І. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Лінійна алгебра – це один із найбільш важливих підрозділів вищої алгебри, яка займається вивченням довільних систем першого порядку.

Вивчення таких систем привело до введення понять визначника та матриці. Причому, теорія матриць виявилась настільки плідною, що її застосування вийшло далеко за межі лінійної алгебри.

Широке застосування симплексного методу, як методу оптимізації в лінійному програмуванні, спонукало до вивчення основ лінійної алгебри як необхідної бази до розуміння основних понять цього на сьогодні неперевершеного методу послідовного покращення (незважаючи на алгоритмічні та теоретичні негаразди).

§1. Матриці та дії над ними

Нехай задано множину чисел, розміщених у вигляді квадратної таблиці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (1.1).$$

Таку впорядковану множину називають матрицею *(m*х*n)*. Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі. Коротко матрицю позначають так: $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$, або $A = \left\|a_{ij}\right\|_{mn}$. В цьому записі вказується кількість рядків ^{з} та стовбців j матриці.

Озн. Матрицею називається упорядкована по рядках та стовпцях таблиця елементів: букв, чисел, функцій тощо. Так, наприклад, сторінка газети є матрицею, оскільки вона має рядки тексту і стовпці у вигляді колонок тексту.

Матриці позначають великими латинськими літерами *A, B, C* тощо.

Числа a_{ij} називають елементами матриці.

Добуток числа рядків m на число стовбців n називають розміром матриці і позначають mхn.

Матриці мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і стовбців.

Озн. Матриці *A* та *B* називають рівними між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їх елементи, що знаходять на однакових місцях, рівні між собою. При цьому пишуть $A = B$.

Озн. Квадратною називають таку матрицю $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$, в якій $m = n$, тобто кількість рядочків дорівнює кількості стовпчиків.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Озн. Діагональною називають матрицю, по головній діагоналі якої розташовані елементи a_{ij}, а інші елементи є нулями, тобто $A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & ... & 0\\ 0 & a_{22} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & a_{mm}\end{pmatrix}$.

Озн. Одиничною називають діагональну матрицю, по головній діагоналі якої розташовані одиниці, тобто $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}$.

Озн. Нульовою називають матрицю, всі елементи якої нулі: $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix}$.

Властивість: Якщо до заданої матриці *А* додати нульову, то отримаємо задану матрицю *А*.

Дії над матрицями:

Нехай задано матриці *А* та *В*: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -11 & 4 & 5\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

1. Сума матриць.

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру. Сумою матриць $A=(a_{ij})_{mn}$ та $B=(b_{ij})_{mn}$ називається матриця $C=(c_{ij})_{mn}$, де $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. При цьому записують $C=A+B$.

<u>Приклад</u>:

$$A+B=\begin{pmatrix}1+0 & -2+1 & 0+0\\ 3+(-11) & 5+4 & -3+5\\ 2+(-3) & 0+(-1) & -1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -8 & 9 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Властивість: Для довільних матриць A, B та C однакових розмірів справджуються рівності: $A+B=B+A$; $(A+B)+C=A+(B+C)$.

2. Добуток матриці на число.

Добутком матриці $A=(a_{ij})_{mn}$ на число λ називається матриця $C=(c_{ij})_{mn}$, де $c_{ij}=\lambda a_{ij}$. При цьому записують $C=\lambda A$.

<u>Приклад</u>:

$$-4\cdot A=\begin{pmatrix}-4\cdot 1 & -4\cdot(-2) & -4\cdot 0\\ -4\cdot 3 & -4\cdot 5 & -4\cdot(-3)\\ -4\cdot 2 & -4\cdot 0 & -4\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 0\\ -12 & -20 & 12\\ -8 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

3. Віднімання матриць.

Різницю матриць A та B розглядають, як суму матриць A та $–B$, при чому матриця $–B$ утворена множенням матриці B на $–1$.

Властивості додавання та множення на число:

Для довільних матриць A, B однакових розмірів та довільних чисел μ і λ справджуються рівності:

1) $A+B=B+A$ – комутативність відносно додавання матриць;

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ – асоціативність відносно додавання матриць;

3) $A+0=A$; $A-A=0$ – роль нульової матриці в діях над матрицями така, як числа нуль в діях над числами;

4) $(\lambda\cdot\mu)\cdot A=\lambda\cdot(\mu\cdot A)$ – асоціативність відносно множення чисел;

5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ – дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць;

6) $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$ – дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.

4. Добуток матриць.

Операція множення матриць вводиться лише для узгоджених матриць.

Озн. Матриця називається узгодженою, якщо кількість стовпців першої дорівнює кількості рядків другої.

