VIII. ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

§1. Поняття функції декількох змінних. Частинні похідні.

У функції однієї змінної $y = f(x)$ змінна x відіграє роль незалежної змінної, а змінна $y -$ залежна змінна. В реальності існують функції, коли незалежних змінних існує декілька, причому вони незалежні між собою, але їх зміна призводить до зміни залежної від них величини. Швидкість випаровування води залежить від температури повітря, вологості повітря, напрямку та сили вітру, степеня освітленості Сонцем тощо. Об'єм паралелепіпеда залежить від довжини, ширини та висоти сторін, а конуса – тільки від радіуса основи та висоти.

Ми будемо називати функцією декількох змінних таку функцію, у якої число незалежних змінних не менше двох. Отже, функція двох змінних $z = f(x, y)$ є найпростішим випадком функції декількох змінних.

Для будь-якої функції двох змінних можливо зробити графічну ілюстрацію. Графіком функції $z = f(x, y)$ називається геометричне місце точок (x, y, z) простору, у яких x та y належать множині точок площини xOy, а всі точки z функціонально залежні від x та y за законом $z = f(x, y)$. Графік функції може мати вигляд деякої поверхні. Але вже функції з числа незалежних змінних, що перевищує число 2 (трьох чотирьох і т.д. змінних), геометричного образу не мають. Не дивлячись на це, всі основні поняття та висновки теорії функції декількох змінних практично однакові і не залежать від числа змінних, тому вивчення таких функцій доцільно проводити саме на функціях двох змінних як на самому простому представнику групи.

Проілюструємо основні поняття і формули для функцій двох змінних, оскільки перехід до більшого числа змінних не викликає ніяких труднощів. Якщо $z = f(x, y)$, то частинні прирости за змінними x, y та повний приріст функції визначається за формулами:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x, y);$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Якщо існує $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то ця границя називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x і позначається одним із символів: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x.

Ця похідна називається частинною похідною по змінній x і позначається єдиним символом $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Якщо для функції однієї змінної похідна $\frac{dy}{dx}$ є відношенням диференціалів, то значки ∂z та ∂x ніякого змісту не мають, а горизонтальна лінія не означає дію ділення. Отже, $\frac{\partial z}{\partial x}$ – символ, значок для позначення частинної похідної.

Якби $\frac{\partial z}{\partial x}$ було діленням, то $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = 1$ завдяки скороченням, які можна було б провести. Але якщо, наприклад, $z = xy$, то $x = \frac{z}{y}$ і $y = \frac{z}{x}$.

Тоді $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{z}{y^2}$, $\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{x}$, а $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = y \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right) \cdot \frac{1}{x} = = -\frac{z}{xy} = -\frac{z}{z} = -1.$

Але $1 \neq -1$.

Аналогічно визначається частинна похідна за змінною y. Частинна похідна за однією із змінних знаходиться за правилами диференціювання функцій однієї змінної, при чому друга змінна залишається сталою.

<u>Приклад:</u> Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$; б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$; в) $z = \frac{\sqrt{x^2 + 3y}}{sinxy}$.

Розв'язання:

а) $z = 4xy^3 + 2\sqrt{x}y^2 + 7y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 \cdot 1 \cdot y^3 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot y^2 + 0 = 4y^3 + \frac{y^2}{\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4 \cdot x \cdot 3y^2 + 2\sqrt{x} \cdot 2y + 7 = 12xy^2 + 4y\sqrt{x} + 7.$$

б) $z = e^x \cdot \sqrt{y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cdot \sqrt{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

в) $z = \frac{\sqrt{x^2 + 3y}}{siinx}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3y}}\cdot siinx-\sqrt{x^2+3y}\cdot ycosxy}{sii^{\,2}xy}=$$

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+3y}}\cdot sinxy-\sqrt{x^2+3y}\cdot ycosxy}{sin^2xy};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{x^2+3y}}\cdot siinx-\sqrt{x^2+3y}\cdot xcosxy}{sii^{\,2}xy}.$$

Якщо $z=f(x,y)$ неперервна і має неперервні частинні похідні, то при зміні x на величину Δx, а $y-$ на величину Δy, функція z змінюється на величину повного приросту Δz на відміну від частинних приростів:

$$\Delta z=f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y).$$

Шляхом доповнення, виходячи з ідеї частинного приросту, одержимо:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

Розглянемо першу пару: $f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y+\Delta y)$ є частинним приростом функції при зміні x на величину Δx (величина $y+\Delta y$ однакова для обох виразів). Позначимо його $\Delta_x z$.

