VII. ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ФУНКЦІЇ

§1. Основні поняття

Нехай задано функцію *f(x)* неперервну на інтервалі $(a;b)$. Нехай *f(x)* така, що в кожній точці її можливо провести дотичну. Це означає (див. геометричний зміст похідної), що функція має неперервну похідну на $(a;b)$.

Озн. Функцію називають гладенькою, якщо вона має неперервну похідну на заданому проміжку.

Типовий вигляд гладкої функції показано на рис. 7.1, з якого видно, що до будь-якої точки кривої існує дотична.

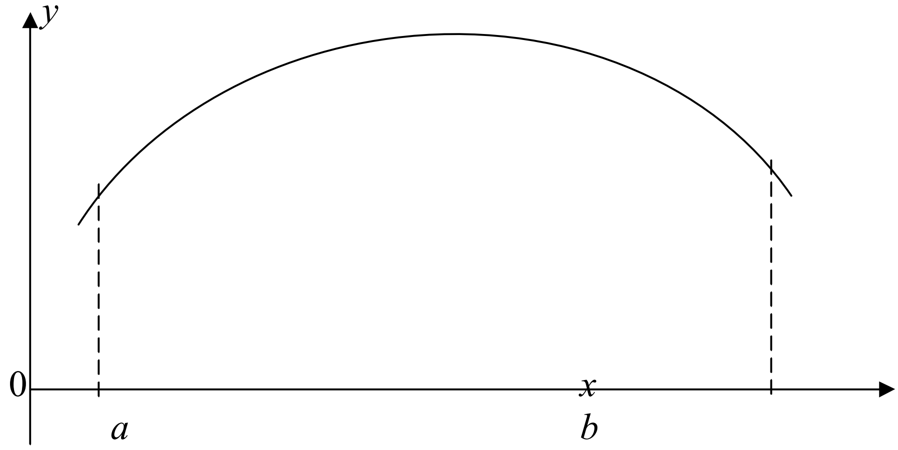


Рис. 7.1.

Типовий вигляд заданої на $(a;b)$ неперервної функції, що не буде гладенькою, зображено на рис. 7.2. В точках c і d не можемо провести дотичну однозначно; похідна в цих точках не існує.

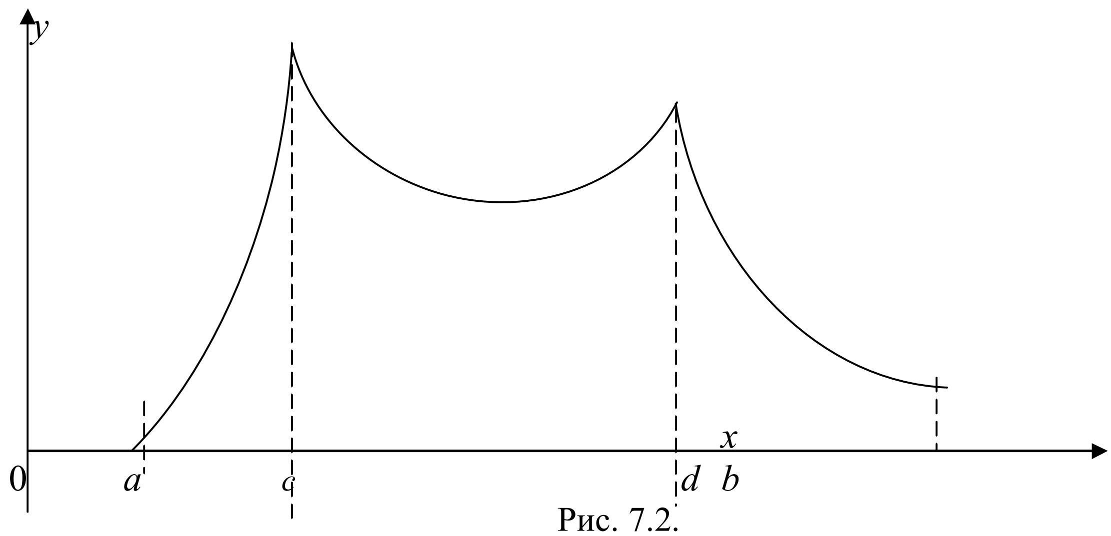


Рис. 7.2.