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

З узгодженості матриці A з матрицею B випливає узгодженість матриці B з матрицею A. Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$ на матрицю $B = \left(b_{ij}\right)_{ns}$ називається матриця $C = \left(c_{ij}\right)_{mn}$, де $c_{ij} = \overline{a_i} \cdot \overline{b_j}$ ($\overline{a_i}$ – *i-й* рядок першої матриці, $\overline{b_j}$ – *j-й* стовбець другої матриці). Тобто, щоб визначити елемент $\tilde{n}_{24}$, що стоїть в другому рядку і четвертому стовбці матриці $\tilde{N} = \grave{A}\hat{A}$, потрібно знайти суму добутків елементів другого рядка матриці *A* на відповідні елементи четвертого стовпці матриці *B*. При цьому записують $C = A \cdot B$.

<u>Приклад</u>:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-11) + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-11) + (-3) \cdot (-3) & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-11) + (-1) \cdot (-3) & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & -7 & -10 \\ -46 & 26 & 19 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо чи справджується переставний закон множення для матриць:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) \\ -11 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & -11 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 0 & -11 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) \\ -3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & -3 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & -3 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 11 & 42 & -17 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, переставний закон множення для матриць не справджується $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Властивості множення матриць:

Для довільних матриць *A*, *B* однакових розмірів та довільних чисел μ і λ справджуються рівності:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ – асоціативність відносно множення матриць;

2) $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ – роль нульової матриці в діях над матрицями така, як числа нуль в діях над числами;

3) $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (B \cdot A)$ – асоціативність відносно множення матриць і числа;

4) $C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$; $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ – дистрибутивність множення відносно додавання матриць;

6) $A \cdot E = E \cdot A = A$ – роль одиничної матриці в діях над матрицями така, як одиниці в діях над числами;

5. Піднесення матриці до степеня.

Піднесення матриці до степеня n розглядають, як множення матриці саму на себе n раз.

<u>Приклад</u>:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 - 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-3) - 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 - 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -12 & 6 \\ 12 & 19 & -12 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Транспонування матриць.

Щоб транспонувати матрицю $A = (a_{ij})_{mn}$ необхідно створити матрицю $A^T = (a_{ji})_{nm}$, тобто рядочки замінити стовбцями.

<u>Приклад</u>:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№1.1. Для матриць A та B: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $A + B$; б) $-4A$; в) A^T; г) $A \cdot B$; д) $B \cdot A$; е) A^2.

№1.2. Виконати множення матриць $A \cdot B$ та $B \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

№1.3. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ знайти матриці:

а) $2A + \frac{1}{2}B$; б) $2AB - B$; в) $2BA + 4A$.

№1.4. Для матриць A та B: $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 9 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, знайти матриці:

а) $A + B$; б) $-4A$; в) A^T; г) $A \cdot B$; д) $B \cdot A$; е) A^2.

№1.5. Для матриць A та B: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, знайти матриці: а) $2A + \frac{1}{2}B$; б) $2AB - B$; в) $2BA + 4A$.

№1.6. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ перевірити, чи справджуються формули скороченого множення:

а) $(à + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; б) $(à + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Виконати дії в наступних прикладах:

№1.7. $\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\right)^2$;

№1.8. $\left(\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\right)^2$;

№1.9. $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

№1.10. $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$;

№1.11. $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}12 & 0\\ 6 & -8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix};$

№1.12. $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}12 & 0\\ 6 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix};$

№1.13. $\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 8\end{pmatrix};$

№1.14. $\begin{pmatrix}-7 & 5\\ 1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -1\\ -7 & 5\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 0 & 3\end{pmatrix};$

№1.15. $\begin{pmatrix}4 & 1 & -5\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix};$

№1.16. $\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & -5\\ 2 & 3 & 7\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & -4 & -5\\ 2 & 4 & 6\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix};$

№1.17. $7\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 6 & -5\\ -9 & 3 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 7\\ 1 & 6\end{pmatrix};$

№1.18. $4\begin{pmatrix}1 & -4 & -5\\ 0 & 7 & 6\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & -5\\ -9 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 3 & -5\\ 2 & 8 & 7\end{pmatrix}.$

Індивідуальне завдання

Виконати дії $\begin{pmatrix}1 & n & 2\\ -3 & n-1 & 5\\ 4 & n+1 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n-3 & n-4 & n-5\\ -3 & 4 & -5\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}2 & -n & 1\\ n & 3 & -2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix},$

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 2. Визначники. Властивості визначників

Озн. Визначником (детермінантом) порядку n називається число, одержане в результаті певних обчислень квадратної матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{nn}$ того ж порядку. Позначається Δ або $\det A$. Поняття визначника ввів В. Лейбніц.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.2).$$

На відміну від матриці визначник обмежується справа та зліва одинарною лінією. Матриця − це таблиця, а визначник − це число.