Розглянемо другу пару : $f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x;y+\Delta y)$ є частинним приростом $\Delta_y z$ функції при зміні y на величину Δy (величина x однакова в обох виразах)

Отже, маємо: $\Delta z=\Delta_x z+\Delta_y z$. Частинні прирости є повними аналогами приростів функції однієї змінної, тому для них можемо записати:

$\Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\alpha$, $\Delta_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y+\beta$, де α і β − нескінченно малі величини, якщо $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$. Тоді:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\delta\text{, де }\delta=\alpha+\beta.$$

Ця формула називається ***формулою повного приросту*** функції.

Розглянемо $z=f(x;y)$, де x та y є деякі функції від змінної t. Тоді $f(x;y)$ стає складеною функцією. Якщо t одержує приріст Δt, то x одержує приріст Δx, y одержує приріст Δy, а z одержує приріст Δz. Тоді Δz, як повний приріст функції буде: $\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\delta$, звідки в граничному переході (детальне дослідження показує, що $\delta\to 0$ при $dt\to 0$) будемо мати:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Це формула для знаходження похідної від складеної функції.

Приклад: Обчислити похідну функції $z=(\sin x)^{\ln y}$.

Розв'язання: Нехай $z=(\sin x)^{\ln y}$, де $x=x(t)$, $y=y(t)$, тоді $z'_t=\cos x\cdot(\sin x)^{\ln y-1}\cdot\ln y\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{1}{y}\cdot(\sin x)^{\ln y}\cdot\ln\sin x\cdot\frac{dy}{dt}$.

Якщо функція однієї змінної задана неявно, то вона має вигляд $f(x;y)=C$, то її похідна буде дорівнювати:

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{f'_x}{f'_y} \tag{8.1}$$

За цією формулою зразу можемо знайти похідну неявної функції.

Приклад: знайти похідну неявної функції $x^2y^2+\sin(x-y)=4$.

Знайдемо частинні похідні:

$\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x=2x\cdot y^3+\cos(x-y)\cdot x'=2xy^3+\cos(x-y)$.

$\frac{\partial f}{\partial y}=f'_y=x^2\cdot 3y^2+\cos(x-y)\cdot(-y)'=3x^2y^2-\cos(x-y)$.

Тоді $y'=-\frac{2xy^3+\cos(x-y)}{3x^2y^2-\cos(x-y)}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

8.1. $z=4x^3y^2-12xy^3-\sqrt{xy}$;

8.2. $z=x^3y+2x^2y^2-\sqrt{x+y}$;

8.3. $z=3x^2y^3+2x^3y^2+\sqrt{2x}$;

8.4. $z=4x^4y^3+\frac{1}{2}x^3y^2+\sqrt{3+y}$;

8.5. $z=x^4y^3+xy^2+coos$;

8.6. $z=xy^3+x^{10}y^2+s^3nx$;

8.7. $z=\ln y^3+xy^2+sin2x$;

8.8. $z=\ln^2 y+x^4y^2+siny^2$;

8.9. $z=2\log_2 x+3\sqrt{x}y^2+6y$;

8.10. $z=\log_3 y+3xy^2+10x$;

8.11. $z=\sqrt{x}\cdot\sin y$;

8.12. $z=\sqrt{x+2}\cdot\cos y$;

8.13. $z=\sqrt{x^2-xy^5}$;

8.14. $z=\frac{x}{y}$;

8.15. $z=\frac{xy}{x^2+y}$;