Озн. Асимптотою називають пряму, до якої наближається задана функція так, що відстань між ними прямує до нуля.

Пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою, пряма $x = a$ − вертикальною асимптотою, а пряма $y = kx + b$ − похилою асимптотою. В точці $x = c$ функція потерпає розрив другого роду (Рис. 7.3.).

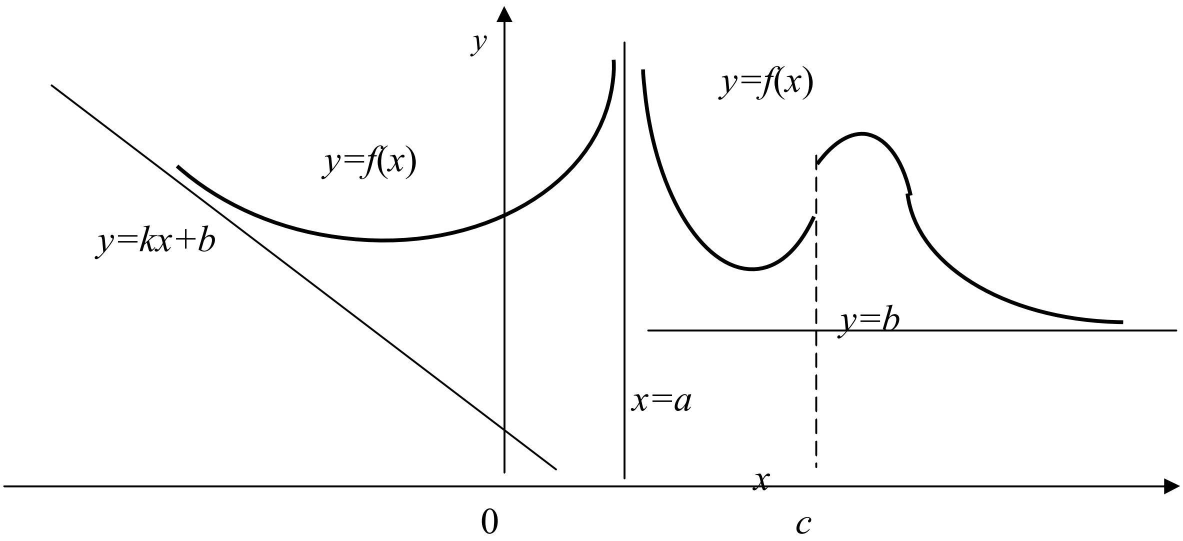


Рис. 7.3.

На ділянках зростання функцій дотична завжди нахилена до осі Ox під гострим кутом α (рис. 7.4), тому на таких ділянках похідна завжди додатна. На ділянках спадання кут нахилу β дотичної тупий, тому похідна завжди від'ємна.

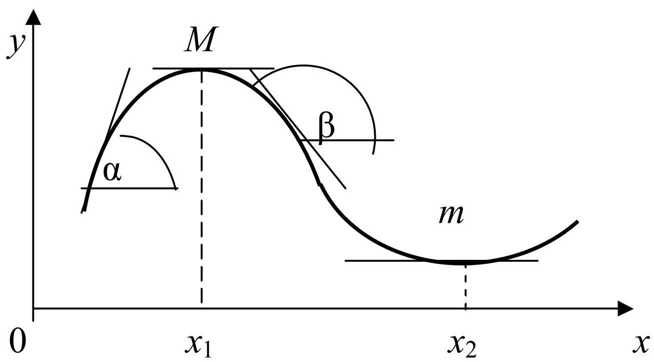


Рис. 7.4.

Точки, в яких функція змінює характер поведінки, називаються точками екстремуму. Згідно з принципом Ферма похідна гладкої функції в точці екстремуму завжди дорівнює 0.

На рис. 7.4. видно, що в точках x_1 та x_2 є екстремумом, так як дотична паралельна осі Ox, тому кут нахилу дорівнює нулю, а $y' = tg0^\circ = 0$. При цьому точка x_1 переходу від зростання до спадання є точкою максимуму, а точка x_2 переходу функції від спадання до зростання − точкою мінімуму. Точки максимуму і мінімуму не обов'язково співпадають з найбільшим та найменшим значеннями функції (рис. 7.5.).

