$ $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot y' = y'\frac{dz}{dy} = z\frac{dz}{dy}.$

Тоді $f(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0$ є диференціальним рівнянням першого порядку.

<u>Приклад:</u> Розв'язати рівняння $y \cdot y'' = (y')^2$.

В рівнянні явно відсутнє *x*, тому вводимо заміну $y' = z \Rightarrow y'' = z\frac{dz}{dy}$.

Отримаємо: $yz\frac{dz}{dy} = z^2 \Rightarrow z(y\frac{dz}{dy} - z) = 0$.

Звідси переходимо до системи:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y\frac{dz}{dy} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ ydz = zdy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dy}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \ln z = \ln y + \ln C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = C_1 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y' = C_1 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = C_0 \\ y = C_2 e^{C_1 x} \end{cases}.$$

Отримали загальний розв'язок рівняння другого порядку.

Лінійні диференціальні рівняння II порядку

Озн. Неоднорідним диференціальним рівнянням II порядку називають диференціальне рівняння виду: $y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = f(x),$ (11.14)

де $p(x),\ q(x),\ f(x)$ − деякі функції від аргументу x.

В вказаному рівнянні функція y та її похідні y' та y'' знаходяться в першому степені і не перемножуються між собою.

Озн. Однорідним диференціальним рівнянням II порядку називають диференціальне рівняння виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (11.15)$$

Тобто якщо у рівнянні (14) $f(x) = 0,$ то отримаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння.

З усіх лінійних рівнянь другого порядку будемо вивчати такі, у яких функції $p(x)$ та $q(x)$ замінені числами p і q. Отже, будемо вивчати однорідні рівняння виду:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (11.16)$$

та неоднорідні рівняння виду:

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (11.17)$$

Такі рівняння називаються лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами.

Теореми про розв'язки однорідних рівнянь

1. Якщо y_1 – деякий розв'язок рівняння (16), то $y = Cy_1$ також буде його розв'язком.

Для перевірки підставимо $y = Cy_1$ в рівняння (16), враховуючи, що $y' = Cy_1',\ y'' = Cy_1''$. Тоді: $Cy_1'' + Cpy_1' + Cqy_1 = 0.$

Винесемо сталу C як множник і отримаємо: $C(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0,$ звідки $C \neq 0,$ а $y''_1 + py_1' + qy_1 \equiv 0$ тотожно (адже y_1 є розв'язком).

2. Якщо y_1 та y_2 − деякі розв'язки, то $y = y_1 \pm y_2$ також є розв'язком. Враховуємо, що $y' = y_1' \pm y_2'$ і $y'' = y_1'' \pm y_2''$.

Тоді:

$$y_1'' \pm y_2' + p(y_1' \pm y_2') + q(y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow (y_1'' + py_1' + qy_1) \pm (y_2'' + py_2' + qy_2) = 0,$$

де вирази в дужках тотожно дорівнюють нулю.

3. Якщо y_1 і y_2 є деякими розв'язками, то: $y = C_1y_1 + C_2y_2$ утворює загальний розв'язок рівняння (1), в якому C_1 і C_2 − суттєві сталі (див. §1). Підставимо цей загальний розв'язок у рівняння (16):

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + p(C_1y_1' + C_2y_2') + q(C_1y_1 + C_2y_2) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0,$ де вирази у дужках тотожно дорівнюють нулю.

З останньої теореми робимо важливий висновок: якби нам вдалося якимось чином знайти розв'язки y_1 та y_2, то без будь-якого інтегрування могли б відразу записати загальний розв'язок рівняння (11.16).

Розв'язок однорідного рівняння

Уважно розглядаючи рівняння (11.16), розуміємо, що розв'язком його не можуть бути степеневі, тригонометричні, логарифмічні, обернені тригонометричні функції. Самі функції та їх перша і друга похідна сильно відрізняються між собою (для $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2}$), що при їх підстановці в (11.16) не дає можливості отримати тотожність (згадуємо, що розв'язок завжди перетворює рівняння в тотожність). Практично залишаються одні показникові функції, похідні яких подібні і самій функції, і між собою. Отже, спробуємо знайти деякий розв'язок рівняння (11.16) серед функцій типу $y = e^{kx}$. Тоді $y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}$. Підставляючи в (11.16), отримаємо:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то:

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (11.18)$$

Отримане рівняння називають характеристичним.

В розв'язку $y = e^{kx}$ число k мусить бути таким, щоб задовольняло характеристичне рівняння.

Відомо, що залежно від дискримінанта можуть бути три випадки:

а) дискримінант $D > 0$, існує два різних корені k_1 і k_2;

б) $D = 0$, обидва корені дійсні й рівні (так званий двократний корінь);

в) $D < 0$, дійсні корені відсутні. Але якщо уявити, що існує квадратний корінь з від'ємного числа (так званий уявний корінь), то отримаємо два корені рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння залежить від дискримінанту, а тому при розв'язуванні рівняння (11.16) необхідно скласти і розв'язати характеристичне рівняння.

