V. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

§1. Змінні величини. Послідовності та функції

Озн. Змінною називається величина (x), яка може приймати різноманітні значення.

Наприклад, яскравість добового освітлення змінюється зі зміною часу, тому вона є величина змінна.

Якщо з якоїсь причини змінна величина перестає змінюватись і приймає однакові значення, то вона стає сталою величиною. Тому сталу величину можемо вважати частковим випадком величини змінної.

Будь-яка величина може змінюватися двома способами: або приймати значення шкали дійсних чисел (наприклад, температура повітря), або тільки деякі з них (наприклад, кількість студентів групи може змінюватися тільки на ціле число). Перші величини називають неперервними, а другі ─ дискретними.

Озн. Якщо величина змінюється таким чином, що її значення можна визначити за її номером (від початку зміни), то таку змінну величину називають послідовністю.

Нехай задано послідовність $a_n = 2n+3$. Якщо n=5, то $a_5 = 2\cdot 5+3$.

Якщо дві змінних x та y, взяті зі шкали дійсних чисел, зв'язані між собою так, що кожному значенню x відповідає одне і тільки одне значення y, то між x та y існує функціональна залежність, яку позначають $y = f(x)$ або $f(x,y)=0$.

Озн.: Функцією називають відповідність між елементами двох множин x та y, при якій кожному елементові першої множини x відповідає не більше одного елемента y другої множини. Наприклад: $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x + 2$.

Якщо функція записана у вигляді $y = f(x)$, то такий спосіб запису називається явним аналітичним, а якщо $f(x,y)=0$, то неявним аналітичним. Прийнята також простіша форма назви: "функція задана явно ", або "функція задана неявно ". Від явної форми завдання завжди можна перейти до неявної форми. Тобто, якщо функція задана у вигляді $y = x^2+4$, то цей запис можна подати і у такому вигляді − $x^2 - y + 4 = 0$. Але перехід від неявної форми до явної можливий не завжди. Наприклад, якщо у вигляді $xy + 8\sin(x+y) = 4$, то y явно не виражається.

Для будь-якої функції існує область існування, або ще кажуть область допустимих значень, область визначення, область завдання. Під цією областю розуміють межі зміни величини x, як аргументу.

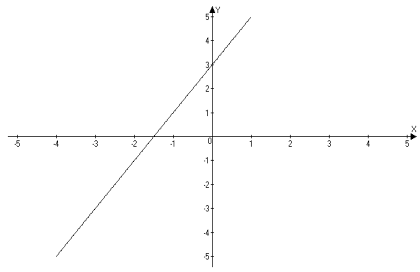
Озн. Множина всіх тих елементів з *Х*, для яких є відповідні елементи множини *У*, називається областю визначення, а множина всіх тих елементів з *У*, що відповідають елементам з *Х*, − областю значень даної функції.

Приклад: Для функції $y = x + 4$ область визначення – всі дійсні числа: $x \in R$. Область значень – це також множина всіх дійсних чисел: $y \in R$.

Для функції $y = \frac{4}{x}$ область визначення $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, область значень $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Озн. Графіком функції *f* називається множина точок (*x;y*) на координатній площині, таких, що перебігають всю множину D(*f*), а *y = f(x)*.

Приклад: Побудувати графік функції $y = 2x + 3$.



Функції бувають елементарні та неелементарні. До елементарних відносяться усі алгебраїчні функції, в яких виконуються тільки дії алгебраїчного додавання, множення, ділення, піднесення до сталого степеня та добування кореня, степеневі типу: $y = a^x$, логарифмічні, тригонометричні та обернені тригонометричні. Будь-яка скінчена комбінація цих функцій утворює елементарну функцію. При нескінченній кількості дій функція перестає бути елементарною. Приклад неелементарної функції: $y = \sin x + \sin 2x + ... + \sin kx + ...$.

Існує цілий ряд функцій (інтегральні, тощо), які не є елементарними і вивчаються в курсі вищої математики.

Функція $y = f(x)$ називається функцією ***однієї*** змінної, функція $z = f(x, y)$ − функцією двох змінних, а функція $w = f(x, y, z, t, ...)$ є функцією багатьох змінних.

Основними способами завдання функції є аналітичний, графічний і табличний спосіб.

При *аналітичному способі* завдання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії потрібно виконати над значенням аргументу та сталими числами, щоб дістати відповідне значення функції.

При *графічному способі* завдання функції *y = f(x)* відповідність між змінними *x* і *y* задається графіком – множиною точок *(x; y)* площини, координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$. Залежно від того, яку задано функцію, графік її може складатись з однієї суцільної лінії, кількох ліній, дискретної множини точок площини тощо.

Графічним способом завдання функції широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з використанням таких самописних приладів, як барограф (для запису змін атмосферного тиску), осцилограф (для запису змін електричного струму або напруги), електрокардіограф (для запису електричних явищ, пов'язаних з діяльністю серця), термограф (для запису змін температури повітря) тощо. Криві (їх називають відповідно барограма, осцилограма, електрокардіограма, термограма), що їх виписують прилади, задають цілком певну функцію, властивості якої характеризують перебіг того чи іншого процесу.

Табличний спосіб завдання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці.

Табличний спосіб досить часто використовується при проведенні експериментів, коли задають певну сукупність $x_1, x_2 \ldots, x_n$ значень аргументу і дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції: $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Якщо функція задана аналітично, то для неї можна побудувати таблицю, тобто табулювати функцію. Табулюються, як правило, функції які виражаються складною формулою, але часто зустрічаються в практиці Такими є, наприклад, таблиці логарифмів, тригонометричні таблиці тощо.

Крім розглянутих існують й інші способи завдання функції. Так, функцію можна задати словесним описом залежності між змінними.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти значення функції у вказаних точках:

5.1. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$ у точках –1; 0,5; 2;

5.2. $y = \sqrt{5 - 2x}$ у точках 0; 1; 2,5;

5.3. $y = arcsin\dfrac{x}{4}$ у точках –2; 4; 2;

5.4. $y = sin\dfrac{x}{2}$ у точках $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{\pi}{2}$; π.

5.5. $y = \dfrac{1}{x} + \lg x$ у точках 0,1; 1; 10.

Знайти область визначення функції

5.6. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$;

5.7. $y = \sqrt{5 - 2x}$;

5.8. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$;

5.9. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$;

5.10. $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

5.11 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

5.12. $y=arcsin\dfrac{x}{4}$;

5.13. $y=\dfrac{1}{\lg x}+\sqrt{2+x}$;

5.14. $y=\sqrt{3-x}+arcsin\dfrac{3-2x}{5}$;

5.15. $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$;

5.16. $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\lg\left(x^3-x\right)$;

5.17. $y=\sqrt{sinx}+\sqrt{16-x^2}$.