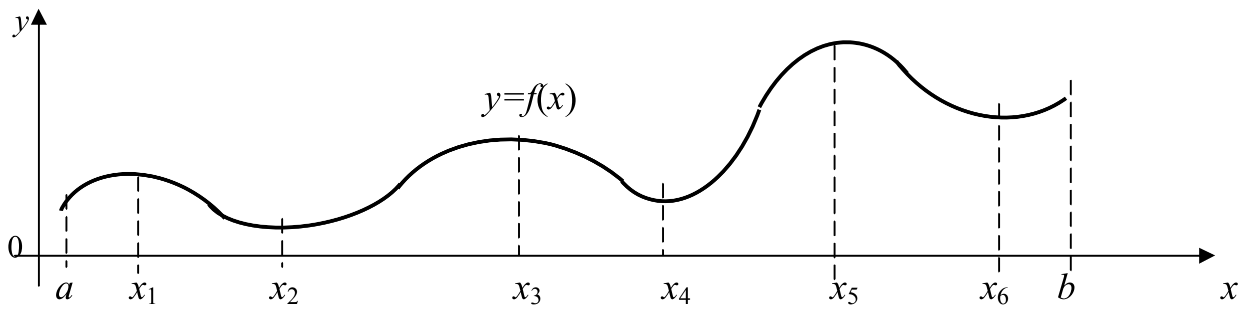


Рис. 7.5.

На інтервалі $[a;b]$ функція має найменше значення в точці a, а найбільше в точці b, і ні одне з них не співпадає зі значеннями мінімуму (точки x_2, x_4, x_6) чи максимуму (точки x_1, x_3, x_5).

Існують точки, в яких функція не має екстремумів, але її похідні в цих точках дорівнюють нулю (рис. 7.6.).

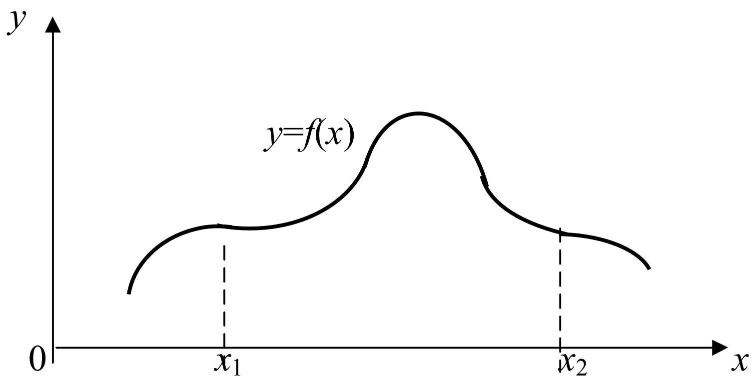


Рис. 7.6.

Дотична до кривої в точках x_1 та x_2 паралельна осі Ox, $y' = 0$. Точка x_1 є точкою, в якій функція перестала зростати, а точка x_2 − точкою, в якій функція перестала спадати.

Озн. Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називають стаціонарними.

§2. Знаходження асимптот графіка функції

Озн. Асимптотою кривої називається така пряма, до якої необмежено наближається точки кривої при необмеженому віддаленні її від початку координат. Крива може наближатися до своєї асимптоти тими ж способами, як і змінна до своєї границі: залишаючись з однієї сторони від асимптоти або з різних сторін, кілька раз перетинаючи асимптоту і переходячи з однієї сторони на другу.

Розрізняють асимптоти: вертикальні, горизонтальні і похилі.