Випадок різних дійсних коренів

Розв'язком характеристичного рівняння є два числа k_1 і k_2. Це означає, що існують два числа, за допомогою яких знаходимо розв'язки: $y_1 = e^{k_1x}$ і $y_2 = e^{k_2x}$. Тоді: $y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.

Висновок. Якщо корені характеристичного рівняння є числа k_1 і k_2, то розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку необхідно шукати у вигляді:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \tag{11.19}$$

<u>Приклад:</u> Розв'язати рівняння $y'' - 7y' + 12y = 0$.

Складаємо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$k^2 - 7k + 12 = 0 \Rightarrow (k-4)\cdot(k-3) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 3 \\ k_2 = 4 \end{array}\right.$. Тоді $\left[\begin{array}{l} y_1 = e^{3x} \\ y_2 = e^{4x} \end{array}\right. \Rightarrow y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.

Розв'язане диференціальне рівняння не вміщує x, тому його можна розв'язувати методом зниження порядку (див.§3, п.2), але це набагато складніше.

Випадок дійсних рівних коренів

Якщо дискримінант характеристичного рівняння дорівнює нулю, то корені цього рівняння будуть $k_1 = k_2 = k$, тому: $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{kx} \\ y_2 = C_2 e^{kx} \end{array}\right. \Rightarrow \quad y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{kx} =$

$= (C_1 + C_2) e^{kx} = C e^{kx}$.

Отже, отримали не загальний розв'язок з двома суттєво незалежними сталими, а один частковий. Необхідно знайти другий корінь. Уявимо, що нам вдалося незначно змінити числа p і q так, що розв'язками характеристичного рівняння стали числа $k_1 = k$; $k_2 = k + \Delta k$ (метод Л. Ейлера). За теоремою Вієта:

$$k_1 + k_2 = -p \text{ і } k_1 k_2 = q.$$

Тоді: $y'' - (k_1 + k_2) y' + k_1 k_2 y = 0 \Rightarrow y'' - (2k + \Delta k) y' + k(k + \Delta k) = 0,$ яке необхідно розв'язати. Часткові розв'язки цього рівняння: $\left[\begin{array}{l} y_1 = e^{kx} \\ y_2 = e^{(k+\Delta k)x} \end{array}\right.$.

Згідно з теоремою про розв'язки (§4) $y_3 = y_2 - y_1$ також буде розв'язком диференціального рівняння, тобто: $y_3 = e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx} \Rightarrow y_3 = e^{kx}(e^{\Delta kx} - 1)$ − розв'язок.

Крім того, $\dfrac{y_3}{\Delta k}$ також буде розв'язком рівняння, тобто $y_4 = \dfrac{y_3}{\Delta k}$. Розглянемо граничний перехід:

$$\lim_{\Delta k \to 0} y_4 = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{y_3}{\Delta k} = \lim_{\Delta k \leftarrow 0} \frac{e^{kx}(e^{\Delta kx} - 1)}{\Delta k} = e^{kx} \lim_{\Delta k \to 0} \frac{e^{\Delta kx}}{\Delta k} = x e^{kx} \text{ (друга визначна границя).}$$

Отже, $y_4 = x e^{kx}$ також буде розв'язком рівняння. Враховуючи, що $y_1 = e^{kx}$, загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_4 = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}.$$

Висновок. Якщо корені характеристичного рівняння − однакові числа, тобто $k_1 = k_2 = k,$ то розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння II порядку необхідно шукати у вигляді:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} . \tag{11.20}$$

Приклад: Розв’язати рівняння $y'' - 12y' + 36y = 0$.

Складемо та розв’яжемо характеристичне рівняння:
$k^2 - 12k + 36 = 0 \Rightarrow (k-6)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 6$.

Корені характеристичного рівняння однакові, тому:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = e^{6x} \\ y_2 = e^{6x} \end{array}\right. \Rightarrow y = C_1 e^{6x} + C_2 x e^{6x}.$$

Випадок уявних коренів

Серед дійсних чисел відсутнє число a, для якого $a^2 < 0$. Якщо деяке від’ємне число $-a$ записати: $-a = -1 \cdot a = -1 \cdot b^2$, де $b^2 > 0$, то $\sqrt{-a} = \sqrt{-1 \cdot b^2} =$ $= |b| \cdot \sqrt{-1}$. Якщо уявити, що існує таке число (якого серед дійсних чисел насправді немає), квадрат якого дорівнює -1, то $\sqrt{-1}$ буде добуватись. Позначимо це число буквою i (від лат. ”imaginaries”− уявний). Тоді $i \cdot i = i^2 = -1 \Rightarrow \sqrt{-1} = i.$
Якщо розв’язок характеристичного рівняння буде: $k = a \pm \sqrt{-D}$, тобто $k = a \pm bi,$ де a − дійсне число, а bi − уявне, то $a \pm bi$ називається комплексним числом.