8.16. $z=\frac{\ln y}{x+10}$;

8.17. $z=\frac{\ln y}{xy}$;

8.18. $z=\frac{\ln y}{\sqrt{x}}$;

8.19. $z = \dfrac{cosx}{\sqrt{y}}$;

8.20. $z = \dfrac{arcñosx}{\sqrt{ó}}$;

8.21. $z = e^{xy} \cdot \sqrt{2y}$;

8.22. $z = \dfrac{x^2 + 2e^x}{3y}$;

8.23. $z = \dfrac{x^2 + 2e^y}{4y}$;

8.24. $z = \dfrac{\ln y}{x + y}$;

8.25. $z = \sqrt{4x - 3} \cdot sin^3 y$;

8.26. $z = \sqrt{2x} \cdot cosy^3$;

8.27. $z = \dfrac{arcsinx}{x + y}$;

8.28. $z = \dfrac{x^2 y^3}{x^2 + y^3}$;

8.29. $z = \ln(xy) \cdot sin(2x + 4y)$;

8.30. $z = 3xy^5 \cdot \log_3 y^5$.

Індивідуальне завдання

Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

а) $z = 2x^n y^{n+2} - \dfrac{1}{ny} x^{2n} - 4y\sqrt{x}$;

б) $z = e^{nx} - \sqrt[n]{y}$;

в) $z = tg(nx - 4y) \cdot \sqrt{x^3 + nx^2 - n}$;

г) $z = \dfrac{x^{2n} - (n-2)x}{\sin^n y}$.

де n – остання цифра номера студента за списком.

§ 2. Повний диференціал функцій та його застосування

В попередніх параграфах приведена формула повного приросту функції:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \delta .$$

Величина $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x$ називається частинним диференціалом по змінній x, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ – частинним диференціалом за змінною y і позначаються: $\dfrac{df}{dx}\Delta x = d_x z$; $\dfrac{df}{dy}\Delta y = d_y z$. Тоді сума всіх частинних диференціалів називається повним диференціалом функції (для функції двох змінних тільки два частинних диференціали, а взагалі їх кількість співпадає з числом змінних). Отже:

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{dz}{dy}\Delta y \tag{8.2}$$

Розглядання функцій $z = x(z'_x = 1, z'_y = 0)$ та $z = y(z'_x = 0; z'_y = 1)$ дає:

$\Delta x = dx; \Delta y = dy$, тому $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$. Таким чином:

$\Delta z = dz + \delta$, звідки $\Delta z \sim dz$ (ця рівність тим точніша, чим менші Δx та Δy).

<u>Приклад:</u> Знайти повний диференціал функції: $z = x^2 y^3 + \sin(x - y)$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + \cos(x - y)$. $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2 + \cos(x - y) \cdot (-1)$.

$$dz = (2xy^3 + \cos(x - y)) \cdot dx + (3x^2 y^2 - \cos(x - y) \cdot dy.$$

Повний диференціал завдяки формулі $\Delta z \approx dz$ знаходить широке використання в наближених обчисленнях.

<u>Приклад:</u> Обчислити $z = \sqrt[3]{xy + x^3 - y^2 + x^2 y^3 + 1}$ при $x = 0{,}99$; $y = 2{,}02$.

Маємо: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\Delta x = -0{,}01$; $\Delta y = 0{,}02$. Тоді:

$z = z_0 + \Delta z \approx z_0 + dz = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$, де $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ знаходяться в точці (x_0, y_0).

Маємо: $z_0 = \sqrt[3]{1 \cdot 2 + 1^3 - 2^2 + 1^2 \cdot 2^3 + 1} = 2$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(xy + x^3 - y^2 + x^2 y + 1)^2}} \cdot (y + 3x^2 + 2xy^3) = \frac{2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2^3}{3 \cdot 2^2} = \frac{21}{12}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(xy + x^3 - y^2 + x^2 y + 1)^2}} \cdot (x - 2y + 3x^2 y^2) = \frac{1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^3}{12} = \frac{9}{12}.$$

Тоді $z \approx 2 + \frac{21}{12} \cdot (-0{,}01) + \frac{9}{12} \cdot 0{,}02 = 2 - \frac{7}{400} + \frac{6}{400} = 2 - \frac{1}{400} = 2{,}0025$.