Користуючись графіком функції $y=x^2$, побудувати графіки функцій:

5.18. $y=2x^2+2x+2$;

5.19. $y=2x^2-2x+4$;

5.20. $y=-x^2+2x+8$;

5.21. $y=-x^2+4x+10$;

5.22. $y=x^2+x+1$;

5.23. $y=x^2-6x+8$.

Користуючись графіком функції $y=sinx$, побудувати графіки функцій:

5.24. $y=sin\dfrac{x}{2}$;

5.25. $y=2sin\dfrac{x}{2}$;

5.26. $y=1+2sin\dfrac{x}{2}$;

5.27. $y=\dfrac{1}{2}sinx$;

5.28. $y=-\dfrac{1}{2}sinx$;

5.29. $y=2-\dfrac{1}{2}sinx$.

Побудувати графіки функцій:

5.30. $y=\begin{cases}1-x, & x\in(-\infty;0]\\ 1, & x\in(0;\infty)\end{cases}$;

5.31. $y=\begin{cases}x^2, & x\in(-\infty;2]\\ 4, & x\in(2;\infty)\end{cases}$;

5.32. $y=\begin{cases}x^2+1, & x\in(-\infty;0]\\ x^2-1, & x\in(0;\infty)\end{cases}$.

Індивідуальне завдання

Знайти область визначення функції:

а) $y=\dfrac{5}{x^2-(n-1)\cdot x-n}$;

б) $y=\sqrt{x}+\sqrt{n^2-x^2}$;

в) $y=\dfrac{x}{\sqrt{n-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$;

г) $y=\dfrac{1}{n-x}+\lg\left(x^2-x\right)$.

Побудувати графіки функцій:

а) $y=x^2+nx+n+1$;

б) $y=2cos(x-1)$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§2. Границя послідовності та функції

<u>Нескінченно великі величини</u>

Розглянемо послідовність $a_n = 2n$, де величина n приймає усі значення натуральних чисел. Будемо мати: 2; 4; 6; 8; 10; ... ; 100; ... ; 1000; .... . Дана послідовність з ростом номера її члена має тенденцію до необмеженого зростання.

Змінна величина, яка в процесі зміни необмежено зростає, називається нескінченно великою величиною. Коротко це позначається: ($2n \to \infty$). Таким чином, термін "нескінченно велика величина " означає не якесь стале велике число, а процес неухильного зростання змінної величини.

Для нескінченно великої величини замість $2n \to \infty$ пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$. Знак lim (читається "ліміт ") походить від латинського слова limes − границя).

Нескінченна величина n^k є нескінченно великою більш високого порядку в порівнянні з n^{k-1}. Так, n^2 в нескінченну кількість разів більша від $2n$. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty^2 = \infty \cdot \infty^1$ (у виразі $6^2 = 6 \cdot 6^1$ маємо: $6^2 > 6^1$ у 6 разів).

Властивості нескінченно великих величин

1. Сума нескінченно великих величин є нескінченно великою величиною. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 + 2n) = \infty$.

2. Добуток нескінченно великої величини на число є нескінченно великою величиною. Тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(K \cdot n^2) = \infty$.

3. Добуток нескінченно великих величин є нескінченно великою величиною більш високого порядку: $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 \cdot 2n) = \lim\limits_{n\to\infty}(2n^3)$.

4. Різниця та відношення двох нескінченно великих величин є невизначеності, які схематично позначають $\infty - \infty$ і $\dfrac{\infty}{\infty}$. Але різниця між нескінченно великими величинами різних порядків є нескінченно великою величиною. Наприклад: $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 2n) = \infty^2 - \infty = \infty$.

5. Нескінченно велика величина може бути як додатною так і від'ємною.

<u>Нескінченно малі величини</u>

Розглянемо послідовність $a_n = \dfrac{1}{n}$; одержимо: 1; $^1/_2$; $^1/_3$; $^1/_4$; ...; $^1/_{10}$; ...; $^1/_{100}$; ...; $^1/_{1000}$ ... . З ростом номера члени послідовності стають все меншими, поступово наближаючись до нуля, але ніколи його не досягають (при діленні на будь-яке велике число одержуємо мізерно мале число, але не нуль). Така змінна величина, яка в процесі зміни неухильно наближається до нуля, називається нескінченно малою величиною. Форма запису: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Величина $\dfrac{1}{n^k}$ є нескінченно мала величина вищого порядку, ніж $\frac{1}{n^{k-1}}$. Так, величина $\frac{1}{n^2}$ наближається з ростом n до нуля набагато скоріше, ніж величина $\frac{1}{n}$.

Властивості нескінченно малих величин

1. Сума скінченого числа нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})=0$.

2. Добуток нескінченно малої величини на число є нескінченно малою величиною: $\lim\limits_{n\to\infty}(5\cdot\frac{1}{n})=0$.

3. Добуток нескінченно малих величин є нескінченно великою величиною більш високого порядку: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{n^2})=0$.

4. Відношення нескінченно малих величин є невизначеність, яку схематично позначають $\frac{0}{0}$.

Границя послідовності

Розглянемо послідовність $a_n=\frac{2n}{n+3}$. Її члени: $\frac{2}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{6}{6}$; $\frac{8}{7}$; … ; $\frac{20}{13}$; … ; $\frac{200}{103}$; … ; $\frac{2000}{1003}$; … . Відмітимо, що з ростом номера послідовності її значення поступово наближаються до числа 2. Різниця між значенням члена послідовності і числом 2 зменшується з ростом номера послідовності, наближаючись до нуля. Це означає, що змінна величина $2-\frac{2n}{n+3}$ є нескінченно малою величиною. Тому: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$.

Взагалі, якщо послідовність a_n має границею число A, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, то обов'язково $|a_n-A|\to 0$ при $n\to\infty$. Звідси маємо визначення границі послідовності:

Озн. Якщо для послідовності a_n існує таке число A, для якого різниця між ним та членом послідовності прямує до нуля при необмеженому зростанні номера члена, то число A називається граничним значенням послідовності, або границею послідовності.

Для функції $y=f(x)$, заданої на інтервалі $[a;b]$ (рис. 5.1), виберемо точку $(x_0\in[a;b])$. Якщо $x\to x_0$, то точка *B* на графіку прямує до точки *A*. Функція має граничне значення $A=f(x_0)$, якщо при $x\to x_0$ величина $f(x)-A\to 0$, тобто: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = A.$ Звідси видна простота обчислення границі: граничне значення аргументу підставити у функцію, що знаходиться під знаком границі.

Приклад: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+5) = 3^2+5 = 14$.