Запис $a \pm bi$ називається алгебраїчною формою комплексного числа. Крім того існує його показникова форма у вигляді e^{xi} та тригонометрична форма у вигляді $\cos x \pm i \sin x$. Одне й те ж число може записуватись у будь-якій із форм. Наприклад:

$e^{xi} = \cos x + i \sin x$, $e^{-xi} = \cos x - i \sin x$ (формули Л.Ейлера), звідки:
$\cos x = \dfrac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$.

Якщо у формулі Л.Ейлера замінити x на nx, то отримаємо відому формулу Муавра: $e^{nxi} = \cos nx + i \sin nx$.

Відмітимо, що $a \pm bi = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$.

За формулами Ейлера знаходяться досить наступні співвідношення:
$e^{\pm 2\pi i} = 1; e^{\pm \pi i} = -1; e^{\frac{\pi}{2} i} = i; e^{-\frac{\pi}{2} i} = -i$ та інші.

Якщо характеристичне рівняння має два різних комплексних корені у вигляді: $k_1 = a + bi; k_2 = a - bi$, то $y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax} e^{bxi}; y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax} \cdot e^{-bx} \Rightarrow$ $\Rightarrow y = C_1 e^{ax} e^{bxi} + C_2 e^{ax} e^{-bxi} = e^{ax}(C_1 e^{bxi} + C_2 e^{-bxi})$. Використовуємо формулу Муавра:
$e^{bxi} = \cos bx + i \sin bx,$ $e^{-bxi} = \cos bx - i \sin bx$.

Тоді:

$y = e^{ax}(C_1(\cos bx + i\sin bx) + C_2(\cos bx - i\sin bx)) = e^{ax}((C_1 + C_2)\cdot\cos bx +$
$+ i(C_1 - C_2)\sin bx) = e^{ax}(C_3\cos bx + C_4\sin bx)$.

Числа C_1 і C_2 − довільні і можуть бути дійсними чи комплексними, тому $C_3 = C_1 + C_2$ і $C_4 = i(C_1 - C_2)$ − можуть бути дійсними числами. Наприклад, якщо $C_1 = 3 - i; C_2 = 3 + i$, то $C_1 + C_2 = 3 - i + 3 + i = 6$ (дійсне число) і $i(C_1 - C_2) = i(3 - i - 3 - i) = i(-2i) = -2i^2 = -2\cdot(-1) = 2$ − також дійсне число. Як завжди, позначимо довільні сталі через C_1 і C_2 і отримаємо загальний розв’язок у вигляді: $e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx)$.

Висновок. Якщо корені характеристичного рівняння − комплексні числа, що мають вигляд $k = a \pm bi$, то розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння II порядку шукають у вигляді:

$$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx). \qquad (11.21)$$

<u>Приклад:</u> Розв’язати рівняння $y'' - 4y' + 40y = 0$.

Складаємо та розв’яжемо характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 40 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow k = 2 \pm 6i$. Отже, $a = 2$, $b = 6$. Тоді:

$$y = e^{2x}(C_1\cos 6x + C_2\sin bx).$$

Як підсумок параграфа можемо навести алгоритм розв’язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку:

1. Необхідно скласти характеристичне рівняння.
2. Знайти корені характеристичного рівняння k_1 і k_2.
3. Якщо корені дійсні й різні, то розв’язок $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.
4. Якщо корені дійсні й рівні, то розв’язок $y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$.
5. Якщо корені комплексні, тобто $k = a \pm bi$, то розв’язок $y = e^{ax}(C\cos bx + C\sin bx)$.

Загальний розв’язок неоднорідного рівняння

Розглянемо неоднорідне рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$, яке відрізняється від однорідного наявністю правої частини у вигляді будь-якої функції. Нехай функція y_n є деякий частинний розв’язок вказаного рівняння.

Тоді $y = y_0 + y_n$ є його загальним розв'язком рівняння, в якому y_0 − розв’язок однорідного рівняння (16).

Підставимо $y = y_0 + y_n$ у рівняння (17), враховуючи, що $y' = y_0' + y_n'$ і $y'' = y_0'' + y_n''$.

Тоді: $y_0'' + y_n'' + p(y_0' + y_n') + q(y_0 + y_n) = f(x) \Rightarrow (y_0'' + py_0' + qy_0) + (y_n'' + py_n' + qy_n) =$ $= f(x)$.

Але $y_0'' + py_0' + qy_0 \equiv 0$, ($y_0$ − розв'язок однорідного рівняння), а частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_n'' + py_n' + qy_n \equiv f(x)$. В y_0 входить дві суттєво незалежних сталих, тому $y = y_0 + y_n$ є загальним розв'язком неоднорідного рівняння.