Для знаходження асимптот керуються наступними правилами:

а) Якщо при $x = a$ крива $y = f(x)$ має розрив ІІ-го роду, тобто якщо при $x \to a - 0$ або при $x \to a + 0$ функція прямує до нескінченості (того чи іншого знаку), то пряма $x = a$ являється вертикальною асимптотою;

б) Крива $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$ тільки в тому випадку, коли існує скінчена границя функції $f(x)$ при $x \to \infty$ або $x \to -\infty$, і ця границя дорівнює b, тобто, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

в) Для знаходження похилої асимптоти $y = kx + b$ необхідно знайти невідомі коефіцієнти k і b за формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) \text{ та } b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

<u>Приклад</u>: Знайти вертикальні та похилі асимптоти функції: $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання:

Так як область визначення функції : $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;\infty)$, то дослідимо точки розриву функції

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{-0} = \infty; \ \lim_{x\to-1-0} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty; \ \lim_{x\to1-0} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Отже, $x = -1$ і $x = 1$ − вертикальні асимптоти.

Похилі асимптоти визначатимемо за формулою: $y = kx + b$. Для цього знайдемо невідомі коефіцієнти k і b:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Тоді рівняння асимптоти набуватиме вигляду: $y = 0$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти вертикальні та похилі асимптоти функцій і схематично побудувати їх графік

7.1. $y = \dfrac{x^2 + x}{x + 2}$; **7.2.** $y = \dfrac{4x^2 - x}{x + 2}$;

7.3. $y=\dfrac{x+2}{x^2-1}$;

7.4. $y=\dfrac{x^2}{x+5}$;

7.5. $y=\dfrac{x^2-1}{x}$;

7.6. $y=\dfrac{3x}{x^2-4}$;

7.7. $y=\dfrac{x^2}{x^2-9}$;

7.8. $y=\dfrac{x-1}{x^2}$;

7.9. $y=\dfrac{x}{(x+2)^2}$;

7.10. $y=\dfrac{x}{(x-2)^2}$.

Індивідуальне завдання

Знайти вертикальні та похилі асимптоти функцій і схематично побудувати їх графік $y=\dfrac{Nx}{(N-10)^2-(-1)^N x^2}$, N – номер студента за списком.

§3. Зростання та спадання функції

В першому параграфі цього розділу визначено, що в стаціонарних точках $y'=0$. Тому знаходимо y' і прирівнюємо її 0. З умови $f'(x)=0$ знаходимо всі значення стаціонарних точок (x_1, x_2, x_3, x_4) (рис. 7.8.). Функція $f(x)$ зображена на рис. 7.8. *а*). Точка x_1– це стаціонарна точка, для якої $f'(x_1)=0$ (функція перестала зростати). Якщо замість x_1 в $f'(x)$ підставити значення $x_1-\Delta x$ та $x_1+\Delta x$, де Δx– невеликий приріст аргументу, то $f'(x)$ буде додатною. Тому для точки x_1, де функція перестала зростати, похідна веде себе за схемою (знак функції): $+\,0\,+$.

В стаціонарній точці x_3: $f'(x_3-\Delta x)<0$ і $f'(x_3+\Delta x)<0$, тому для точки, де функція перестала спадати, маємо схему: $-\,0\,-$.

В точці x_2 похідна змінює знак. Якщо $f'(x_2-\Delta x)>0$ (зліва від x_2), а $f'(x_2+\Delta x)<0$ (справа від x_2), то маємо максимум. Отже для точки максимуму маємо схему: $+\,0\,-$.

В точці x_4 (мінімум) похідна змінює знак – на +, тому маємо схему: $-0+$.

Якщо рис. 7.8. *б*) схематично відображає поведінку $f'(x)$, то рис.91 *в*) відображає поведінку $f''(x)$. З поведінки другої похідної робимо висновок, що якщо в стаціонарній точці є максимум, то y'' в ній завжди від'ємна, а якщо має мінімум – то y'' додатна.

Тому з умови $y'=f'(x)$ знаходимо $y''=f''(x)$ і прирівнюємо її до нуля. З умови $f''(x)=0$ знаходимо всі значення *x*, що задовольняють цю умову. Ті значення *x*, які вже зустрічалися з умови $f'(x)=0$, і є стаціонарними точками (у нас – це точки x_1 і x_3). Ті стаціонарні точки, що не задовольняють умові $f''(x)=0$, будуть точками екстремуму.