Щоб обчислити визначник другого порядку, від добутку елементів головної діагоналі потрібно відняти добуток елементів допоміжної діагоналі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

<u>Приклад:</u> $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2.$

Правило обчислення визначника випливає із системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Якщо з другого рівняння знайти x_2 і підставити це значення в перше рівняння, то одержимо рівняння з однією невідомою x_1 . Розв'язування цього рівняння дає значення:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \qquad (1.3)$$

Знаменник $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ складено виключно з коефіцієнтів при невідомих, які утворюють матрицю $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$, тому визначник $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21.}$

Розглядання квадратної системи з трьох рівнянь вказує на правило обчислення визначників третього порядку, яке відрізняється від правила обчислення визначників другого порядку і має три рівносильних варіанти.

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} +$$

$$+ a_{33}a_{12}a_{21}).$$

Обчислюючи визначник третього порядку, знизу необхідно дописати два перших рядки, в результаті одержимо три головні і три допоміжні діагоналі:

2. Крім приписування знизу двох перших рядків, можна приписати два перших стовпці, що також дає три головні і три допоміжні діагоналі:

$$\Delta = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$+ a_{12}a_{21}a_{33}).$$

3. Для розкриття визначника третього порядку можна також застосувати правило трикутників:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) -$$

$$(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}) \qquad (1.4)$$

Для застосування правила трикутників проводимо наступні дії:

1. Знаходимо добуток елементів головної діагоналі.

2. Знаходимо два елементи, через які можна провести пряму, паралельну прямій, що проходить через головну діагональ (вище та нижче головної діагоналі).

3. Для кожної знайденої пари знаходимо елемент, розташований у найбільш віддаленому кутку, одержимо трикутник елементів. Ці три числа перемножуємо (їх дві пари) і додаємо до добутку елементів головної діагоналі. Маємо: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}$.

4. Знаходимо добуток елементів допоміжної діагоналі.

5. Знаходимо пари чисел аналогічно пункту 2 і знаходимо добуток трьох елементів двох трикутників. Одержимо суму: $a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{12}a_{21}a_{33}$.

6. Різниця двох одержаних сум і буде значенням визначника.

Правило розкриття визначника 3-го порядку ще називають ***правилом Саррюса***.

Приклад : $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 5\cdot 5 + 2\cdot(-3)\cdot(-2) + (-3)\cdot 3\cdot 6 -$

$-(-2)\cdot 5\cdot 6 - (-3)\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot(-3)\cdot 5 = 100 + 12 - 54 + 60 + 36 + 30 = 184.$

Властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовбцями.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доведення цієї властивості досить застосувати правило трикутників і порівняти одержані результати. Доведемо цю властивість для визначника третього порядку:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Отже, $\Delta_1 = \Delta_2$, тобто властивість справджується.

2. Перестановка двох рядків визначника рівносильна множенню його на –1.

Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{1} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 + 20 - 12 - 5 - 8 = 6; \ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 5 + 12 - 20 - 8 - 3 = -6.$$

3. Якщо визначник має два однакових рядки, або стовпці, то він дорівнює нулю. Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 5 + 20 - 20 - 5 - 8 = 0; \ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 5 + 4 - 6 - 5 - 4 = 0.$$

4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка, або стовпця визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника. Тобто,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 20 + 20 - 80 - 20 - 8 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 10 + 10 - 40 -$$

$$-10 - 4 = -36.$$

5. Якщо всі елементи деякого рядка, або стовпця визначника дорівнюють нулю, то сам визначник дорівнює нулю.

Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0$.

6. Якщо відповідні елементи двох рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю. Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$.

Перевіримо дану властивість на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 20 + 20 - 20 - 20 - 8 = 0.$$

7. Якщо кожен елемент деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник може бути зображений у вигляді суми двох визначників, у яких один у згаданому рядку має перші з заданих доданків, а інший другі; елементи, що знаходяться на решті місць у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Тобто,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться. Тобто, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити визначники в наступних завданнях:

№1.19. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$;

№1.20. $\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 14 & 1 \end{vmatrix}$;

№1.21. $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$;

№1.22. $\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$;

№1.23. $\begin{vmatrix} -6 & 11 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$;

№1.24. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -8 & -2 \end{vmatrix}$;

№1.25. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.26. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 \\ -9 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

№1.27. $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.28. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}$;

№1.29. $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 2 \\ -6 & -5 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

№1.30. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 2 \\ 13 & 7 & 4 \end{vmatrix}$;

№1.31. $\begin{vmatrix} 25 & 8 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}$;

№1.32. $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.33. $\begin{vmatrix} 11 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix}$;

№1.34. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 10 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$;

№1.35. $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 9 & 12 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$;

№1.36. $\begin{vmatrix} 20 & 3 & -3 \\ -5 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

№1.37. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}$;

№1.38. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Індивідуальне завдання

Обчислити визначники в наступних завданнях:

1) $\begin{vmatrix} n & n-1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} n & 2 & n+2 \\ 2 & n-1 & 7 \\ n+2 & -3 & -n \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} n & 5 & 2 & -2n \\ 1 & n-1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2n & 5 \\ 1 & -n & 6 & n+2 \end{vmatrix}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 3. Мінори. Алгебраїчні доповнення

Озн. Мінором M_{ik}, що відповідає елементу a_{ik} матриці (1), називається визначник, який відповідає матриці, утвореній з матриці (1) викреслюванням *i*-го рядка та *k*-го стовбця.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

З визначника порядку n можна знайти n^2 мінорів (за числом елементів визначника).