Якщо рівняння має вигляд:

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x), \tag{11.22}$$

то y_n шукають у вигляді $y_{n_1} + y_{n_2}$, де y_{n_1} − частинний 'язок рівняння

$$y'' + py' + qy = f_1(x), \tag{11.23}$$

а y_{n_2} − частинний розв'язок рівняння

$$y'' + py' + \ + qy = f_2(x). \tag{11.24}$$

Інакше кажучи, для того, щоб розв'язати рівняння (22), необхідно розв'язати рівняння (23) і (24), з яких знайти розв'язки

$$y_1 = y_0 + y_{n_1} \quad \text{і} \quad y_2 = y_0 + y_{n_2},$$

після чого записати загальний розв'язок рівняння (21) за допомогою принципу накладання у вигляді: $y = y_0 + y_{n_1} + y_{n_2}$

Розглянемо правила знаходження y_n для деяких функцій $f(x)$.

$f(x)$ − ***многочлен виду*** $P_n(x)$

Якщо права частина неоднорідного рівняння є многочленом виду

$$P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0,$$

то частинний розв'язок y_n шукають у вигляді:

а) $y_n = Q_n(x)$, якщо $q \neq 0$, тобто $Q_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$;

б) $y_n = x \cdot Q_n(x)$, якщо $q = 0; p \neq 0$;

в) $y_n = x^2 \cdot Q_n(x)$, якщо $p = q = 0$.

<u>Приклад 1:</u> Розв'язати рівняння $y'' - 12y' + 35y = 35x^2 + 11x + 25$.

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння $k^2 - 12k + 35 = 0 \Rightarrow (k-5)\cdot(k-7) = 0 \Rightarrow k_1 = 5; k_2 = 7 \Rightarrow y_0 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x}$.

В рівнянні $q = 35 \neq 0$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді многочлена другого степеня (права частина рівняння − також многочлен другого степеня). Отже, $y_n = ax^2 + bx + c$ є розв'язком, який перетворює диференціальне рівняння в тотожність. Знаходимо похідні y' та y'', які разом з y підставимо в рівняння:

$$y' = 2ax + b; y'' = 2a \Rightarrow 2a - 12(2ax + b) + 35(ax^2 + bx + c) \equiv 35x^2 + 11x + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 35ax^2 + (-24a + 35b)x + (2a - 12b + 35c) \equiv 35x^2 + 11x + 25.$$

Многочлени тотожно рівні, якщо рівні коефіцієнти при невідомих з рівними степенями, тому:

$$\begin{cases} 35a = 35 \\ -24a + 35b = 11 \\ 2a - 12b + 35c = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \Rightarrow y_n = x^2 + x + 1. \\ c = 1 \end{cases}$$

В результаті загальний розв'язок диференціального рівняння буде:

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x} + x^2 + x + 1.$$

Приклад 2: Розв'язати рівняння $y'' - 7y' = 21x^2 + 8x + 5.$

Характеристичне рівняння: $k^2 - 7k = 0 \Rightarrow k(k-7) = 0 \Rightarrow k = 0;$ $k = 7 \Rightarrow y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{7x} \Rightarrow y_0 = C_1 + C_2 e^{7x}.$ У рівнянні $q=0$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді: $y_n = x(ax^2 + bx + c)$.

Тоді: $y_n = ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow y_n' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y_n'' = 6ax + 2b$. Підставимо в рівняння: $6ax + 2b - 7(3ax^2 + 2bx + c) \equiv 21x^2 + 8x + 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -21ax^2 + (6a - 14b)x + (2b - 7c) \equiv 21x^2 + 8x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -21a = 21 \\ 6a - 14b = 8 \\ 2b - 7c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \Rightarrow y_n = -x^3 - x^2 - x. \\ c = -1 \end{cases}$$

Загальний розв'язок буде: $y = C_1 + C_2 e^{7x} - x^3 - x^2 - x$.

$f(x)$ – показникова функція виду Ae^{mx}

Частинний розв'язок шукають у вигляді:

а) $y_n = ae^{mx}$, якщо m – не корінь характеристичного рівняння;

б) $y_n = axe^{mx}$, якщо m – один з коренів характеристичного рівняння;

в) $y_n = ax^2 e^{mx}$, якщо m – двократний корінь характеристичного рівняння.

Приклад 1: Розв'язати рівняння $y'' - 12y' + 35y = 6e^{4x}$.

Характеристичне рівняння має корені $k_1 = 5; k_2 = 7$. Тоді: $y_0 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x}$.

Показник степеня $m = 4$ не співпадає ні з одним коренем, тому:

$$y_n = ae^{4x} \Rightarrow y_n' = 4ae^{4x} \Rightarrow y_n'' = 16ae^{4x}.$$

Підставляємо в рівняння і отримаємо:

$16ae^{4x} - 12 \cdot 4ae^{4x} + 35ae^{4x} \equiv 6e^{4x} \Rightarrow 3ae^{4x} \equiv 6e^{4x} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \; y_n = 2e^{4x}$.

Загальний розв'язок рівняння: $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x} + 2e^{4x}$.