Якщо $f''(x_2)<0$, то x_2 – точка максимуму, а якщо $f''(x_4)>0$, то x_4 – точка мінімуму. Всі ті точки, для яких $f''(x)=0$, але $f'(x)\neq 0$ (нові значення, які не зустрічались серед стаціонарних), будуть точками перегину функції (відображена на графіку лише одна з них – точка x_5). Отже, з умови $f''(x)=0$ знаходимо точку перегину x_5.

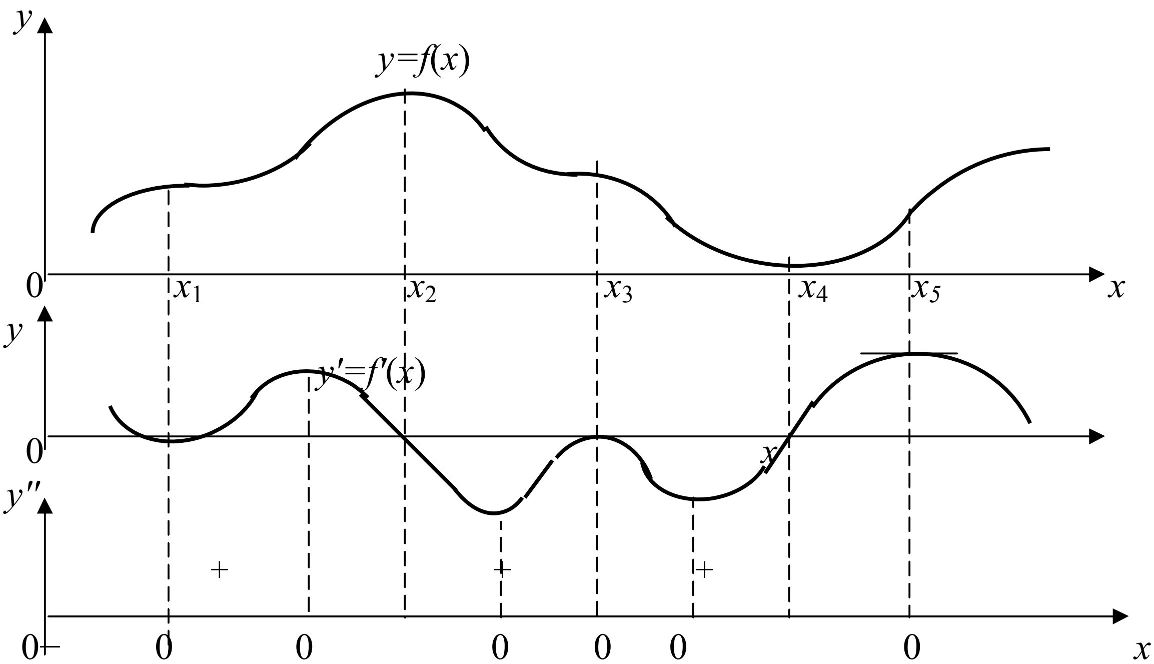


Рис. 7.8.

Озн. Точкою перегину називається точка кривої, в якій створюється перехід від випуклості до угнутості чи навпаки (рис. 7.9.).

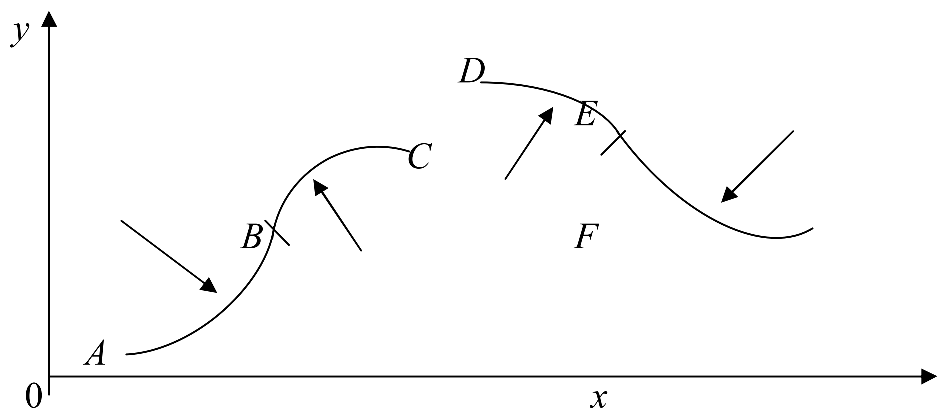


Рис. 7.9.