Озн. Алгебраїчним доповненням A_{ik}, що відповідає елементу a_{ik} матриці (1), називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна: $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$.

<u>Приклад</u>: Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Обчислити мінори M_{12} і M_{22} та алгебраїчні доповнення A_{12} і A_{22}.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8; \; M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 20 - (-12) = 32;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 6) = -(10 - 18) = 8;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4 \cdot 5 - 6 \cdot (-2)) = 20 - (-12) = 32.$$

Теорема 1. Значення визначника n-го порядку, що визначає матрицю (2.1), дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка або довільного стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Доведення: Покажемо, що для визначника $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ виконуються такі рівності:

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ $\qquad$ $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$ $\qquad$ $\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$

$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$ $\qquad$ $\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$

Доведемо, наприклад, першу з них:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} -$$
$$- a_{21}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta .$$

Аналогічно доводяться і інші рівності.

<u>Приклад</u>: Обчислити визначник розкладаючи його за елементами третього рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -11 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-11) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot (-7 \cdot 3 - 5 \cdot (-2)) + 2 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 3 - 5 \cdot 1) + (-11) \cdot 1 \cdot (3 \cdot (-2) - (-7) \cdot 1) = -44 -$$
$$- 8 - 11 = 63 .$$

Теорема 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка, або стовпця визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка, чи стовпця дорівнює нулю.

Доведення: Нехай маємо визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Розглянемо, наприклад, суму добутків елементів першого рядка визначника на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка:

$$\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) +$$
$$+ a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) = 0 .$$

<u>Приклад:</u> Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Додамо перший рядок до другого і четвертого, утворивши визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Переставимо місцями перший і третій стовпчики:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Додамо другий рядок до третього і четвертого рядків і винесемо спільний множник елементів третього та четвертого рядків:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{vmatrix} = -5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Віднявши третій рядок від четвертого, одержимо:

$$\Delta = -5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = -90.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити мінори та алгебраїчні доповнення в наступних завданнях:

№1.39. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix}$;

№1.40. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 14 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

№1.41. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}$; **№1.42.** $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Обчислити визначник розкладаючи його за елементами рядка або стовпця в наступних завданнях:

№1.43. $\begin{vmatrix} -7 & 11 \\ 13 & -2 \end{vmatrix}$; **№1.44.** $\begin{vmatrix} 33 & 14 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}$;

№1.45. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 15 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix}$; **№1.46.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 14 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$;

№1.47. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; **№1.48.** $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}$.

Індивідуальне завдання

Обчислити визначники в наступних завданнях:

1) $\begin{vmatrix} n & n-1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} n & 2 & n+2 \\ 2 & n-1 & 7 \\ n+2 & -3 & -n \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} n & 5 & 2 & -2n \\ 1 & n-1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2n & 5 \\ 1 & -n & 6 & n+2 \end{vmatrix}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 4. Ранг матриці

Нехай задано матрицю $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де k – число, не більше чисел m і n.

Озн. Визначник k порядку, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається мінором k-го порядку матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$.

Озн. Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Безпосередньо з означення випливає, що:

1) ранг існує для будь-якої матриці;

2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = 0$;

3) для квадратної матриці n-го порядку ранг дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця не вироджена.

Озн. Квадратна матриця називається виродженою, якщо її визначник дорівнює нулю.

Ранг матриці можна знайти так. Якщо всі мінори першого порядку дорівнюють нулю, то $r=0$. Якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r=1$. У випадку, коли є мінор другого порядку, відмінний від нуля, досліджуємо мінори третього порядку. Так продовжуємо доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку k дорівнюють нулю або мінорів порядку k не існує, тоді $r=k-1$.

Приклад: Знайти ранг матриці: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Серед мінорів першого порядку є відмінні від нуля, тому $r \geq 1$. Оскільки один з мінорів другого порядку $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, а всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, то $r=2$.

Вказаний метод знаходження рангу матриці не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників. Простіший метод ґрунтується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати елементарні перетворення, а саме:

а) переставити місцями два рядки, або стовпці;

б) помножити кожен елемент рядка, або стовпця на один і той самий відмінний від нуля множник;

в) додати до елементів рядка, або стовпця відповідні елементи другого рядка, або стовпця, помножені на одне і те саме число.