Приклад 2: Розв'язати рівняння $y'' - 8y' + 16y = 8e^{4x}$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 8k + 16 = 0 \Rightarrow (k-4)^2 = 0 \Rightarrow k = 4$. Розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = C_1 e^{4x} + C_2 xe^{4x}$.

Двократний корінь однорідного рівняння співпадає зі степенем показникової функції диференціального рівняння, тому:

$$y_n = ax^2 e^{4x} \Rightarrow y_n' = 2axe^{4x} + 4ax^2 e^{4x} = 2a(x+2x^2)e^{4x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_n'' = 2a(1+4x)e^{4x} + 8a(x+2x^2)e^{4x} = 2ae^{4x}(1+8x+8x^2).$$

При підстановці в рівняння отримаємо:

$$2ae^{4x}(1+8x+8x^2) - 16ae^{4x}(x+2x^2) + 16ax^2e^{4x} \equiv 8e^{4x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2ae^{4x}(1+8x+8x^2-8x-16x^2+8x^2) \equiv 8e^{4x} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_n = 4e^{4x} \Rightarrow y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x} + 4e^{4x}.$$

$f(x)$ – ***функція виду*** $P_n(x)e^{mx}$

Частинний розв’язок рівняння шукають у вигляді:

а) $y_n = Q_n(x)e^{mx}$, якщо m не є коренем характеристичного рівняння;

б) $y_n = xQ_n(x)e^{mx}$, якщо $m = k_1$ або $m = k_2$;

в) $y_n = x^2Q_n(x)e^{mx}$, якщо $m = k_1 = k_2 = k$.

Якщо в правій частині неоднорідного рівняння многочлен є числом, тобто $P_n(x)e^{mx} = Ae^{mx}$, то маємо частковий випадок, розглянутий у пункті 2.

<u>Приклад:</u> Розв’язати рівняння $y'' - 12y' + 35y = (3x^2 + 4x - 5)e^{4x}$.

Складемо та розв’яжемо характеристичне рівняння $k^2 - 12k + 35 = 0$: $k = 5; k = 7 \Rightarrow y_0 = C_1e^{5x} + C_2e^{7x}$. З умови $m = 4$, тобто $m \neq 5$; $m \neq 7$. Отже, частинний розв’язок шукаємо у вигляді: $y_n = (ax^2 + bx + c)e^{4x}$.

$$y_n' = (2ax+b)e^{4x} + 4(ax^2+bx+c)e^{4x} = (4ax^2 + 2(a+2b)x + b + 4c)e^{4x} \Rightarrow$$
$$y_n'' = (8ax + 2a + 4b)e^{4x} + 4(4ax^2 + 2(a+2b)x + b + 4c)e^{4x} = 2(8ax^2 + 8(a+b)x +$$
$$+ a + 4b + 8c)e^{4x}.$$

Підставляємо в диференціальне рівняння і отримуємо:

$$(16ax^2 + 16ax + 16bx + 2a + 8b + 16c)e^{4x} - 12(4ax^2 + 2ax + 4bx + b + 4c)e^{4x} + 35(ax^2 +$$
$$+ bx + c)e^{4x} \equiv (3x^2 + 4x - 5)e^{4x} \Rightarrow (3ax^2 + (-8a + 3b)x + 2a - 4b + 3c)e^{4x} \equiv$$
$$\equiv (3x^2 + 4x - 5)e^{4x} \Rightarrow 3ax^2 + (-8a + 3b)x + 2a - 4b + 3c \equiv 3x^2 + 4x - 5.$$

З тотожності отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ -8a + 3b = 4 \\ 2a - 4b + 3c = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \Rightarrow y_n = (x^2 + 4x + 3)e^{4x}. \\ c = 3 \end{cases}$$

Загальний розв’язок рівняння буде: $y = C_1e^{4x} + C_2e^{4x} + (x^2 + 4x + 3)e^{4x}$.

$f(x)$ – ***тригонометрична функція виду*** $A\cos\alpha\, x + B\sin\alpha\, x$

Права частина рівняння є сумою функцій, тому використовуємо принцип накладання, згідно з яким частинний розв’язок рівняння шукають у вигляді суми двох частинних розв’язків.

Частинний розв’язок шукаємо у вигляді:

а) $y_n = a\cos\alpha x + b\sin\alpha x$, якщо $i\alpha$ не є коренем характеристичного рівняння;

б) $y_n = x(a\cos\alpha x + b\sin\alpha x)$, якщо $i\alpha$ − корінь характеристичного рівняння.

Приклад 1: Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = -18\cos 3x + 12\sin 3x.$

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow$ $k_1 = 2$, $k_2 = 3$.