Ділянки AB та EF – це ділянки угнутості функції, а ділянки BC та BE – випуклості.

Якщо функція має в точці x_0 гострий екстремум, то вона в цій точці існує, а її перша похідна потерпає розрив.

Знаходимо проміжки, в яких $f'(x) > 0$. Це проміжки зростання функції. Якщо $f'(x) < 0$ на даному проміжку, то функція на цьому проміжку спадає. Якщо на заданому проміжку $f''(x) > 0$, то $f(x)$ угнута, а якщо $f''(x) < 0$, то функція випукла.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій:

7.11. $y = 4x^2 - 6x$; **7.12.** $y = 1 + x - x^3$;

7.13. $y = 4x^4 - 2x^2 + 2$; **7.14.** $y = x + \frac{1}{x}$;

7.15. $y = x^2(4 - x)^2$; **7.16.** $y = \frac{x}{1 + x^2}$.

Індивідуальне завдання

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій: $y = Nx^2 - (N - 3)x + N$, N – номер студента за списком.

§4. Означення максимуму та мінімуму функції.

Функція *f(x)* має в точці $x = x_0$ максимум, якщо значення функції в цій точці більше, ніж її значення в усіх точках, достатньо близьких до x_0.

Тобто, функція *f(x)* має максимум при $x = x_0$, якщо $f(x_0+\Delta x) < f(x_0)$, для будь-якого Δx – як додатного, так і від’ємного, але достатньо малих за абсолютною величиною.

Функція *f(x)* має в точці $x = x_0$ мінімум, якщо значення функції в цій точці менше, ніж її значення в усіх точках, достатньо близьких до x_0. Тобто, функція *f(x)* має мінімум при $x = x_0$, якщо $f(x_0+\Delta x) > f(x)$,для будь-якого Δx – як додатного, так і від’ємного, але достатньо малих за абсолютною величиною.

Якщо в деякій точці функція має максимум або мінімум, то говорять, що в цій точці має місце екстремум.

Слід пам’ятати:

1. Максимум (мінімум) не являється обов’язково найбільшим (найменшим) значенням, що приймає функція. Поза розглянутого околу точки x_0 функція може приймати більші (менші) значення, ніж в цій точці.

2. Функція може мати, декілька максимумів і мінімумів.

3. Функція, що визначена на відрізку, може досягнути екстремуму тільки у внутрішніх точках цього відрізка.

Необхідна умова екстремуму

Якщо функція $f(x)$ має екстремум при $x = x_0$, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, або нескінченості, або взагалі не існує. Із цього слідує, що точки екстремуму функції необхідно знаходити тільки серед тих, в яких її перша похідна $f'(x) = 0$, або не існує. Слід уяснити, що вказана ознака екстремуму є тільки необхідною, але не достатньою.

Вкажемо дві достатні умови існування екстремуму функції.

Перша достатня умова існування екстремуму функції

Нехай точка $x = x_0$ є критичною точкою функції $f(x)$, а сама функція $f(x)$ неперервна та диференційована у всіх точках деякого інтервалу, який містить цю точку. Тоді:

1. Якщо при $x < x_0$ похідна функції $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то при $x = x_0$ має місце максимум, тобто якщо при переході зліва направо через критичну точку перша похідна змінює знак з плюса на мінус, то в цій точці функція досягає максимуму.

2. Якщо при $x < x_0$ похідна функції $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то при $x = x_0$ має місце мінімум, тобто, якщо при переході через критичну точку перша похідна функції змінює знак з мінуса на плюс, то в цій точці функція досягає мінімуму.

3. Якщо ж при переході через критичну точку перша похідна не змінює знак, то екстремуму немає.

Друга достатня умова існування екстремуму функції

Якщо в точці $x = x_0$ перша похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю: $f'(x) = 0$, то при $x = x_0$ має місце максимум, якщо $f''(x) < 0$, та мінімум, якщо $f''(x) > 0$. Якщо ж $f''(x) = 0$, то необхідно розглянути першу достатню умову існування екстремуму.