Озн: Похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$ функції $z = f(x, y)$ за напрямком $l(\cos\alpha, \sin\alpha)$ обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot \cos\beta \qquad (8.3)$$

Обчислення в точці *M (x; y)* дає швидкість зміни функції в напрямку в точці *M*.

Озн: Вектор з координатами $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$ називається градієнтом функції в точці *M*, він напрямлений в сторону най скорішої зміни функції і позначається так:

$$\overline{grad z} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot \vec{j} \qquad (8.4)$$

Геометрично рівняння $z = f(x, y)$ задає деяку поверхню. Щоб уявити собі вигляд поверхні перетнемо її площиною $z = C$, де *C* стала величина. Таке рівняння $f(x, y) = C$ задає в площині *XOY* криву, яка називається ізоквантою. Якщо на ізокванті взяти деяку точку $M\ (x_0;\ y_0)$, то вектор-градієнт в цій точці буде перпендикулярним до ізокванти.

Приклад: Задано функцію $z=\frac{2x^2-3}{4y^3}$, точку $A\ (-1;\ 1)$ і вектор $\vec{a}\,(-12;\ -5)$. Знайти градієнт функції в точці A та похідну в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$.

Розв'язання: Обчислимо частинні похідні функції в точці A_0:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\cdot 2x-0}{4y^3}=\frac{4x}{4y^3}=\frac{x}{y^3};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{A(-1;1)}=\frac{-1}{1^3}=-1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-3\cdot\frac{2x^2-0}{4y^4}=\frac{6x^2}{4y^4}=\frac{3x^2}{2y^4};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{A(-1;1)}=\frac{3\cdot(-1)^2}{2\cdot 1^4}=\frac{3}{4}.$$

Тоді градієнт функції можна записати у вигляді: $\overline{gradz}=\frac{\partial z}{\partial x}\big|_A\cdot\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\big|_A\cdot\vec{j}$. Тобто: $\overline{gradz}=-1\cdot\vec{i}+\frac{3}{4}\cdot\vec{j}$.

Для запису похідної в точці A в напрямі вектора $\vec{a}$ використаємо формулу: $\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\big|_A\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\big|_A\cdot\cos\beta$.

Для цього зайдемо напрямлені косинуси:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}}=\frac{-12}{\sqrt{144+25}}=\frac{-12}{13};\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}}=\frac{-5}{\sqrt{144+25}}=-\frac{5}{13}.$$

Тоді, $dz=-1\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{12}{13}-\frac{15}{52}=\frac{48-15}{52}=\frac{33}{52}$.

Відповідь: $\overline{gradz}=-1\cdot\vec{i}+\frac{3}{4}\cdot\vec{j}$; $dz=\frac{33}{52}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

8.31. Задано функцію $z=x^3y^2+4\sqrt{x}-2\sqrt[3]{y}$ і точку $A\ (1;\ 1)$. Знайти градієнт функції в точці A.

8.32. Задано функцію $z=\frac{x}{y}+2\sqrt{xy}-\sqrt[3]{x+y}$ і точку $A\ (1;\ 4)$. Знайти градієнт функції в точці A.

8.33. Задано функцію $z=\left(\frac{x-1}{y^2}\right)^2$ і точку $A\ (2;\ -3)$. Знайти градієнт функції в точці A.

8.34. Задано функцію $z=\left(\frac{x^2}{4-y}\right)^{-1}$ і точку *A (–1; 0,5)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

8.35. Задано функцію $z=cos(xy)$ і точку *A* $(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Знайти градієнт функції в точці *A*.

8.36. Задано функцію $z=sin(2x+y)$ і точку *A* $(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$. Знайти градієнт функції в точці *A*.