Приклад: Знайти ранг матриці: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Виконуючи елементарні перетворення, маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&1&0&-4&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&-5&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти ранг матриці:

№1.49. $\begin{pmatrix}2&1&3&1\\1&2&-2n&3\\3&3&1&4\end{pmatrix}$;

№1.50. $\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&1&1\\3&-2&1\end{pmatrix}$;

№1.51. $\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\2&0&1&3\\3&-1&2&2\end{pmatrix}$;

№1.52. $\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\5&1&7&2\\4&1&1&1\\10&1&10&6\end{pmatrix}$;

№1.53. $\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\3&5&6&-4\\4&5&-2&3\\5&8&24&-19\end{pmatrix}$;

№1.54. $\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\4&3&7&11\\5&1&6&11\end{pmatrix}$;

№1.55. $\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&1&2&3\\1&2&-1&0\\1&3&1&1\\2&5&0&1\end{pmatrix}$;

№1.56. $\begin{pmatrix}0&4&10&1\\4&8&18&7\\10&18&40&17\\1&7&17&3\end{pmatrix}$;

№1.57. $\begin{pmatrix}2&0&2&0&0\\0&1&0&1&0\\2&1&0&2&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$;

№1.58. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&0&0&2\\0&3&6&8&8\end{pmatrix}$

Індивідуальне завдання

Обчислити ранг матриці: $A=\begin{pmatrix}1&0&n&0\\n&0&2n&0\\3&0&6&0\end{pmatrix}$,

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 5. Обернена матриця. Матричні рівняння

Нехай задано матрицю $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$. Поставимо задачу знайти матрицю $\frac{1}{A}=A^{-1}$.

Озн. Квадратна матриця виду $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$ називається оберненою до матриці А.

Озн. Зведена матриця A^* складається з алгебраїчних доповнень шляхом транспонування: алгебраїчні доповнення, знайдені для даного рядка, записуються відповідним стовпцем: $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Теорема 3: Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, що матриця *A* була не виродженою.

Приклад: Знайти матрицю, обернену до заданої: $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці А і алгебраїчні доповнення всіх елементів:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-68.$$

$A_{11}=\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-17;$ $A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-5;$ $A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=9;$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-17;$ $A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7;$ $A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 32 \end{vmatrix}=1;$

$A_{31}=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=17;$ $A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-11;$ $A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-21.$

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} знайдена правильно, тому що $A \cdot A^{-1} = E$, тобто:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{68}\right) \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-17) + 5 \cdot (-5) - 1 \cdot 9 & 2 \cdot (-17) + 5 \cdot 7 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot 17 + 5 \cdot (-11) - 1 \cdot (-21) \\ 3 \cdot (-17) - 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 9 & 3 \cdot (-17) - 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 17 - 3 \cdot (-11) + 4 \cdot (-21) \\ 1 \cdot (-17) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 9 & 1 \cdot (-17) + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 17 + 2 \cdot (-11) + 3 \cdot (-21) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Безпоседнім обчисленням легко переконатися, що для оберненої матриці справджуються рівності: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Квадратна матриця може мати обернену тоді і тільки тоді, якщо вона не вироджена. Крім того, для не виродженої квадратної матриці А існує єдина обернена матриця.

Вміння знаходити обернену матрицю дає можливість розв’язувати матричні рівняння. Наприклад: $A \cdot X = B \Rightarrow X = \dfrac{B}{A} = B \cdot A^{-1}$.

<u>Приклад:</u> Розв’язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1};$$

Обчислимо обернену матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13;$$

$A_{11} = -3;$ $A_{12} = -5$ $A_{21} = -2$ $A_{22} = 1$

Тоді обернена матриця матиме вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot (-3) + 9 \cdot (-5) & 5 \cdot (-2) + 9 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) + 7 \cdot (-5) & 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -60 & -1 \\ -47 & -1 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} \frac{60}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{47}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Для заданих матриць знайти обернені матриці:

№1.59. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.60. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;

№1.61. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

№1.62. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

№1.63. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

№1.64. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.65. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

№1.66. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.67. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

№1.68. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв’язати матричне рівняння:

№1.69. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

№1.70. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}$;

№1.71. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$;

№1.72. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$;

№1.73. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; **№1.74.** $\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

№1.75. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; **№1.76.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

№1.77. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **№1.78.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

З’ясувати, чи існують матриці, обернені до заданих:

№1.79. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **№1.80.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Якщо так, то виконати перевірку $A \cdot A^{-1} = E$.

Індивідуальне завдання

1. Знайти обернену матрицю до заданої: $A = \begin{pmatrix} 1 & n & 2 \\ -3 & n-1 & 5 \\ 4 & n+1 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Розв’язати матричне рівняння: $\begin{pmatrix} 1 & n \\ n-7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -n \end{pmatrix}$,

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 6. Системи лінійних рівнянь

Озн. Лінійним називається рівняння, у якому невідомі величини мають перший степінь і між собою не перемножуються.