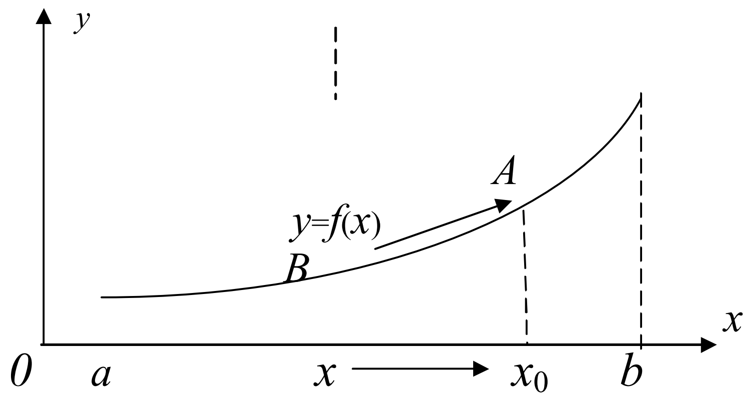


Рис. 5.1.

Властивості границь

1. Границя алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі границь кожної з них:

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

2. Сталий множник можна винести за знак границі:

$$\lim_{x\to x_0} C\cdot f(x) = C\lim_{x\to x_0} f(x).$$

3. Границя добутку функцій дорівнює добутку границь кожної з них:

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

4. Границя відношення функцій дорівнює відношенню їх границь:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}.$$

5. Знак границі можна внести під знак будь-якої дії (піднесення до степеня, логарифмування тощо):

$$\lim_{x\to x_0}\log_a f(x) = \log_a \lim_{x\to x_0} f(x).$$

6. Границя сталої величини є сама стала:

$$\lim_{x\to x_0} A = A.$$

7. Змінна величина може мати тільки одне значення границі:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+5) = 2^2+5 = 9.$$

Теорема: (Теорема про “середнє”). Якщо дві змінних величини U і V ($U>V$) мають одну і ту ж границю A, то всяка інша змінна величина W, для якої відомо, що $W < U$ і $W > V$ (величина W знаходиться між U та V), також має границею A.

Це схематично можна зобразити так (див. рис. 5.2):

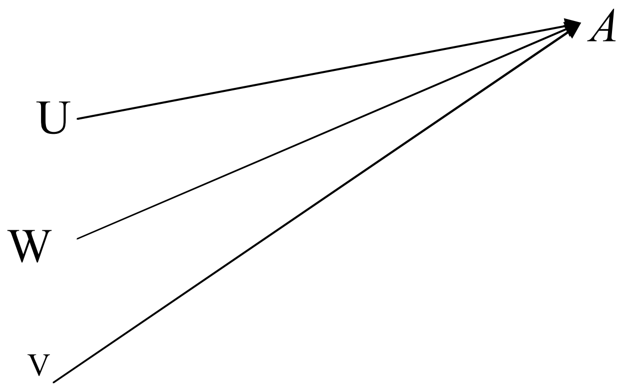


Рис. 5.2.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти границю послідовності

5.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$; **5.34.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$;

5.35. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^2+1}$; **5.36.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$;

5.37. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$; **5.38.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

5.39. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$ **5.40.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

Користуючись означенням границі послідовності, довести, що:

5.41. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n-1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$; **5.42.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$;

5.43. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5n}{2n+1}=\dfrac{5}{2}$; **5.44.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2n+1}=1$;

5.45. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=0$.

§3. Правила розкриття невизначеностей, утворених алгебраїчними виразами

Нагадаємо, що в теорії границь нуль – це мале число, а нескінченність – велике. Зауваження:

$\dfrac{\textit{число}}{\textit{нескінченно мале число}}=\textit{нескінченно велике число}$, тобто $\dfrac{a}{0}=\infty$;

$$\frac{\textit{число}}{\textit{нескінченно велике число}} = \textit{нескінченно мале число}$$, тобто $\frac{a}{\infty} = 0$.

1. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ *від раціональних дробів.*

Границі мають вигляд: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, де $R_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots A_0$, $Q_m(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \ldots. + B_0$.

Правило: для розкриття невизначеності необхідно чисельник і знаменник поділити на x^n, де $n-$ найбільше значення степеня.

<u>Приклад:</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{7x^2 + 9x + 4}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{7x^2 + 9x + 4} = \left[\frac{3 \cdot \infty^2 + 5 \cdot \infty + 6}{7 \cdot \infty^2 + 9 \cdot \infty + 4}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Найбільше значення степеня n=2, тому ділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2} + \frac{9x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{7 + \frac{9}{x} + \frac{4}{x^2}} = \left[\frac{3 + \frac{5}{\infty} + \frac{6}{\infty^2}}{7 + \frac{9}{\infty} + \frac{4}{\infty}}\right] = \frac{3 + 0 + 0}{7 + 0 + 0} = \frac{3}{7}.$$

Зауваження: коли проводимо підстановку числа під знак границі, то знак границі не пишемо:

<u>Приклад:</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3 - x + 8}{x^2 + 5x - 6}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3 - x + 8}{x^2 + 5x - 6} = \frac{3 \cdot \infty^3 - \infty + 8}{\infty^2 + 5 \cdot \infty - 6} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$;

Поділимо кожен член чисельника і знаменника на x^3:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x}} = \frac{3 - \frac{1}{\infty^2} + \frac{8}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{5}{\infty^2} - \frac{6}{\infty}} = \frac{3 - 0 + 0}{0 - 0 + 0} = \frac{3}{0} = \infty.$$

<u>Приклад:</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 6x + 3}{x^3 + x + 9}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 6x + 3}{x^3 + x + 9} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Поділимо кожен член чисельника і знаменника на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+3}{x^3+x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{9}{x^3}}= \ =\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}{1+\frac{1}{\infty^2}+\frac{9}{\infty^3}}=\frac{0+0+0}{1+0+0}=\frac{0}{1}=0.$$

Якщо проаналізувати наведені три приклади, то можна прийти до висновку: якщо відношення раціональних алгебраїчних многочленів утворює невизначеність ∞/∞, то:

а) якщо найбільші степені многочленів однакові, то відношення прямує до відношення коефіцієнтів при x^n, де $n-$ найбільший степінь;

б) якщо степінь чисельника менший від степеня знаменника, то відношення прямує до нуля;

в) якщо степінь чисельника більший від степеня знаменника, то відношення прямує до безмежності.

2. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ ***від раціональних дробів*** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{0}{0}$.

Правило: для розкриття невизначеності необхідно розкласти чисельник та знаменник на множники і спільні з них скоротити.

<u>Приклад:</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-8}{3x^2-5x+2}=\frac{3\cdot 1^2+5\cdot 1-8}{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}=\frac{0}{0}$. Розкладаємо квадратичні вирази на множники за теоремою Вієта і отримуємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+\frac{8}{3})}{3(x-1)(x-\frac{2}{3})}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+8}{3x-2}=\frac{3\cdot 1+8}{3\cdot 1-2}=\frac{11}{1}=11.$$

Можемо скоротити на $x-1$, тому що $x-1\to 0$, але нулю не дорівнює.

3. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ ***від ірраціональних дробів***

Правило: позбавитись від ірраціональності множенням чисельника і знаменника на спряжені вирази . Спряженими будемо називати такі ірраціональні вирази, які при перемноженні утворюють раціональні вирази:

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ і $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ − спряжені, бо $(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$. Аналогічно $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b$.

Згадуємо, що $(u-v)\cdot(u+v)=u^2-v^2$ і $(u\pm v)\cdot(u^2\mp u\cdot v+v^2)$ тощо.

<u>Приклад:</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x+1}}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x+1}}=\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{4}}{\sqrt{4}-\sqrt{4}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$;

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2})(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2})}{(\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x+1})(\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1})}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-2x-2}{5x-1-3x-1}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2x-2}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{2(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4}+\sqrt{4}}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=-\frac{1}{2}\ .$$

4. Невизначеність типу [∞ − ∞].

Правило: необхідно перевести цей тип невизначеності до типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ множенням на дріб зі спряжених виразів.

<u>Приклад:</u> обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)$.

Розв'язання: безпосередня підстановка дає невизначеність типу $\infty\ -\ \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{16x^2+10x+5}-4x)\cdot\frac{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16x^2+10x+5-16x^2}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\frac{10\cdot\infty+5}{\sqrt{16\cdot\infty^2+10\cdot\infty+5}+4\cdot\infty}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

За правилом обчислення таких невизначеностей поділимо кожен член чисельника і знаменника на x (увага: x^2 під коренем !):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+5}{\sqrt{16x^2+10x+5}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\dfrac{5}{x}}{\dfrac{\sqrt{16x^2+10x+5}}{x}+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{\dfrac{16x^2+10x+5}{x^2}}+4}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{10 + \frac{5}{x}}{\sqrt{16 + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^2}} + 4} = \lim_{x\to\infty} = \frac{10 + \frac{5}{\infty}}{\sqrt{16 + \frac{10}{\infty} + \frac{5}{\infty^2}} + 4} = \frac{10}{\sqrt{16} + 4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} .$$

5. Невизначеність типу $[0 \cdot \infty]$

Правило: перевести цей тип до виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ або $\left[\frac{0}{0}\right]$, пам'ятаючи, що $a = \frac{1}{\frac{1}{a}}$.

Приклад: обчислити границю $\lim_{x\to\infty} (5x+4) \cdot (\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3})$.

Розв'язання: $\lim_{x\to\infty} (5x+4) \cdot (\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}) = (5 \cdot \infty + 4) \cdot (\frac{4}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} + \frac{3}{\infty^3}) = \infty \cdot 0$.

$$\lim_{x\to\infty} (5x+4) \cdot (\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x+4}{\frac{1}{\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x+4}{\frac{1}{\frac{4x^2 + x + 3}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x+4}{\frac{x^3}{4x^2 + x + 3}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(5x+4)(4x^2+x+3)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{20x^3 + 21x^2 + 19x + 12}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{20}{1} = 20 .$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити наступні границі:

5.46. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x + 1}$;

5.47. $\lim_{x\to 2} \left(\sqrt{x+2} - 1\right)$;

5.48. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$;

5.49. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$;

5.50. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - x + 8}{x^2 + 5x - 6}$;

5.51. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 6x + 3}{x^3 + x + 9}$;

5.52. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$;

5.53. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - x + 8}{x^2 + 5x - 6}$;

5.54. $\lim_{x\to\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{9x^2 - 6x}}$;

5.55. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x} - 1}$;

5.56. $\lim_{x\to\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{4x} - 1}$;

5.57. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^3 - 2}$;

5.58. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 8x + 22}{2x^3 - 2}$;

5.59. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 + 3x - 2}$;

5.60. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 6x + 3}{5x^3 + 2x + 1}$;

5.61. $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^5 - 4x + 3}{\sqrt{4x^{10} + 4x^2}}$;

5.62. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x+3}{\sqrt{x^9+4x^2}}$;

5.63. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x}{\sqrt{x}-2x}$;

5.64. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+9}{2x}$;

5.65. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-8}{3x^2+2x-6}$;

5.66. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-8}{3x^4+2x^2-6x}$;

5.67. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

5.68. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

5.69. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$;

5.70. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$;

5.71. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$;

5.72. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$;

5.73. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$;

5.74. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x-2}$;

5.75. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x}-1}$;

5.76. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

5.77. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$;

5.78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}$;

5.79. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+6}-2}$;

5.80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+3}}{x}$;

5.81. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{7-x}$;

5.82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$;

5.83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$;

5.84. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-x)$;

5.85. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2})$;

5.86. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$;

5.87. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+1}-\sqrt{4x^2-2})$;

5.88. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+3}-\sqrt{4x^2-x})$.

5.89. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{4x^2-x})$.

Індивідуальне завдання

Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^2-4x+5}{2x^2+(n-1)\cdot x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to n}\dfrac{x^2-2xn+n^2}{n^2-xn}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{n-x}-\sqrt{n+x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(nx-\sqrt{x^2-4x})$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 4. Дві визначні та три необхідні границі

1. Перша визначна границя

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

Відомо, що $\sin 0 = 0$, тому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{0}{0}$ є невизначеністю. З рис. 5.3. маємо: $\sin x = \dfrac{BC}{R}$; $\angle x = \dfrac{AB}{R}$ (в радіанах); $tgx = \dfrac{AD}{R}$; в силу того, що $BC < \overset{\frown}{AB} < AD$, маємо: $\dfrac{BC}{R} < \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{R} < \dfrac{AD}{R} \Rightarrow \sin x < x < tgx \Rightarrow \sin x < x < \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sin x}{\sin x} < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$.

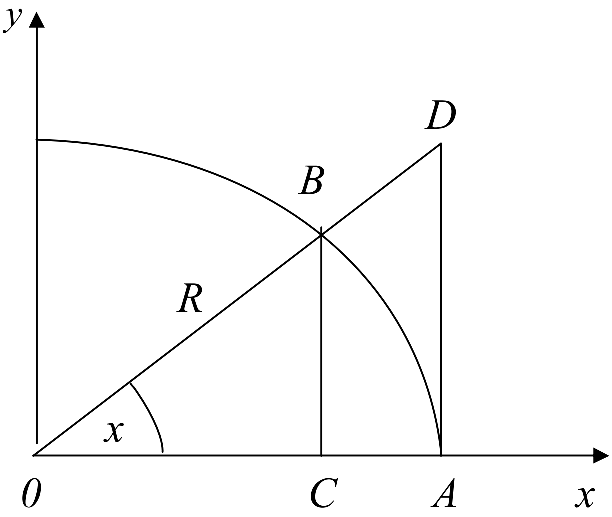


Рис.5.3.