8.37. Задано функцію $z=\left(3x^2+4y^2\right)^2$ і точку *A (2; 3)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

Для вектора $\vec{a}$ знайти напрямлені косинуси:

8.38. $\vec{a}\,(1;\,-1)$;

8.39. $\vec{a}\,(-2;\,1,5)$;

8.40. $\vec{a}\,(0;\,7)$;

8.41. $\vec{a}\,(5;\,1)$;

8.42. $\vec{a}\,(-6;\,-8)$;

8.43. $\vec{a}\,(-5;\,-12)$.

8.44. Задано функцію $z=\frac{3x}{y^2}$, точку *A (3; 4)* і вектор $\vec{a}\,(6;\,8)$. Знайти похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.45. Задано функцію $z=\frac{2x^3}{y^2}$, точку *A (1; 4)* і вектор $\vec{a}\,(-6;\,8)$. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.46. Задано функцію $z=\left(\frac{x^2}{4-y}\right)^3$ і точку *A (–1; 0)*. Знайти градієнт функції в точці *A*.

8.47. Задано функцію $z=\ln x^3y^2$, точку *A (1; 1)* і вектор $\vec{a}\,(2;\,-1)$. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.48. Задано функцію $z=\ln(x^3+y^2)$, точку *A (1; 1)* і вектор $\vec{a}\,(-2;\,1)$. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.49. Задано функцію $z=\arccos\left(\frac{x}{y^2}\right)$, точку *A (1; 2)* і вектор $\vec{a}\,(12;\,-5)$. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{\grave{a}}$.

8.50. Задано функцію $z = arctg\left(\frac{x^2}{y}\right)$, точку *A (1; 2)* і вектор $\vec{a}$ *(12; 5)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.51. Задано функцію $z = \ln\left(3x^2 + 4y^2\right)$, точку *A (1; 3)* і вектор $\vec{a}$ *(3; 4)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.52. Задано функцію $z = \ln\left(3x + y^2\right)$, точку *A (2; 3)* і вектор $\vec{a}$ *(3; –4)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.53. Задано функцію $z = \frac{\ln x}{y^2}$, точку *A (1; –2)* і вектор $\vec{a}$ *(6; –8)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.54. Задано функцію $z = \frac{\ln x}{2y}$, точку *A (1; 2)* і вектор $\vec{a}$ *(6; 8)*. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

8.55. Для функції $z = x^2 + y^2 + xy$ обчислити наближене значення в точці *A (1,02; 1,95)* за допомогою диференціалу.

8.56. Для функції $z = 2x^2 + y^2 + 3xy$ обчислити наближене значення в точці *A (1,96; -1,03)* за допомогою диференціалу.

8.57. Для функції $z = x^2 - 5y + 3xy$ обчислити наближене значення в точці *A (3,95; 1,03)* за допомогою диференціалу.

8.58. Для функції $z = x^y$ обчислити наближене значення в точці *A (0,96; 1,01)* за допомогою диференціалу.

8.59. Для функції $z = 4x - 5\sqrt{xy} + 2x^2y^3$ обчислити наближене значення в точці *A (–2,97; 1,04)* за допомогою диференціалу.

8.60. Для функції $z = \ln(x + y)$ обчислити наближене значення в точці *A (–0,02; 1,05)* за допомогою диференціалу.

8.61. Для функції $z = \sqrt[3]{y + x}$ обчислити наближене значення в точці *A (0,03; 125,01)* за допомогою диференціалу.

8.62. Для функції $z = 4x^6y^3 - 2\sqrt{x} + 2xy$ обчислити наближене значення в точці *A (0,97; 1,01)* за допомогою диференціалу.

8.63. Для функції $z = x^4y^2 - 3\sqrt{y} + 2xy$ обчислити наближене значення в точці *A (–0,99; 1,05)* за допомогою диференціалу.

8.64. Для функції $z = 2x^2y^3 - 3\sqrt{x + 3} + 2y$ обчислити наближене значення в точці *A (0,98; –1,04)* за допомогою диференціалу.

