IV. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ПРОСТОРІ

§1. Найпростіші задачі

Для знаходження співвідношень між точками, лініями та поверхнями застосовуються поняття векторної алгебри. За основу декартової системи взята правостороння система координат, у якій існує порядок обходу проти годинникової стрілки (рис. 4.1 а). Рідше застосовується (рис. 4.1 б) лівостороння система.

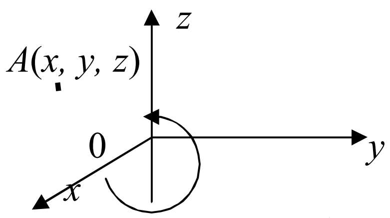

Рис. 4.1 а)

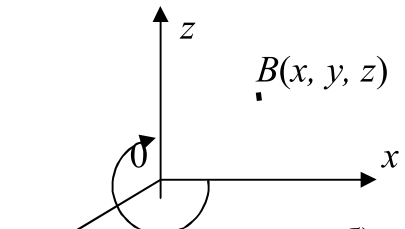

Рис. 4.1 б)

1. Відстань між двома точками:

Відстань між двома точками знаходиться аналогічно, як для точок заданих у площині:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,, \tag{4.1}$$

2. Поділ відрізка в заданому відношенні:

Поділ відрізка у заданому відношенні проводиться за аналогічними для площини формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{4.2}$$

Якщо відрізок ділиться пополам, то $\lambda = 1$.

Приклад: Знайти довжину та координати середини відрізка, заданого точками $A(1; 2; 3)$ і $B(2; 4; 5)$.

Обчислимо довжину відрізка за формулою (4.1.):

$$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3.$$

Знайдемо координати середини відрізка за формулами (4.2.):

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2};\quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+4}{2} = 3;\quad z_c = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4.$$

Отже, $C(\frac{3}{2}; 3; 4)$.

§2. Рівняння площини та прямої лінії

1. Рівняння площини з нормальним вектором

Нехай в декартовій системі координат задана площина α з відомою точкою $M(x_0; y_0; z_0)$, а $\vec{n}$ – вектор, який є перпендикулярним до площини P (рис. 4.2).

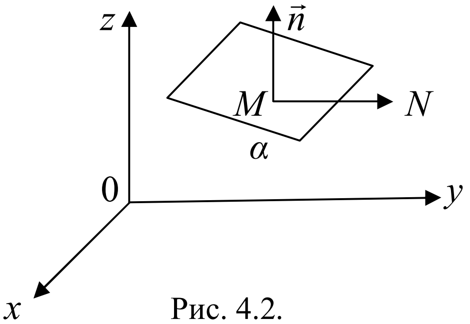

Рис. 4.2.

Вектор $\vec{n}$ називається нормаллю. З умови перпендикулярності векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{NM}$ випливає: $\overrightarrow{NM}\cdot\vec{n}=0$.

Якщо $\vec{n}$ $(A;\ B;\ C)$ і $\overrightarrow{NM}$ $(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$, то рівняння площини α матиме вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Після спрощення одержимо:

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{4.3}$$

де $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Отже, у просторі будь-якій площині відповідає рівняння І порядку. Множники A, B, C називаються спрямовуючими коефіцієнтами.

Якщо рівняння площини поділити на D, то одержимо:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{4.4}$$

Отримане рівняння є рівнянням площини у «відрізках» на осях.

Приклад: Скласти рівняння площини, яка перпендикулярна до осі Oy і проходить через точку $M_0\ (-3;\ 4;\ 5)$.

Так як орт $\vec{j}(0;1;0)$ перпендикулярний до площини, то його можна розглядати як нормальний вектор. Отже, шукане рівняння має вигляд: $0(x+3)+1(y-4)+0(z-5)=0$, або $y=4$.

2. Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай на площині α задано три точки: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій. Ці точки одночасно визначають площину. Знайдемо її рівняння. Візьмемо на площині довільну точку $M(x;y;z)$ і знайдемо вектори:

$$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

Ці вектори лежать в площині α, тобто вони компланарні. Оскільки мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю, то $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$, або

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.5.)$$

Маємо рівняння площини, що проходить через три точки.