Якщо $x \to 0$, то $\lim\limits_{x\to 1}\cos x = 1$. У виразі $1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$ маємо: $1>\cos x$, а $\dfrac{\sin x}{x}$ знаходиться між ними. Ліва і права частини подвійної нерівності прямують до 1 і згідно з теоремою “про середнє” $\dfrac{\sin x}{x}$ має ту ж границю. Отже, перша визначна границя має вигляд:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (5.1)$$

Ця границя має наступні інваріанти:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} x\cdot ctgx = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} x\cdot arctgx=1$$

Зауважимо, що кут виражено не в градусах, а в радіанах!

<u>Приклад:</u> обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$.

Розв'язання: введемо заміну $7x = y \Rightarrow y \to 0$ при $x \to 0$.

Маємо: $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{3\cdot\frac{y}{7}} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{7}{3}\cdot\frac{\sin y}{y} = \frac{7}{3}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{7}{3}\cdot 1 = \frac{7}{3}$.

2. Друга визначна границя

Розглянемо $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Якщо давати n значення: 1, 2, 3, 4, … , то одержимо відповідно числа: 2; $\frac{9}{4}$; $\frac{64}{27}$, $\frac{625}{256}$;… або: 2; $2\frac{1}{4}$; $2\frac{10}{27}$; $2\frac{113}{256}$;… Значення величини границі зростає, але воно завжди буде менше числа 3. Дослідження цієї границі петербурзьким академіком Л. Ейлером показало, що дана границя існує, але вона менша від числа 3 і є числом ірраціональним. Ця границя позначається буквою "e". Отже, друга визначна границя має вигляд:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e; \quad \text{де } e = 2{,}718281... \approx 2{,}72 \tag{5.2}$$

Якщо позначити $n=\frac{1}{x}$, то границя приймає вигляд:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{5.3}$$

Величина x може мати будь-який закон прямування до нуля. Існують показникова функція $y = e^{kx}$ та логарифмічна функція $y = \log_e x = \ln x$. Такий логарифм (ln) називається натуральним (логарифм Непера). Велика кількість природних явищ описується функціями з використанням числа e, що свідчить про надзвичайне значення цього числа.

Розглянемо границю:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{an+b} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{an}\cdot(1+\frac{1}{n})^b = \lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{n})^n\right]^a\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^b.$$

Розглянемо кожну границю окремо:

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^b = (1+\frac{1}{\infty})^b = (1+0)^b = 1^b = 1$ (b − число).

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^a = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^a = e^a \ .$$

Отже, $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{an+b} = e^a \qquad (5.4)$$

Пряма підстановка дає: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = (1+\frac{1}{\infty})^\infty = (1+0)^\infty = 1^\infty$. Це невизначеність, яка має позначення $\left[1^\infty\right]$ і вказує на другу визначну границю.

<u>Приклад:</u> обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 4}(25-6x)^{\frac{5}{x-4}}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 4}(25-6x)^{\frac{5}{x-4}} = (25-24)^{\frac{5}{4-4}} = 1^{\frac{5}{0}} = 1^\infty$.

Отже, застосуємо другу визначну границю у вигляді (5.4):

Заміна: $25-6x = 1+\frac{1}{n} \Rightarrow 24-6x = \frac{1}{n} \Rightarrow 6(4-x) = \frac{1}{n}$. Якщо, $x \to \infty$, то

$4-x \to 0$ і $6\cdot 0 = 0$, тобто $\frac{1}{n} \to 0$, що означає: $n \to \infty$.

Знайдемо $4-x$. $4-x = \frac{1}{6n} \Rightarrow \frac{1}{4-x} = 6n \Rightarrow \frac{5}{4-x} = 5\cdot 6n = 30n$.

Підставляючи заміну, маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{30n} = e^{30}$.

3. Перша необхідна границя

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$. Підставимо граничне значення величини x під знак границі: $\frac{\ln(1+0)}{0} = \frac{\ln 1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$ − невизначеність. Зробимо перетворення:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$

Отже, перша необхідна границя має вигляд:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \ . \qquad (5.5)$$

Це означає, що натуральний логарифм від числа, яке більше від одиниці на малу величину, наближено дорівнює цій малій величині.

<u>Приклад:</u> обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{3x}$.

Розв'язання: Скористаємося заміною: $7x=y\Rightarrow x=\frac{1}{7}y$. Якщо $x\to 0$, то $7x\to 0\Rightarrow y\to 0$. Вводимо заміну під знак границі і отримаємо:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{3\cdot\frac{y}{7}}=\lim_{y\to 0}\frac{7}{3}\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{7}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{7}{3}\cdot 1=\frac{7}{3}.$$

4. Друга необхідна границя

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

За безпосередньою підстановкою маємо: $\frac{a^0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}-$ невизначеність. При $x\to 0$ маємо: $a^x-1\to 0$. Якщо $a^x-1=y\to 0$, то $y=\ln(1+y)$, як показано вище. Проводимо заміну і отримуємо:

$$y=\ln(1+y)=\ln(1+a^x-1)=\ln a^x=x\ln a\Rightarrow a^x-1=x\ln a\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}=\lim_{x\to 0}\ln a=\ln a.$$

Отже, друга необхідна границя має вигляд:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{5.6}$$

<u>Приклад :</u> обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-5^x}{x}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-5^x}{x}=\frac{7^0-5^0}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$ − невизначеність.

Винесемо в чисельнику за дужки множник 5^x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^x-5^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5^x\left(\left(\frac{7}{5}\right)^x-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}5^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^x-1}{x}=1\cdot\ln\frac{7}{5}=\ln 7-\ln 5.$$

5. Третя необхідна границя

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\frac{(1+0)^a-1}{0}=\frac{1^a-1}{0}=\frac{0}{0}$. Нехай $(1+x)^a-1=y$.

Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$, звідки $y=\ln(1+y)\Rightarrow \ln(1+y)=\ln(1+(1+x)^a-1)=$

$=\ln(1+x)^a=a\ln(1+x)\ \Rightarrow (1+x)^a-1=a\ln(1+x)$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)}{x}=a\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=a\cdot 1=a$.

Маємо третю необхідну границю у вигляді:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a \qquad (5.7)$$

<u>Приклад:</u> обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+12x)^4-1}{5x}$.

Розв'язання: Пряма підстановка приводить до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Скористаємося заміною: $12x=y\Rightarrow x=\frac{y}{12}$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$;

$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^4}{5\cdot\frac{y}{12}}=\lim_{y\to 0}\frac{12}{5}\cdot\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^4-1}{y}=\frac{12}{5}\cdot 4=\frac{48}{5}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити наступні границі:

5.90. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{14x}{\sin 7x}$;

5.92. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg4x}{\arcsin 5x}$;

5.94. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{cos4x-cos2x}{x^2}$;

5.96. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{5õ}\right)^{õ}$;

5.98. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{3x^2}$;

5.78. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{\arcsin 9x}$;

5.80. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-180^0}$;

5.82. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x^2}$;

5.84. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x}$;

5.86. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{4}{6x+5}\right)^{2x}$;

5.100. $\lim\limits_{x\to 0}(3x+3)^{\frac{5}{x}}$;

5.102. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tg(2x-6)}{3x-9}$;

5.104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{10x}$;

5.106. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg^2 x}$;

5.108. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_4(1+9x)}{5x}$;

5.110. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-7^x}{x}$;

5.112. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-2^x}{x}$;

5.114. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+15x)^4-1}{15x}$;

5.116. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^7-1}{9x}$.