В алгебрі прийнято всі відомі величини позначати верхньою половиною латинської абетки, а невідомі − нижньою. Для рівнянь з малою кількістю невідомих так і поступають. Оскільки число букв абетки обмежене, для рівняння з великою кількістю членів всі невідомі позначають як x_i, коефіцієнти при невідомих як a_i ,а вільні члени $-b_i$. У системі рівнянь невідома x_i зустрічається у декількох рівняннях, тому для її коефіцієнта a_i додається індекс k номера рівняння, а коефіцієнт позначається як a_{ik}, де i − номер невідомої, а k − номер рівняння. Згідно цього система лінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.5}$$

Коефіцієнти при невідомих утворюють матрицю, яка складається з m рядків та n стовпців.

Вільні члени утворюють матрицю-стовпець:

$$B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

Усі невідомі $x_1; x_2; \ldots x_n$ також можна записати у вигляді матриці-стовпця:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Vmatrix} \tag{1.7}$$

Взагалі під час запису системи лінійних рівнянь необов'язково писати в *i*-му стовпці невідому x_i (крім неї, там інших невідомих просто немає) чи знак «дорівнює» перед вільними членами, тому систему записують у спрощеному вигляді.

$$\left\Vert \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array} \right\Vert \tag{1.8}$$

Знак «дорівнює» замінено вертикальною лінією, а знак матриці вказує на наявність системи рівнянь у матричному вигляді.

Озн. Система називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю, і неоднорідною, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Множина чисел $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ називається розв'язком системи, якщо при підстановці цих чисел в кожне рівняння системи отримаємо рівність.

Озн. Система називається сумісною, якщо вона має розв'язок.

Теорема 4: (критерій сумісності, **теорема Кронекера-Капеллі**):

Система лінійних рівнянь сумісна тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.

Озн. Дві системи називаються рівносильними, якщо вони мають однакові множини розв'язків.

Розглянемо основні методи розв'язування визначених систем, у яких число рівнянь дорівнює числу невідомих.

Матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь:

Теорема 5: Якщо визначник системи (1.5) відмінний від нуля, то система сумісна і має розв'язок, що визначається формулою: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$,

де Δ – головний визначник системи,

A^* – зведена матриця, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – стовбець вільних елементів.

<u>Приклад:</u> Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 7 \cdot 7 \cdot 6 =$$

$$= 36 + 14 + 105 - 9 - 20 - 294 = -168.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці за формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -(42 - 15) = -27;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 14 - 9 = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = -(42 - 2) = -40;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 12 - 3 = 9;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 7 \cdot 3) = -(4 - 21) = 17;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 35 - 3 = 32;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 7) = -(10 - 7) = -3;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 6 - 49 = -43.$$

Запишемо зведену матрицю: $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix}$.

Тоді стовбець невідомих елементів $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ дорівнює: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot (-17) - 40 \cdot 8 + 32 \cdot 9 \\ (-27) \cdot (-17) + 9 \cdot 8 + (-3) \cdot 9 \\ 5 \cdot (-17) + 17 \cdot 8 + (-43) \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -136 - 320 + 288 \\ 459 + 72 - 27 \\ -85 + 136 - 387 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -168 \\ 504 \\ -336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв’язок системи лінійних рівнянь.

Відповідь: {1; –3; 2}.

Метод Крамера:

Теорема 6: Якщо визначник системи (1.5) відмінний від нуля, то система сумісна і має розв’язок, що визначається формулами: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

Приклад: Розв’язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Розв'язання:

З попередніх обчислень головний визначник системи дорівнює $\Delta = -168$. Обчислимо додаткові визначники, замінюючи по черзі перший, другий та третій стовбець головного визначника стовбцем вільних елементів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -17 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-17)\cdot 3\cdot 6 + 8\cdot 2\cdot 1 + 7\cdot 5\cdot 9 - 1\cdot 3\cdot 9 - 2\cdot 5\cdot(-17) - 8\cdot 7\cdot 6 =$$

$$= -306 + 16 + 315 - 27 + 170 - 336 = -168;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -17 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 8\cdot 6 + 7\cdot 9\cdot 1 + 3\cdot(-17)\cdot 5 - 1\cdot 8\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot 9 - 7\cdot 6\cdot(-17) =$$

$$= 96 + 63 - 255 - 24 - 90 + 714 = 504;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 9 + 7\cdot 8\cdot 3 + 7\cdot 2\cdot(-17) - (-17)\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 8 - 7\cdot 7\cdot 9 =$$

$$= 54 + 168 - 238 + 153 - 32 - 441 = -336.$$

Визначимо корені системи рівнянь за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, {1; –3; 2} – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

Метод Гауса:

Одним із найпоширеніших методів розв'язування систем лінійних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса. Цей метод запропонований Гаусом і ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь.