Правило для дослідження функції на екстремум за допомогою похідної (перший спосіб).

Для дослідження функції на екстремум за першою похідною необхідно:

1. Знайти $f'(x)$ – першу похідну функції.

2. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, а також визначити ті значення x, при яких $f'(x) = \infty$ або не існує (тобто: знайти критичні точки функції $f(x)$).

3. Всі критичні точки розташувати на числовій осі в порядку зростання їх абсцис.

4. В середині кожного із утворених інтервалів взяти будь-яку точку і встановити в цій точці знак першої похідної функції (похідна зберігає знак в кожному інтервалі між двома сусідніми критичними точками).

5. Розглянути знак *f '(x)* в двох сусідніх точках, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервалу до останнього. Якщо при такому переході знаки *f '(x)* в двох сусідніх інтервалах різні, то екстремум в критичній точці є, і буде максимум, якщо знак змінюється з + на –, а мінімум, якщо знак змінюється з – на +. Якщо ж в двох сусідніх інтервалах має місце збереження знаку першої похідної, то екстремуму в розглянутій критичній точці немає.

6. Знайти значення функції в точках, де вона досягає екстремуму (екстремальні значення функції).

Правило для дослідження функції на екстремум за допомогою похідної (другий спосіб)

Для того, щоб дослідити на екстремум за другою похідною, необхідно:

1. Знайти *f '(x)* – першу похідну функції.
2. Розв’язати рівняння *f '(x)* =0.
3. Знайти *f ''(x)* – другу похідну функції.
4. Дослідити знак *f ''(x)* – другої похідної функції в кожній точці, що знайдено в пункті 2.

Якщо в розглянутій точці *f ''(x)* > 0, то в цій точці буде мінімум, а якщо *f ''(x)* < 0, то в цій буде максимум. Якщо в розглянутій точці *f ''(x)* = 0, то дослідження необхідно провести за правилом першої похідної.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти екстремуми функцій:

7.17. $y = x^2 - 2x + 3$;

7.18. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

7.19. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$;

7.20. $y = -x^4 + 2x^2$;

7.21. $y = x^4 - 8x^2 + 2$;

7.22. $y = \frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$;

7.23. $y = (x-2)^3(2x+1)$;

7.24. $y = cosx + sinx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій:

7.25. $y = 4x^2 - 6x$;

7.26. $y = 1 + x - x^3$;

7.27. $y = 4x^4 - 2x^2 + 2$;

7.28. $y = x + \frac{1}{x}$;

7.29. $y = x^2(4-x)^2$;

7.30. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Індивідуальне завдання

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функцій: $y = \frac{Nx}{(N-10)^2 - (-1)^N x^2}$,

N – номер студента за списком.

§5. Застосування похідної до дослідження динаміки функції.

Загальне дослідження функції та побудову їх графіків зручно використовувати за наступною схемою:

1. Елементарні дослідження: знайти область визначення функції; точки перетину з осями координат; перевірити функцію на парність.
2. Знайти точки розриву функції та її односторонні границі.
3. Знаходження похилих асимптот.
4. Знайти точки екстремуму та інтервали зростання та спадання функції.
5. Побудувати графік функції, враховуючи всі одержані результати дослідження.

<u>Приклад:</u> Дослідити функцію і побудувати її графік: $y=\frac{x}{x^2-1}$.

Розв'язання:

<u>1. Елементарні дослідження:</u>

Область визначення функції : $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.

Точки перетину графіка функції з осями координат:

$(0;0)$ − єдина точка перетину з віссю абсцис та ординат.

Функція непарна, так як: $y(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-1}=-\frac{x}{x^2-1}$. Отже графік функції симетричний відносно початку координат.

<u>2. Дослідження точок розриву:</u>

$\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{-0}=\infty$; $\lim\limits_{x\to-1-0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty$; $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{-0}=-\infty$.

Отже, $x=-1$ і $x=1$ − вертикальні асимптоти.

<u>3. Знаходження похилих асимптот:</u>

Похилі асимптоти визначатимемо за формулою: $y=kx+b$. Для цього знайдемо невідомі коефіцієнти k і b:

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-1}=\left[\frac{0}{\infty}\right]=0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Тоді рівняння асимптоти набуватиме вигляду: $y=0$.