5.88. $\lim\limits_{x\to 0}(2x-10)^{\frac{5}{2x}}$

5.90. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+3}\right)^{6x-2}$;

5.92. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{6x}$;

5.94. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{9}{3x-1}\right)^{6-4x}$;

5.96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{2x}$;

5.98. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg x}{6-6x}$;

5.100. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^3-1}{4x}$;

5.102. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5^{3-x}-1}{2x-6}$;

Індивідуальне завдання

Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgnx}{\arcsin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)^{2x-n}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+nx)}{(n+1)x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n^x-(n+3)^x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^6-1}{5x}$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

§5. Неперервність та розриви функцій

Важливе значення у математичному аналізі мають так звані неперервні функції. Вивчаючи основи аналітичної геометрії, ми мали справу з рівняннями прямої лінії. Стверджувалося, що вони існують на всій числовій осі, тобто що немає жодного значення x, яке не влаштовує рівняння прямої. Кожному значенню абсциси обов'язково відповідає якесь значення ординати.

Розглянемо рівняння трьох прямих, на які накладені обмеження. Нехай функція $y=f(x)$ задана таким чином, що на інтервалі $(-\infty;\ a)$ вона задається прямою $A_1x+B_1y+C=0$, на відрізку $[a;b]$ − прямою $A_2x+B_2y+C_2=0$, а на інтервалі $(b;+\infty)$ − прямою $A_3x+B_3y+C_3=0$.

<u>Приклад:</u> Дослідити на неперервність функцію і побудувати її графік:

$$y=\begin{cases} x+3, & x<1 \\ x-1, & x\in[1;2]. \\ 4x-7, & x>2 \end{cases}$$

Зайдемо границі справа та зліва в точках $x=1$ та $x=2$.

Для точки $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x+3)=4$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0$. Лівостороння та правостороння границі мають різні значення ($4\neq 1$). Отже, функція має розрив у точці $x=1$.

Для точки $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(4x-7)=1$; $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x-1)=1$.

Лівостороння та правостороння границі мають однакові значення ($1=1$). Отже, функція неперервна в точці $x=2$.

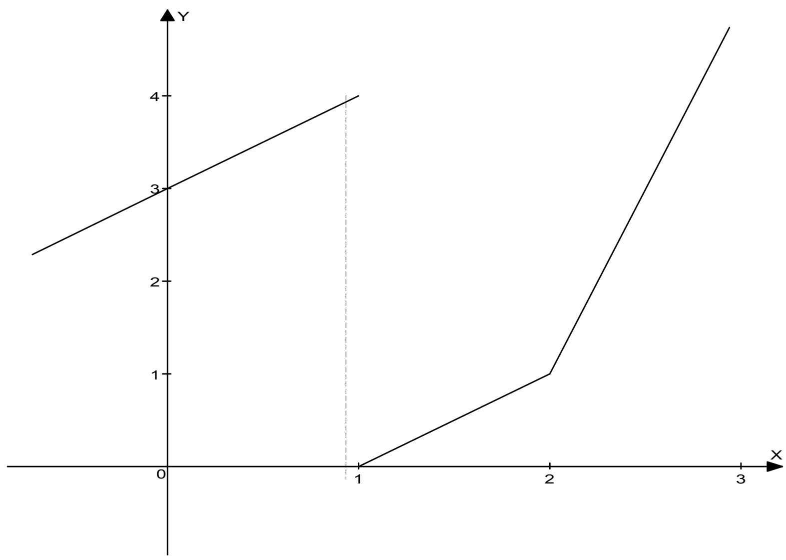


Рис. 5.4.

Можна стверджувати, що в точці $x=x_0$ функція буде неперервною, якщо:

1) сама функція існує у цій точці і має значення $f(x_0)$;

2) граничне значення функції $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ буде однаковим при наближенні до x_0 справа та зліва;

3) граничне значення функції співпадає зі значенням функції в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Озн. Неперервною в точці x_0 називається функція, якщо границя справа $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ дорівнює границі зліва $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ та значенню функції в цій точці.

Граничне наближення справа та зліва називається відповідно правостороннім та лівостороннім наближенням або правосторонньою та лівосторонньою границями. Відповідне математичне позначення :

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \text{ та } \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Під $x_0 + 0$ треба розуміти, що кожне значення x при наближенні до x_0 буде дещо більше від x_0 (наближення справа); аналогічно розуміється $x_0 - 0$ як наближення зліва.

<u>Приклад:</u> Дослідити на неперервність функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{1}{3+x}, \text{ при } x \in R.$$

Так як $x \neq 3$, то знайдемо границі справа та зліва в точці розриву $x = 3$:

$$\lim_{x \to -3+0} f(x) = \lim_{x \to -3+0}\left(\frac{1}{3+x}\right) = \frac{1}{0} = \infty; \ \lim_{x \to -30} f(x) = \lim_{x \to -3+0}\left(\frac{1}{3+x}\right) = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Отже, маємо розрив.

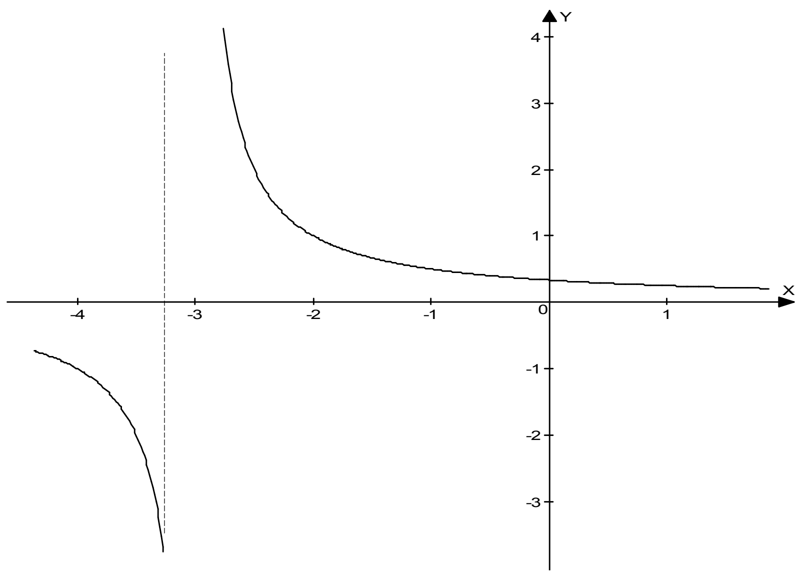


Рис. 5.5.