У системі (1.5) (при $m = n$ від другого рівняння необхідно відняти перше, помножене на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$; від третього – відняти перше, помножене на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ і т. д. Одержимо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}'x_1 + a_{22}'x_2 + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ \quad\quad \ldots \\ a_{n1}'x_1 + a_{n2}'x_2 + \ldots + a_{nn}'x_n = b_m' \end{cases} \tag{1.9}$$

У цій системі від третього рівняння віднімемо друге, помножене на a_{32}'/a_{22}', від четвертого – друге, помножене на a_{42}'/a_{22}' і т.д. Одержимо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}'x_1 + a_{22}'x_2 + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ \qquad a_{33}''x_3 + \ldots + a_{3n}''x_n = b_3'' \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}''x_1 + a_{n2}''x_2 + \ldots + a_{nn}''x_n = b_m'' \end{cases} \tag{1.10}$$

Далі аналогічно чинимо зі всіма рівняннями, починаючи з третього: від четвертого віднімаємо третє, помножене на a_{43}''/a_{33}'' і т.д. Таку процедуру необхідно провести n разів, у результаті чого одержимо трикутну систему, у якій не буде елементів зліва від головної діагоналі. Штрихи біля коефіцієнтів означають, що при кожній дії коефіцієнти змінюють своє значення

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}'x_1 + a_{22}'x_2 + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ \qquad a_{33}''x_3 + \ldots + a_{3n}''x_n = b_3'' \\ \qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}^{\,n-1}x_n = b_n^{\,n-1} \end{cases} \tag{1.11}$$

З останнього рівняння знаходимо $X_n = \dfrac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}}$; підставивши це значення в $(n-1)$-е рівняння, знайдемо X_{n-1}. Таким чином поступово дійдемо до X_1.

Розглянемо даний метод на прикладі:

<u>Приклад:</u> Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}.$$

Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Тоді маємо нову систему: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad 3y + z = 9 \\ \qquad z = 3 \end{cases}$, з якої отримуємо: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}.$

Видозміною методу Гауса є метод Жордана-Гауса, у якому нулі отримують не тільки нижче головної діагоналі, але й вище неї. Для цього після першого ж віднімання методом Гауса від першого рівняння віднімають друге, помножене на a_{1n}/a_{2n}', так щоб в першому рівнянні зникло X_n. Далі аналогічно від третього віднімають друге, помножене на a_{3n}'/a_{2n}' і т. д., поки не зникне X_n у всіх рівняннях крім останнього. Дії ліквідації перших та останніх невідомих виконуються почергово: x_1 і x_n, x_2 і x_{n-1} і т. д. У результаті проведених дій система матиме вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & & = b_1' \\ & a_{22}x_2 & & & = b_2' \\ & & a_{33}x_3 & & = b_3' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & a_{nn}^{(n+1)}x_n & = b_n^{(n+1)} \end{cases} \tag{1.12}$$

З цієї системи відразу ж знаходиться будь-яка невідома.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв’язати систему лінійних рівнянь:

№1.81. $\begin{cases} 4x-3y-2z=9, \\ 2x+5y+3z=-7, \\ 6x-3y+5z=5; \end{cases}$

№1.82. $\begin{cases} x+2y-3z=7, \\ 3x-y-4z=13, \\ 4x+y+2z=0; \end{cases}$

№1.83. $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ x-y-3z=13, \\ 3x-2y+4z=-15; \end{cases}$

№1.84. $\begin{cases} x+y-2z=4, \\ 2x-3y+z=3, \\ 3x-2y+6z=0; \end{cases}$

№1.85. $\begin{cases} 5x-3y+6z=6, \\ 2x-y-3z=8, \\ x+4y-2z=9; \end{cases}$

№1.86. $\begin{cases} x-y+z=3, \\ 2x+y+z=11, \\ x+y+2z=8; \end{cases}$

№1.87. $\begin{cases} 2x-3y-4z=-5, \\ x+5y-5z=-6, \\ 8x-2y+4z=-10; \end{cases}$

№1.88. $\begin{cases} 2x+2y+z=1, \\ 3x+y+2z=-2, \\ 4x-y-7z=7; \end{cases}$

№1.89. $\begin{cases} x-8y+3z=1, \\ 2x-6y+z=4, \\ 0{,}1x-2y+z=0; \end{cases}$

№1.90. $\begin{cases} x-5y+z=4, \\ 2x-y+3z=14, \\ 3x+5y+z=8; \end{cases}$

№1.91. $\begin{cases} 3x-y-4z=-2, \\ 6x+2y+z=9, \\ 2x+4y-3z=3; \end{cases}$

№1.92. $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=-2, \\ 4x-y+5z=3; \end{cases}$