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Корені рівняння дійсні, тому:

$y_n = a\cos 3x + b\sin 3x \Rightarrow y_n' = -3a\sin 3x + 3b\cos 3x \Rightarrow y_n'' = -9a\cos 3x - 9b\sin 3x.$

Підставимо в рівняння і отримаємо:

$-9a\cos 3x - 9b\sin 3x - 5(-3a\sin 3x + 3b\cos 3x) + 6a\cos 3x + 6b\sin 3x \equiv$

$\equiv -18\cos 3x + 12\sin 3x \Rightarrow (-3a - 15b)\cos 3x + (15a - 3b)\sin 3x \equiv -18\cos 3x + 12\sin 3x$.

З тотожності отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -3a - 15b = -18 \\ 15a - 3b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 5b = 6 \\ 5a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 5b = 6 \\ 25a - 5b = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_n = \cos 3x + \sin 3x.$

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \cos 3x + \sin 3x.$$

Приклад 2: Розв'язати рівняння $y'' + 4y = 8\cos 2x + 12\sin 2x.$

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k^2 = -4 \Rightarrow$ $k = \pm 2i$.

Тоді:

$$y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Значення $i\alpha = 2i$ співпадає з коренями характеристичного рівняння, тому $y_n = x(a\cos 2x + b\sin 2x) \Rightarrow y_n' = a\cos 2x + b\sin 2x + x(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x) =$

$= (a + 2bx)\cos 2x + (-2ax + b)\sin 2x \Rightarrow y_n'' = 2b\cos 2x - 2(a + 2bx)\sin 2x - 2a\sin 2x +$

$+ 2(-2ax + b)\cos 2x = (4b - 4ax)\cos 2x - (4a + 4bx)\sin 2x$.

Підставивши значення y_n і y_n'' у рівняння, отримаємо:

$(4b - 4ax)\cos 2x - (4a + 4bx)\sin 2x + 4x(a\cos 2x + b\sin 2x) \equiv 8\cos 2x + 12\sin 2x \Rightarrow$

$4b\cos 2x - 4a\sin 2x \equiv 8\cos 2x + 12\sin 2x.$

З тотожності випливає: $\begin{cases} 4b = 8 \\ -4a = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -3 \end{cases}.$

Отже, частинний розв'язок матиме вигляд: $y_n = x(2\sin 2x - 3\cos 2x).$

А загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x(2\sin 2x - 3\cos 2x).$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'язати диференціальні рівняння методом пониження порядку:

11.56. $xy'' + y' = 0$; **11.57.** $yy'' = 1 + y'^2$;

11.58. $y'' - xy' = 0$; **11.59.** $y'' + y' = \sin x$;

11.60. $2y'y'' = 1$; **11.61.** $2yy'' = y^2 + (y')^2$;

11.62. $xy'' = 1 + x^2$; **11.63.** $y'' + 2xy'^2 = 0$;

11.64. $xy'' - y' = x^2 e^x$; **11.65.** $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x^2 - x$;

11.66. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$; **11.67.** $y'' + y' tgx = \sin 2x$;

11.68. $(3y + 4)y'' - 3y'^2 = 0$; **11.69.** $(y - 1)y'' - 2y'^2 = 0$.

Знайти частинний розв'язок заданого рівняння:

11.70. $y'y'' = 2y,\ y(0) = y'(0) = 0$; **11.71.** $yy'' = (y')^2,\ y(0) = 1; y(0) = 3$;

11.72. $2yy'' = 3 + (y')^2,\ y(1) = y'(1) = 1$; **11.73.** $xy'' - y' = \ln x,\ y(1) = y'(1) = 1$;

11.74. $xy'' - y' = x^2 e^x,\ y(0) = -1; y(0) = 0$;

11.75. $y'' + y' tgx = \sin 2x,\ y(0) = 1; y'(0) = 0$;

11.76. $x^3 y'' + x^2 y' = 1, y(1) = y'(1) = 1$.

Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

11.77. $y'' + 2y' - 3y = 0$; **11.78.** $y'' - 2y' + y = 0$;

11.79. $y'' + 3y = 0$; **11.80.** $y'' - 4y' + 5y = 0$;

11.81. $y'' - 4y = 0$; **11.82.** $y'' + 4y = 0$.

Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь:

11.83. $y'' + 2y' + y = -2$; **11.84.** $y'' + y' = 4$;

11.85. $y'' + 2y' + 2y = 1$; **11.86.** $y'' + 2y' = x^2 - 1$;

11.87. $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$; **11.88.** $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$;

11.89. $y'' + y' = xe^{-x}$; **11.90.** $y'' - 2y' = 4x^2 e^x$;

11.91. $y'' - 6y' + 25y = 2sinx + 3\cos x$; **11.92.** $y'' + 4y = 3\cos x$.

Індивідуальне завдання

1. Розв'язати диференціальне рівняння методом пониження порядку: $y'' + y' = \sqrt[n]{x}$.

2. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння:
а) $y'' - 2ny' + n^2 y = 0$; б) $y'' + n^2 = 0$; в) $y'' - (n + 2)y' + 2ny = 0$.

3. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння:
а) $y'' - (1 + n)y' + ny = x^2 + nx + (n + 1)$; б) $y'' + n^2 y = (n - 1)\cos x$,

де n – номер студента за списком.