Властивості неперервних функцій

1. Якщо дві функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні на проміжку $(a;b)$, то їх алгебраїчна сума $f_1(x) \pm f_2(x)$ також буде неперервною функцією на цьому ж відрізку, тобто $f_3(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ − неперервна на $(a;b)$.

2. Множення неперервної функції на сталу не змінює її неперервності: якщо $f_1(x)$ неперервна на $(a;b)$, то $f_2(x) = C \cdot f_1(x)$ також неперервна на $(a;b)$.

3. Добуток неперервних на $(a;b)$ функцій є неперервною функцією на цьому ж інтервалі: $f_1(x) \cdot f_2(x) = f_3(x)$ − неперервна на $(a;b)$, якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ − неперервні на $(a;b)$.

4. Відношення неперервних на $(a;b)$ функцій є неперервною функцією на $(a;b)$, якщо вона існує. $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_3(x)$ − неперервна на $(a;b)$, якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ − неперервні на $(a;b)$ і якщо $f_2(x) \neq 0$.

5. Якщо $y = f_1(x)$ неперервна при $x = x_0$ і $z = f_2(y)$ неперервна при $y_0 = f_1(x_0)$, то складена функція $z = f_2(f_1(x))$ буде неперервною в точці $x = x_0$.

<u>Приклад:</u> якщо $y = \sin x$ неперервна при $x = 0$ і $z = \cos y$ неперервна в $y = \sin 0 = 0$, то і $z = \cos\sin x$ неперервна при $x = 0$.

Основні теореми про неперервність

1. Теорема Коші про проміжні значення

Якщо $y = f(x)$ задана на (a,b) і має на відрізку найбільше y_2 та найменше y_1 значення, то для будь-якого значення y_3 за умови $y_1 < y_3 < y_2$ завжди знайдеться точка c, для якої $y_3 = f(c)$.

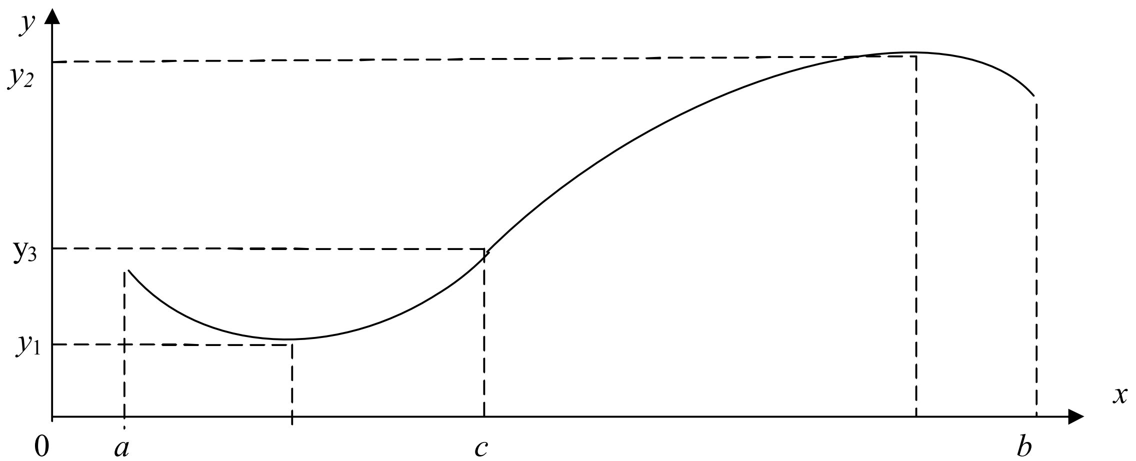


Рис. 5.6.

2. Теорема Больцано

Якщо $y = f(x)$ задана на $[a;b]$ і на кінцях відрізка приймає різні по знаку значення, то на $[a;b]$ завжди знайдеться хоч одна точка c для якої $f(c) = 0$.

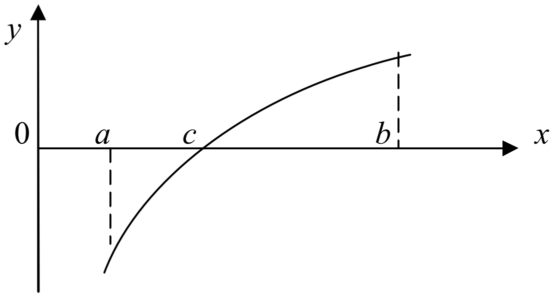


Рис. 5.7.

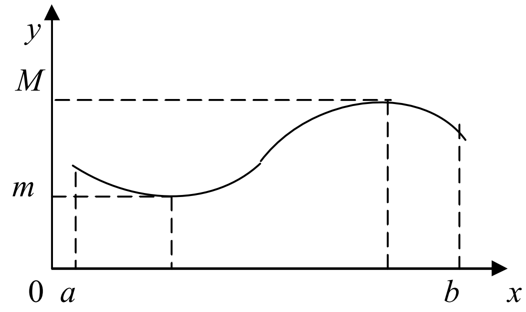


Рис. 5.8.

3. Теорема Вейєрштрасса про обмеження функцій

Якщо $y = f(x)$ визначена на $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку. Це означає, що існують такі числа m і M,що $m \leq f(x) \leq M$ при $x \in [a;b]$. Більше того, для такої функції на $[a;b]$ завжди існують точні значення верхньої та нижньої границі.

Неперервна функція може бути рівномірно неперервною. Якщо $x_2 - x_1$ обмежене деяким числом a і при цьому $f(x_2) - f(x_1)$ також обмежене деяким числом b, то функція неперервна рівномірно.

Розриви функцій

Функція $f(x)$ буде неперервною в точці, якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. Якщо ця умова порушена, то функція буде розривною в точці x_0.