<u>4. Дослідження функції на монотонність:</u>

Знайдемо першу похідну функції:

$$y' = \frac{\left(x^2-1\right) - x \cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 - 1}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-1-x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{1+x^2}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Прирівняємо першу похідну до нуля: $-\dfrac{1+x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = 0$.

Так як рівняння не має розв'язків, то критичних точок першого роду не має. Тому на числовій осі *0X* позначаємо лише точки розриву функції:

– – – x

–1 **1**

Отже, функція спадає на всій області визначення.

<u>5. Дослідження на опуклість та ввігнутість:</u>

Знайдемо другу похідну функції:

$$y'' = \frac{-2x \cdot \left(x^2-1\right)^2 + \left(1+x^2\right) \cdot 2\left(x^2-1\right) \cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{2x \cdot \left(x^2-1\right) \cdot \left(-x^2+1-2+2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= \frac{2x \cdot \left(x^2+3\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

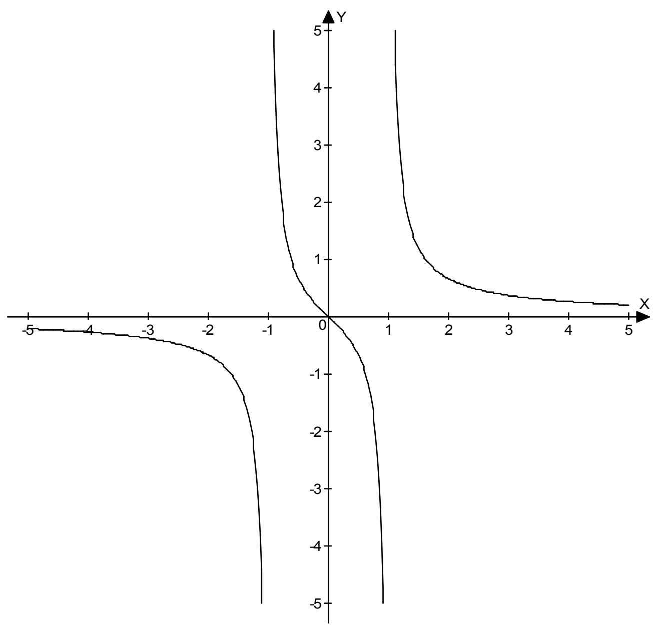
Прирівняємо другу похідну до нуля: $\dfrac{2x \cdot \left(x^2-2x-1\right)}{\left(x^2-4\right)^3} = 0$, $x = 0$ – критична точка другого роду. Визначимо знаки другої похідної на отриманих інтервалах:

– + – + x

–1 **0** **1**

Отже, функція опукла вниз на проміжках: $x \in (-1;0) \cup (1;\infty)$, опукла вгору – $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$. Точка (0; 0) – точка перегину.

<u>6. Побудова графіка функції:</u>



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дослідити функцію і побудувати її графік:

7.31. $y = \dfrac{x^2 + x}{x+2}$;

7.32. $y = \dfrac{4x^2 - x}{x+2}$;

7.33. $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$;

7.34. $y = \dfrac{x^2}{x+5}$;

7.35. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$;

7.36. $y = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$;

7.37. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$;

7.38. $y = \dfrac{x-1}{x^2}$;

7.39. $y = \dfrac{x}{(x+2)^2}$;

7.40. $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$.

Індивідуальне завдання

Дослідити функцію і побудувати її графік: $y = \dfrac{Nx}{(N-10)^2 - (-1)^N x^2}$, N – номер студента за списком.

Запитання до розділу VII.

1. Що називають функцією?
2. Що називають асимптотою?
3. В чому полягає принцип Ферма?
4. Що таке точки екстремуму?
5. Що таке стаціонарні точки?
6. Що таке максимум та мінімум функції?
7. Як знаходяться проміжки зростання, спадання, випуклості та угнутості?
8. Як знаходиться горизонтальна асимптота?
9. Як знаходиться вертикальна асимптота?
10. Як знаходиться похила асимптота?
11. Що дає знаходження першої похідної?
12. Що дає знаходження другої похідної?