§ 3. Загальний метод розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь II порядку (метод Лагранжа або варіації довільних сталих)

В попередньому параграфі розглянуто методи знаходження розв'язків неоднорідних рівнянь виду $y'' + py' + qy = f(x)$ тільки для деяких специфічних функцій у правій частині рівняння. Якщо вигляд $f(x)$ відрізняється від вигляду розглянутих функцій, то застосувати наведені методи знаходження розв'язків рівнянь неможливо. Для таких випадків існує запропонований Лагранжем загальний метод розв'язування диференціальних рівнянь, названий методом варіації довільних сталих. Згідно з цим методом на розв'язок однорідного рівняння $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ накладається умова: замість чисел C_1, C_2 підібрати такі функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ за яких:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \tag{25}$$

буде розв'язком неоднорідного рівняння. Таким чином, на дві невідомі функції накладено одну умову, тому для однозначності вибору функцій необхідна ще одна. За другу умову (для полегшення розв'язку) виберемо твердження: нехай $C_1(x)$ і $C_2(x)$ будуть такими, щоб y' мала той же вигляд, який вона має при сталих коефіцієнтах, тобто виконувалась умова:

$$y' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'. \tag{26}$$

Але $y' = C_1'(x) y_1 + C_1(x) y' + C_2'(x) y_2 + C_2(x) y_2' = (C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2) +$
$+ (C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2)$, звідки:

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0. \tag{27}$$

Знаходимо з (26) другу похідну: $y'' = C_1'(x) y_1' + C_1(x) y_1'' + C_2'(x) y_2' + C_2(x) y_2''$, тоді $y'' = (C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2'') + (C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2')$.

Підставимо отримані значення y, y', y'' в $y'' + py' + qy = f(x)$:

$$(C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'') + (C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + p(C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2') + q(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) =$$
$$= f(x) \Rightarrow (C_1(x)y_1'' + pC_1(x)y_1') + qC_1(x)y_1) + (C_2(x)y_2'' + pC_2(x)y_2' +$$
$$+ qC_2(x)y_2'') + (C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2') = f(x).$$

Розв'язки y_1 і y_2 − частинні розв'язки однорідного рівняння, тому вирази у перших двох дужках тотожно дорівнюють нулю, тобто:

$C_1(x)y_1'' + pC_1(x)y_1' + qC_1(x)y_1 \equiv 0$ і $C_2(x)y_2'' + pC_2(x)y_2' + qC_2(x)y_2 \equiv 0.$

Тоді:

$$C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \tag{28}$$

Це рівняння є результатом накладання другої умови. Зводимо рівняння (27) і (28) у систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}. \qquad (29)$$

З системи знаходимо невідомі $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, інтегрування яких дає можливість знайти $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

<u>Приклад:</u> Розв'язати рівняння $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}$.

Розв'язок характеристичного рівняння: $k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k = \pm 2i$, тоді: $y_1 = \cos 2x$; $y_2 = \sin 2x \Rightarrow y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Знаходимо похідні: $y_1' = -2\sin 2x; y_2' = 2\cos 2x$. Запишемо систему:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = \dfrac{4}{\cos 2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0 \\ -2C_1'\sin 2x + 2C_2'\cos 2x = \dfrac{4}{\cos 2x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0 \\ -C_1'\sin 2x + C_2'\cos 2x = \dfrac{2}{\cos 2x} \end{cases} \qquad (*)$$

Помножимо перше рівняння на $\sin 2x$, а друге – на $\cos 2x$ і отримаємо:

$$\begin{cases} C_1'\sin 2x \cdot \cos 2x + C_2'\sin^2 2x = 0 \\ -C_1'\sin 2x \cdot \cos 2x + C_2'\cos^2 2x = 2 \end{cases}.$$

При додаванні рівнянь отримаємо: $C_2'(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = 2 \Rightarrow C_2' = 2$. Підставимо його в (*) і отримаємо: $C_1'\cos 2x + 2\sin 2x = 0 \Rightarrow C_1' = -2tg2x$.

Знаходимо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$: $C_2(x) = 2x + C_3$;

$$C_1(x) = -2\int tg2xdx = -2\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx = \begin{vmatrix} \cos 2x = t \\ -2\sin 2x = dt \end{vmatrix} = -2\int \frac{-dt}{2t} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln t + C_4 = \ln\cos 2x + C_4.$$

Підставляючи отримані значення функцій у рівняння (24), отримаємо:
$y = (\ln\cos 2x + C_4)\cos 2x + (2x + C_3)\sin 2x = C_4\cos 2x + C_3\sin 2x + \cos 2x \cdot \ln\cos 2x +$
$+ 2x \cdot \sin 2x$.