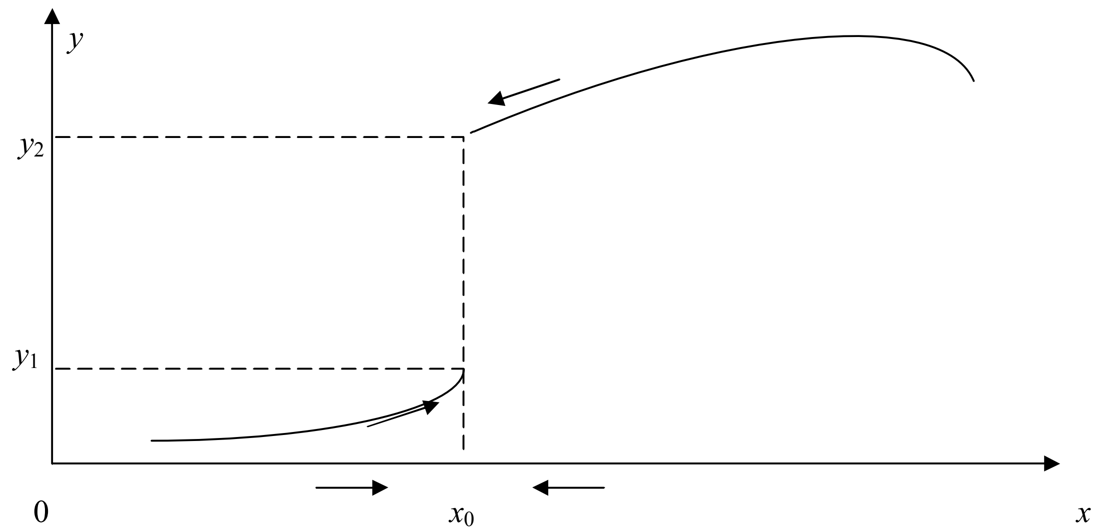


Рис. 5.9.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = y_1$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = y_2$, то існує різниця $y_2 - y_1 = \Delta y \neq 0$. Маємо неусувний розрив першого роду.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$, або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то маємо також неусувний розрив першого роду.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, але $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то маємо усувний розрив першого роду. Для нього $\Delta y = y_2 - y_1 = 0$.

Якщо величина скачка функції не існує або безмежна, то розрив називається розривом II роду. Для таких розривів не існує хоч одна з границь:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \text{ або } \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

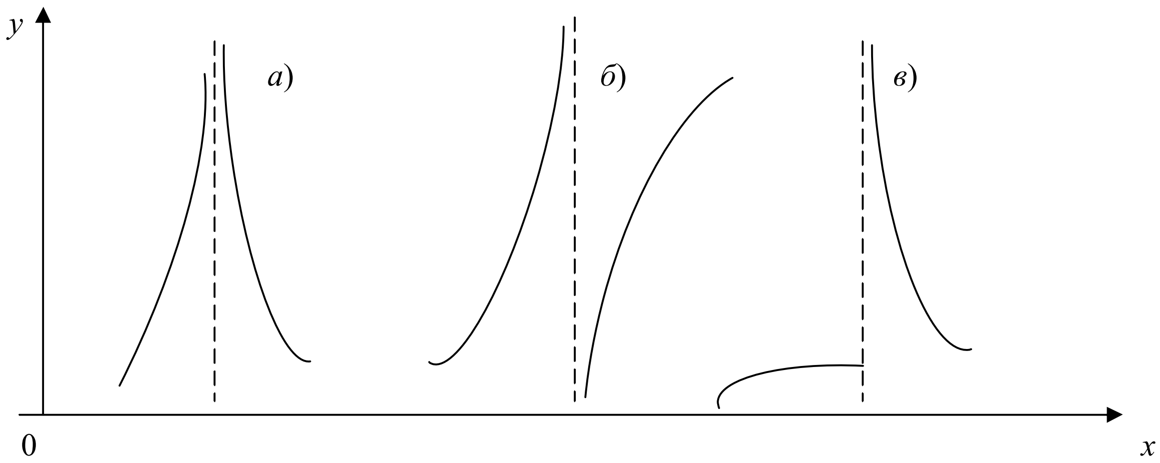


Рис. 5.10.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дослідити на неперервність функції та побудувати їх графіки:

5.117. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x^2, \quad x \in (0;1) \\ 1, x \ge 1 \end{cases};$

5.118. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{1}{2}x, \quad x \in (0;1) \\ 1, x \ge 1 \end{cases};$

5.119. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le -1 \\ \dfrac{1}{4}(x+1)^2, x \in (-1;1) \\ 1, x \ge 1 \end{cases};$

5.120. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le \dfrac{1}{2} \\ 2x - 6, \ x \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \\ 1, x \ge 1 \end{cases};$

5.121. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 2 \\ x^2 - 4x + 4, x \in (2;3) \\ 1, x \ge 3 \end{cases};$

5.122. $f(x) = \begin{cases} 0, x \le 1 \\ 2(x-1), x \in (1;2) \\ 1, x \ge 2 \end{cases};$

5.123. $f(x)=\begin{cases}0, x\le\dfrac{1}{2}\\(2x-1)^2, x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right);\\1, x\ge 1\end{cases}$

5.124. $f(x)=\begin{cases}-2, x\le\dfrac{1}{2}\\4x-4,\ \ x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right);\\1, x\ge 1\end{cases}$

5.125. $y=x+\dfrac{1}{x-1}, при\, x\in[0;2];$

5.126. $y=\dfrac{3x^2-x}{x}, при\, x\in R;$

5.127. $y=\dfrac{1}{1-x^2}, при\, x\in[-2;2];$

5.128. $y=x-\dfrac{1}{x+1}, при\, x\in[-2;2];$

5.129. $y=x^2-\dfrac{1}{x-1}, при\ x\in R;$

5.130. $y=x+\dfrac{1}{x+2}, при\ x\in R;$

5.131. $y=x+\dfrac{1}{x+4}, при\ x\in[-8;6];$

5.132. $y=\dfrac{1}{9-x^2}, при\, x\in[0;10];$

5.133. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}, при\, x\in[-1;3];$

5.134. $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, при\, x\in R;$

5.135. $y=\dfrac{1}{x^3+3x^2-4x}, при\, x\in R;$

5.136. $y=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}, при\, x\in R.$

Індивідуальне завдання

Обчислити наступні границі:

а) $f(x)=\begin{cases}0, x\le -1\\n\cdot(x+1)^2, x\in(-1;0);\\n, x\ge 0\end{cases}$

б) $y=\dfrac{1}{nx-x^2}, при\, x\in R.$

де n – номер студента за списком.

Запитання до розділу V.

1. Визначення змінної величини.
2. Визначення послідовності.
3. Визначення функції.
4. Типи функцій.
5. Визначення нескінченно малої величини.
6. Визначення нескінченно великої величини.
7. Властивості нескінченно великих величин.
8. Властивості нескінченно малих величин.
9. Визначення границі послідовності.
10. Визначення границі функції.
11. Властивості границь.
12. Суть теореми “про середнє”.
13. Типи невизначеностей.

14. Перша визначна границя та її інваріанти.
15. Друга визначна границя.
16. Що таке число e?
17. Перша необхідна границя.
18. Друга необхідна границя.
19. Третя необхідна границя.
20. Правила розкриття невизначеностей для алгебраїчних многочленів.
21. Яка функція називається неперервною?
22. Визначення неперервності через приріст.
23. Що таке лівостороння та правостороння границі?
24. Які властивості мають неперервні функції?
25. Основні теореми про неперервні функції.
26. Що таке розрив I роду?
27. Що таке розрив II роду?
28. Що таке неусувний розрив?
29. Що таке усувний розрив?
30. Що таке приріст аргументу та функції?