<u>Приклад:</u> Записати рівняння площини, що проходить через точки: *A_1 (2; 3; –4); A_2 (5; 7; 9); A_3 (2;– 2; 4).*

Рівняння площини $A_1A_2A_3$ у загальному вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_a & y-y_a & z-z_a \\ x_в-x_a & y_в-y_a & z_в-z_a \\ x_c-x_a & y_c-y_a & z_c-z_a \end{vmatrix} = 0, \text{ тобто } \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ 5-2 & 7-3 & 9+4 \\ 2-2 & -2-3 & 4+4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$32(x-2)-15(z+4)-24(y-3)+65(x-2)=0 \Rightarrow 97x-24y-15z-182=0.$$

3. Рівняння прямої, що задано точкою і напрямним вектором

Нехай в просторі в прямокутній системі координат задано пряму точкою $\grave{I}\ (\tilde{o}_0; \acute{o}_0; z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s}(m; n; \eth)$, тоді канонічне рівняння прямої в просторі:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p} \qquad (4.6.)$$

4. Рівняння прямої, що задано двома точками

Нехай в просторі в прямокутній системі координат задано пряму двома точками $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді рівняння прямої матиме вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (4.7.)$$

<u>Приклад:</u> Записати рівняння прямої A_1A_2, якщо *A_1 (2; 3; –4); A_2 (5; 7; 9).*

Для прямої A_1A_2: $\dfrac{x-2}{5-2} = \dfrac{y-3}{7-3} = \dfrac{z-(-4)}{9-(-4)} \Rightarrow \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+4}{13}$.

5. Рівняння прямої, що задано двома площинами

Якщо дві площини задані рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ і } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

то при перетині вони утворюють пряму, рівняння якої міститься в розв’язку системи цих двох рівнянь. Задаючись двома значеннями $z=z_1$ і $z=z_2$, одержують дві системи, з яких знаходять x_1, y_1 та x_2, y_2. Отримують дві точки $(x_1; y_1; z_1)$ і $(x_2; y_2; z_2)$, з яких знаходять рівняння прямої.

<u>Приклад:</u> Записати рівняння прямої, утвореної площинами

2x+3y+4z−20=0 та 5x−y+z−6=0.

Нехай $z=0$, то отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 2x+3y=20 \\ 5x-y=6 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} 2x+3y=20 \\ 15x-3y=18 \end{cases} \Rightarrow . \begin{cases} x=\dfrac{38}{17} \\ y=\dfrac{88}{17} \end{cases}, \text{ тобто } A\left(\frac{38}{17};\quad \frac{88}{17};\quad 0\right).$$

Нехай z=3, то матимемо рівняння: $\begin{cases} 2x+3=8 \\ 5x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$, тобто B(1; 2; 3).

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$\frac{x-1}{\frac{38}{17}-1}=\frac{y-2}{\frac{88}{17}-2}=\frac{z-3}{0-3} \Rightarrow \frac{x-1}{\frac{21}{17}}=\frac{y-2}{\frac{54}{17}}=\frac{z-3}{-3}.$$

§3. Перетин прямих і площин

1. Кут між двома прямими.

Нехай прямі a і b задано рівняннями: $\dfrac{x-x_1}{\grave{a}_{\tilde{o}}}=\dfrac{y-y_1}{\grave{a}_{\acute{o}}}=\dfrac{z-z_1}{\grave{a}_z}$ і $\dfrac{x-x_1}{b_{\tilde{o}}}=\dfrac{y-y_1}{b_{\acute{o}}}=\dfrac{z-z_1}{b_z}$. Кут між цими прямими дорівнює куту між їхніми напрямленими векторами $\vec{s}_1\left(a_x;a_y;a_z\right)$ та $\vec{s}_2\left(b_x;b_y;b_z\right)$, тоді косинус кута між цими прямими дорівнює: $\cos A=\dfrac{a_x в_x+a_y в_y+a_z в_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\sqrt{в_x{}^2+в_y{}^2+в_z{}^2}}$ (4.8.)

<u>Приклад:</u> Обчислити косинус кута $A_3A_1A_2$, якщо $A_1(2;\ 3;\ -4);\ A_2(5;\ 7;\ 9);\ A_3(13;\ 1;\ 2)$.

Враховуючи, що рівняння прямої можна подати у вигляді:

$\dfrac{x-x_1}{a_x}=\dfrac{y-y_1}{a_y}=\dfrac{z-z_1}{a_z}$, то для прямої A_1A_2 $\vec{a}$ $(3;\ 4;\ 13)$, а для A_1A_3 $\vec{в}$ $(11;\ -2;\ 6)$.

Тоді $\cos A=\dfrac{3\cdot 11+4\cdot(-2)+13\cdot 6}{\sqrt{3^2+4^2+13^2}\sqrt{11^2+(-2)^2+6^2}}=\dfrac{103}{\sqrt{194}\cdot\sqrt{161}}\approx 0{,}5829$.

Отже, $\angle A=\arccos 0{,}5829=53^{\circ}30'$.