Позначимо довільні сталі більш звичними C_1 і C_2, після чого розв'язок рівняння запишемо:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \cos 2x \cdot \ln\cos 2x + 2x \cdot \sin 2x.$$

Отримали розв'язок: $y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x; y_n = 2x \cdot \sin 2x + \cos 2x \cdot \ln\cos 2x.$

§ 4. Системи диференціальних рівнянь

Розглянемо систему з двох диференціальних рівнянь I порядку у вигляді

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases},$$

яку називають нормальною.

Розглянемо алгоритм розв'язування таких систем:

1. Продиференціювати рівняння $y' = f(x, y, z)$ і отримати y''.

2. Замінити в отриманому рівнянні значення z' другим рівнянням системи.

3. Знайти з першого рівняння системи значення z і його також підставити у знайдене вище рівняння з y''.

4. Отримати рівняння II порядку, яке вміщує змінну x та функцію y разом з її похідними y' та y''.

5. Розв'язати рівняння II порядку і знайти y.

6. Знайти y' і, підставляючи його та y у перше рівняння системи, знайти z.

<u>Приклад:</u> Розв'язати систему диференціальних рівнянь $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + z \end{cases}$.

Диференціюємо перше рівняння: $y'' = y' - z' \Rightarrow y'' = y' - (y + z) = y' - y - z$ (*)

З першого рівняння системи знаходимо: $z = y - y'$. (**)

Підставляємо отримане значення z в (*):

$y'' = y' - y - y + y' \Rightarrow y'' - 2y' + 2y = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 2 = 0 \Rightarrow k = 1 \pm i \Rightarrow$
$\Rightarrow y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Один розв'язок знайдено.

Знаходимо y' і підставляємо її в (**):

$y' = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x(-C_1 \sin x + C_2 \cos x) = e^x(C_1 + C_2)\cos x +$
$+ (C_2 - C_1)\sin x) \Rightarrow z = y - y' \Rightarrow z = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - e^x((C_1 + C_2)\cos x +$
$+ (C_2 - C_2)\sin x) = e^x(C_1 \sin x - C_2 \cos x) -$ це другий розв'язок.

Запишемо розв'язки в систему: $\begin{cases} y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ z = e^x(C_1 \sin x - C_2 \cos x) \end{cases}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

11.93. $\begin{cases} y' = y - 3z \\ z' = y + 5z \end{cases}$;

11.94. $\begin{cases} y' = z + e^{3x} \\ z' = y + 5e^{3x} \end{cases}$;

11.95. $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = 3y + 6z \end{cases}$;

11.96. $\begin{cases} y' = z + x^2 \\ z' = 4y + 2x \end{cases}$;

11.97. $\begin{cases} y' = 4y - z \\ z' = y + 2z \end{cases}$;

11.98. $\begin{cases} y' = z - e^x \\ z' = 4y + 2e^x \end{cases}$;

11.99. $\begin{cases} y' = 2x - 3y - 4z \\ z' = x + y + z \end{cases}$; **11.100.** $\begin{cases} y' = 2y + 4z + \cos x \\ z' = -y - 2z + \sin x \end{cases}$;

11.101. $\begin{cases} y' = 1 + 4x + 2y + 4z \\ z' = y + z + 1{,}5x^2 \end{cases}$; **11.102.** $\begin{cases} y' = 2y + z + \cos x \\ z' = 3\sin x - y \end{cases}$.

Індивідуальне завдання

Розв'язати систему диференціальних рівнянь: $\begin{cases} y' = y - nz \\ z' = y + (n+1)z \end{cases}$, де n – номер студента за списком.

Запитання до розділу XI

1. Які рівняння називаються диференціальними?
2. Як визначається порядок диференціального рівняння?
3. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
4. Що таке суттєво незалежні сталі?
5. Що таке частинний та загальний розв'язок диференціального рівняння?
6. Яке рівняння називається рівнянням з відокремленими змінними?
7. Що таке рівняння зі змінними, що відокремлюються?
8. Яке правило відокремлення змінних?
9. Що таке лінійне рівняння I порядку з правою частиною?
10. В чому полягає метод Й.Бернуллі?
11. Яке рівняння називається однорідним?
12. Що таке рівняння в повних диференціалах?
13. Які рівняння II порядку допускають пониження порядку?
14. Що таке лінійне однорідне рівняння II порядку?
15. Як утворюється характеристичне рівняння?
16. Який вигляд має розв'язок однорідного рівняння II порядку при додатному, від'ємному та нульовому дискримінантах?
17. Що таке неоднорідне рівняння II порядку?
18. Як знаходиться частинний розв'язок неоднорідного рівняння для правої частини у вигляді: а) многочлена; б) показникової функції; в) добутку многочлена на показникові функції; г) тригонометричної функції?
19. Як знаходиться частинний розв'язок неоднорідного рівняння, права частина якого є сумою функцій?
20. В чому полягає зміст методу варіації довільних сталих?
21. Як розв'язуються системи, складені з двох диференціальних рівнянь першого порядку?
22. До рівняння якого порядку зводиться система з а) двох рівнянь першого порядку; б) трьох рівнянь першого порядку?