Індивідуальне завдання

Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

1. $\begin{cases} 2x-3y+z=-6, \\ 3x+3y-2z=20, \\ 5x-6y+4z=-12. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+3y+z=0, \\ 2x+y+3z=4, \\ 3x+2y+z=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+5y+9z=-20, \\ 9x-7y+3z=1, \\ 6x+4y+7z=-2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x-2y+3z=-9, \\ 3x+5y-4z=25, \\ 7x+2y+3z=2; \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+z=-2, \\ 2x+3y-z=1, \\ x-y+2z=-7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x+4y+2z=-5, \\ 2x-4y+3z=20, \\ 4x-3y-5z=3; \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+2y+4z=-3, \\ 2x-3y+z=-4, \\ 4x-5y-2z=10; \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y+3z=-2, \\ 3x+4y-2z=-17, \\ 2x+3y+z=-9; \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+5y-2z=9, \\ 4x+y-4z=9, \\ x+y-4z=9; \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-y+z=3, \\ 2x+y+z=1, \\ x+y+2z=8. \end{cases}$

/Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку. Наприклад, студенти за номерами 3, 13 та 23 розв'язують систему №3./

§ 7. Прямокутні системи

Згідно з теоремою Кронекера-Капеллі для сумісних систем ранг матриці A повинен дорівнювати рангу розширеної матриці. При знаходженні рангу переходять від мінора нижчого порядку до облямовуючого його мінора вищого порядку. Якщо одержаний ранг дорівнює r, то з матриці A вибирають r лінійно незалежних рядків: у системі залишають лише ті рівняння, коефіцієнти яких увійшли у вибрані рядки. У цих рівняннях зліва залишимо такі r невідомих, для яких визначник з їх коефіцієнтів не дорівнює нулю. Інші невідомі переносимо вправо і вважаємо їх вільними. Цим довільним невідомим надаємо довільні значення і знаходимо невідомі зліва (наприклад, за правилом Крамера).

Приклад:

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1 \\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5=4; \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5=0 \end{cases} \qquad A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 \end{Vmatrix}$$

Мінор 2-го порядку: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-3-4=-7\neq0.$

Мінор 3-го порядку: $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -9 & -8 & 1 \end{vmatrix} = -8-8+27+36+1-8=0.$

Розширена матриця: $A = \left\| \begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$

Мінор 2-го порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-3=1\neq 0.$

Мінор 3-го порядку: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ -8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+4-32+24+4-0=0.$

Ранг матриці A і ранг розширеної матриці $r=2$, тому система сумісна, але не визначена, (число невідомих більше за число рівнянь). Запишемо два рівняння, у яких зліва залишимо дві невідомі x_1 і x_2 (у нас $r=2$):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{cases}$$

При додаванні одержимо: $4x_1 = 5 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{4} + \frac{x_3}{4} - \frac{3x_4}{4} - x_5.$

Тоді:

$$x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 - x_1 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 - \frac{5}{4} - \frac{x_3}{4} + \frac{3x_4}{4} + x_5 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Одержали: $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4. \end{cases}$

Це загальний розв'язок системи, з якого можна одержати низку розв'язків, надаючи вільним невідомим конкретні значення. Наприклад: $(\frac{5}{4};\ -\frac{1}{4};\ 0;\ 0;\ 0)$; (2, 5, 3, 0, 0) і т. д. є розв'язками системи.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Використовуючи теорему Кронекера-Капеллі, встановити чи сумісна система і, якщо сумісна розв'язати:

№1.93. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$ **№1.94.** $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3, \\ 4x_1 + 9x_2 = 11; \end{cases}$

№1.95. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$ **№1.96.** $\begin{cases} 7x_1 - 8x_2 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 = -4; \end{cases}$

№1.97. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$ **№1.98.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ 3x_1 - x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$

№1.99. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -5; \end{cases}$ **№1.100.** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \end{cases}$

№1.101. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -5; \end{cases}$ **№1.102.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$

Індивідуальне завдання

Дослідити систему на несумісність і, якщо вона сумісна розв’язати:

$\begin{cases} Nx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 - Nx_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + (N+1)x_4 = 3; \end{cases}$ де N – остання цифра номера студента за списком.

Запитання до розділу І:

1. Що називається лінійним рівнянням?
2. Що називають матрицею? Види матриць.
3. Дії над матрицями.
4. Що називають визначником? Властивості визначників.
5. Правила розкриття визначників другого та третього порядків.
6. Мінор та алгебраїчне доповнення.
7. Правило розкриття визначника будь-якого порядку.
8. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.
9. Правило Крамера.
10. Що називають оберненою матрицею?
11. Матричний метод розв’язування систем лінійних рівнянь.
12. Що таке ранг матриці?
13. Теорема Кронекера – Капеллі.
14. Прямокутні та однорідні системи.