8.65. Для функції $z = cos(2x + y)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (4°; 92°)*.

8.66. Для функції $z = sin(2x + y)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (47°; 91°)*.

8.67. Для функції $z = sin(xy)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (3°; 32°)*.

8.68. Для функції $z = arcsin(x + xy)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (0,03; 0,99)*.

8.69. Для функції $z = arccos\dfrac{x}{y}$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (4,1; 4,2)*

8.70. Для функції $z = tg(x + 2y)$ обчислити за допомогою диференціалу наближене значення в точці *A (29°; 92°)*.

Індивідуальне завдання

1. Задано функцію $y = x^n y^n - \dfrac{1}{x^{2n} y} - \dfrac{y\sqrt{x}}{n}$, точку *A (1; –1)* і вектор $\vec{a}\,(n; -n)$. Знайти градієнт функції в точці *A* та похідну в точці *A* в напрямі вектора $\vec{a}$.

2. Для функції $z = 4x^{n-10} y - \dfrac{n}{x^{n-10}} + x\sqrt{y} + 2xy^3$ обчислити наближене значення в точці *A (–1,001n; 1+0,001n)* за допомогою диференціалу (*n* – номер студента за списком).

§ 3. Похідні та диференціали вищих порядків

Як і для функції однієї змінної, частинна похідна також є функцією. Наприклад, якщо $z = x^3 y^2$, то $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y$. Тому ці похідні можемо знову диференціювати, причому не тільки за змінною x, але й за змінною y.

Одержимо другі частинні похідні (їх чотири): $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 y$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y$.

Похідна $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ називається мішаною похідною. Аналогічно знаходяться похідні більш високих порядків. Так наприклад, $\dfrac{\partial^6 z}{\partial x^6}$ є шостою частинною похідною і означає, що від функції $z = f(x, y)$ шість разів підряд знаходились похідні за змінною x. Похідна $\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^2 \partial x}$ є шостою мішаною похідною і означає, що спочатку три рази підряд знаходили похідні за змінною x, потім двічі за змінною y, і в кінці один раз за змінною x. Таким чином, вигляд похідної вказує на прийнятий порядок диференціювання. Для неперервних функцій, які мають неперервні похідні, порядок диференціювання несуттєвий, тобто можемо стверджувати, що:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^6 z}{\partial x^4 \partial y^2} = \frac{\partial^6 z}{\partial y^2 \partial x^4} = \frac{\partial^6 z}{\partial x \partial y \partial x \partial y \partial x^2} \text{ і т.д.}$$

В наведеному прикладі $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 y$.

Таким чином, порядок диференціювання для мішаних похідних ролі не грає. Всі вказані ствердження також відносяться і до функцій декількох змінних.

<u>Приклад:</u> Знайти частинні похідні перших трьох порядків для функції $z = (x^2 + y^3)(x^3 - y^2)$.

Розв'язання: Розкриємо дужки: $z = x^5 + x^3 y^3 - x^2 y^2 - y^5$.

Перший порядок: $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 3x^2 y^3 - 2xy^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 y^2 - 2x^2 y - 5y^4$.

Другий порядок: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 + 6xy^3 - 2y^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^3 y - 2x^2 - 20y^3$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2 y^2 - 4xy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 9x^2 y^2 - 4xy$, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Третій порядок: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 60x^2 + 6y^3$. $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 6x^3 - 60y^2$;

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 18xy^2 - 4y$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = 18xy^2 - 4y$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x} = 18xy^2 - 4y$;

$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 18x^2 y - 4x$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = 18x^2 y - 4x$; $\frac{d^3 z}{dx dy dz} = 18x^2 y - 4x$.

Отже : $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$.

Диференціал другого порядку:

$$d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dy = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \right.$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\Bigg)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dydx+$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Отже:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{8.5}$$

Аналогічно знаходиться d^3z, як $d(d^2z)$:

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Приклад: Знайти три перших диференціали функції $z=(x^2+y^3)(x^3-y^2)$.