2. Умова перпендикулярності та паралельності двох прямих.

Нехай прямі a і b задано рівняннями: $\dfrac{x-x_1}{\grave{a}_{\tilde{o}}}=\dfrac{y-y_1}{\grave{a}_{\acute{o}}}=\dfrac{z-z_1}{\grave{a}_z}$ і $\dfrac{x-x_1}{b_{\tilde{o}}}=\dfrac{y-y_1}{b_{\acute{o}}}=\dfrac{z-z_1}{b_z}$.

Тоді умова перпендикулярності прямих матиме вигляд:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad (4.9.)$$

Умова паралельності: $$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \qquad (4.10.)$$

3. Кут між площинами.

Нехай задано дві площини α_1 та α_2 рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ цих площин. Тоді косинус кута дорівнює:

$$cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (4.11)$$

<u>Приклад:</u> Знайти кут між площинами $2x + y + 3z - 1 = 0$ і $x + y - z + 5 = 0$.

За формулою (4.11) маємо $cos\varphi = \dfrac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 0$, отже дані площини перпендикулярні.

4. Умова перпендикулярності та паралельності двох площин.

Якщо площини α_1 та α_2 перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто рівність:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (4.12.)$$

Є умовою перпендикулярності площин.

Якщо площини α_1 та α_2 паралельні, то координати їхніх нормальних векторів пропорційні, тобто умовою паралельності площин є рівність відношень:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (4.13.)$$

§4. Основні співвідношення

1. Відстань від точки до прямої.

Якщо задане рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ площини α і точка $M(x_0; y_0; z_0)$, що не лежить на цій площині, то відстань d від точки M до площини α знаходиться за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (4.14.)$$

Приклад: Знайти висоту піраміди, заданої своїми вершинами A_1 *(–1; 2; –1); A_2 (1; 0; 2); A_3 (0; 1; –1); A_4 (2; 0; –1).*

Рівняння площини основи, що проходить через точки A_2, A_3, A_4:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0, \text{ звідки } 3x+6y+z-5=0.$$

Висоту знайдемо як відстань від точки A_1 *(–1; 2; –1)* до площини $A_2A_3A_4$:

$$A_1H = \frac{|-3+12-1-5|}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{46}}.$$

2. Площа трикутника.

Нехай маємо точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ та $A_3(x_3;y_3;z_3)$. Площу трикутника $A_1A_2A_3$ обчислимо, користуючись властивістю добутку векторів A_1A_2 і A_1A_3:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|, \text{ де}$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} y_в-y_a & z_в-z_a \\ y_c-y_a & z_c-z_a \end{vmatrix}\cdot\vec{i} + \begin{vmatrix} x_в-x_a & z_в-z_a \\ x_c-x_a & z_c-z_a \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} x_в-x_a & y_в-y_a \\ x_c-x_a & y_c-y_a \end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

(4.15)

Приклад: Дано координати A_1 *(2; 3; –4); A_2 (5; 7; 9); A_3 (2;– 2; 4).* Обчислити площу трикутника $A_1A_2A_3$.

Площу трикутника обчислимо за формулою: $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|$. Для цього знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} + \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} = (32+65)\vec{i} + (24-0)\vec{j} + (-15-0)\vec{k} =$$

$$= 97\vec{i} + (-24)\vec{j} + (-15)\vec{k}.$$

Тоді: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{97^2+(-24)^2+(-15)^2} = \sqrt{10210}$.

Отже, $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{10210} \approx 50$ *кв.од.*

3. Об'єм піраміди.

Нехай задано піраміду вершинами $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$ та $A_4(x_4;y_4;z_4)$, тоді її об'єм дорівнює:

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_в-x_a & y_в-y_a & z_в-z_a \\ x_c-x_a & y_c-y_a & z_c-z_a \\ x_д-x_a & y_д-y_a & z_д-z_a \end{vmatrix} \qquad (4.16.)$$

Приклад: Знайти об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$, якщо задано координати її вершин A_1 *(2; 3; –4)*; A_2 *(5; 7; 9)*; A_3 *(2;– 2; 4)*; A_4 *(13; 1; 2)*.

Об’єм піраміди обчислимо за формулою (4.16), тоді:

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 13 \\ 0 & -5 & 8 \\ 11 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\left(-90+352+715+48\right) = 170\frac{5}{6}\,куб.од.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

4.1. На якій відстані від початку координат знаходяться точки *A (–3; 0; 4), B (0; 8; –6), C (1; –1; 4)*.

4.2. Задано дві вершини *A (2; –3; –5), B (–1; 3; 2)* паралелограма *АВСД* і точку перетину його діагоналей *M (4; –1; 7)*. Визначити координати двох інших вершин цього паралелограма.

4.3. Задано вершини трикутника *A (3; 2; –1), B (5; –4; 7)* і *C (–1; 1; 2)*. Обчислити довжину його медіани, що проведена із вершини *C*.

4.4. Обчислити відстань від точки *P (–1; 1; –2)* до площини, що проходить через три задані точки *A (1; –1; 1), B (–2; 1; 3)* і *C (4; –5; –2)*.

4.5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку перетину трьох площин $2x - y - z - 1 = 0$, $x + 2z - 4 = 0$, $x - y = 0$, через початок координат і через точку *P (7; 1; 2)*.

4.6. Знайти точку перетину площин $2x - y + 3z - 9 = 0$, $3x + y - 4z + 6 = 0$, $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

4.7. Знайти довжину відрізка A_1A_2, якщо A_1 *(1; 1; 1)*; A_2 *(–1; –2; –2)*.

4.8. Дано координати вершин трикутника $A_1A_2A_3$ A_4: A_1 *(1; 1; 1)*; A_2 *(–1; –2; –2)*; A_3 *(0;– 3; 3)*. Знайти рівняння сторін A_1A_2 і A_1A_3.

4.9. Знайти косинус кута $A_3A_1A_2$, якщо A_1 *(1; 1; 1)*; A_2 *(–1; –2; –2)*; A_3 *(0;– 3; 3)*.

4.10. Знайти площу грані $A_1A_2A_3$, якщо A_1 *(1; 1; 1)*; A_2 *(–1; –2; –2)*; A_3 *(0;– 3; 3)*.

4.11. Знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$, якщо A_1 *(1; 1; 1)*; A_2 *(–1; –2; –2)*; A_3 *(0;– 3; 3)*.

4.12. Знайти об’єм піраміди $A_1A_2A_3$ A_4, якщо задано координати її вершин A_1 *(1; 1; 1)*; A_2 *(–1; –2; –2)*; A_3 *(0;– 3; 3)*; A_4 *(4; 3; –1)*.

Індивідуальне завдання

Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3$ A_4. Знайти:

а) довжину ребра A_1A_2;

б) рівняння ребер A_1A_2 і A_1A_3;

в) косинус кута $A_3A_1A_2$;

г) площу грані $A_1A_2A_3$;

д) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

е) об’єм піраміди.

1. A_1 *(1; 2; 1)*; A_2 *(–3; 2; –2)*; A_3 *(–5;– 3; 3)*; A_4 *(0; 2; –1).*
2. A_1 *(3; 2; 1)*; A_2 *(–3; –1; 2)*; A_3 *(–5; –2; –3)*; A_4 *(0; 1; –6).*
3. A_1 *(2; 1; 2)*; A_2 *(–3; –2; 2)*; A_3 *(–3; –5; –3)*; A_4 *(0; 2; –4).*
4. A_1 *(1; 1; 3)*; A_2 *(–4; –3; 2)*; A_3 *(–4;– 3; –5)*; A_4 *(0; 2; –7).*
5. A_1 *(1; 2; 6)*; A_2 *(–3; –3; – 2)*; A_3 *(–5; –5; 3)*; A_4 *(0; 2; –1).*
6. A_1 *(2; 4; 6)*; A_2 *(–3; –3; –1)*; A_3 *(–5; –5; 2)*; A_4 *(0; 1; –6).*
7. A_1 *(4; 3; 6)*; A_2 *(–2; –3; –2)*; A_3 *(–5; –5; 1)*; A_4 *(0; 2; –3).*
8. A_1 *(5; 4; 6)*; A_2 *(–4; –3; –2)*; A_3 *(–5; –5; 4)*; A_4 *(0; 2; –4).*
9. A_1 *(1; 6; 6)*; A_2 *(–3; –3; –5)*; A_3 *(–2; –5; 3)*; A_4 *(0; 2; –7).*
10. A_1 *(1; 7; 6)*; A_2 *(–5; –3; –2)*; A_3 *(–4; –5; 3)*; A_4 *(0; 2; –8).*

/Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку./

Запитання до розділу IV:

1. Що таке лівостороння та правостороння трійка координат?
2. За якою формулою знаходиться відстань між двома точками.
3. Вказати формулу координат точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні.
4. Написати рівняння площини у просторі.
5. Написати рівняння прямої у просторі
6. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.
7. Умови паралельності та перпендикулярності площин.
8. Відстань від точки до площини.
9. Площа трикутника.
10. Об’єм піраміди.