Розв'язання: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(5x^4+3x^2y^3-2xy^2)dx+(3x^3y^2-2x^2y-5y^4)dy$.

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=(20x^3+6xy^3-2y^2)dx^2+$$

$$+2(9x^2y^2-4xy)dxdy+(6x^3y-2x^2-20y^3)dy^2.$$

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy=(60x^2+$$

$$+6y^3)dx^3+3(18xy^2-4y)dx^2dy+3(18x^2y-4x)dxdy^2+(6x^3-60y^2)dy^3.$$

Аналогічним методом знаходяться диференціали функцій декількох змінних.

Наприклад, якщо $z=f(x,y,t)$, то $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial t}dt$, звідки

$$d^2z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy+d\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)dt=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+$$

$$+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}dxdt+2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial t}dydt+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dt^2=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dt^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}dxdt+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial t}dydt\right).$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти частинні похідні другого та третього порядку для наступних функцій:

8.71. $z=4x^3y^2-12xy^3-\sqrt{xy}$; **8.72.** $z=x^3y+2x^2y^2-\sqrt{x+y}$;

8.73. $z=3x^2y^3+2x^3y^2+\sqrt{2x}$; **8.74.** $z=4x^4y^3+\frac{1}{2}x^3y^2+\sqrt{3+y}$;

8.75. $z = x^4 y^3 + xy^2 + coos$; **8.76.** $z = xy^3 + x^{10} y^2 + s^3 nx$;

8.77. $z = \ln y^3 + xy^2 + sin2x$; **8.78.** $z = \ln^2 y + x^4 y^2 + siny^2$;

8.79. $z = 2\log_2 x + 3\sqrt{x}y^2 + 6y$; **8.80.** $z = \log_3 y + 3xy^2 + 10x$;

Індивідуальне завдання

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

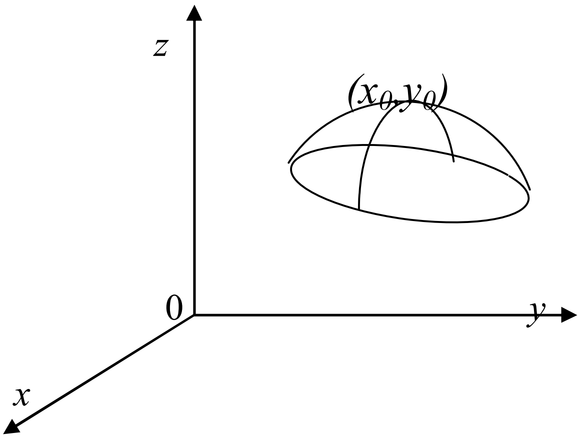
а) $z = 2x^n y^{n+2} - \frac{1}{ny} x^{2n} - 4y\sqrt{x}$; б) $z = e^{nx} - \sqrt[n]{y}$;

де n – остання цифра номера студента за списком.

§4. Аналіз функції двох змінних

Дослідимо функцію двох змінних на екстремум.

Нехай задано неперервну функцію $z = f(x,y)$ може мати в області завдання $\begin{pmatrix} x \in [a;b] \\ y \in [c;d] \end{pmatrix}$ максимум і мінімум.



Якщо існує деякий окіл точки $(x_0; y_0)$, в якому функція буде мати найбільше значення тільки в точці $(x_0; y_0)$, а у всіх інших точках її значення менші, то в точці $(x_0; y_0)$ функція має максимум. Якщо ж значення функції в цій точці будуть меншими, ніж у всіх інших точках околу, то будемо мати мінімум. Точки максимума та мінімума – це точки екстремуму.

В точках максимуму та мінімуму дотичні, паралельні осям ox та oy, будуть паралельні площині xOy, тому $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називаються стаціонарними. Отже, якщо є максимум чи мінімум, то обов'язково частинні похідні дорівнюють нулю. Але обернене ствердження може бути неправильним. Наприклад, якщо проекція поверхні на площину xOz дає максимум ($\frac{\partial z}{\partial x} = 0$), а проекція на площину yOz дає мінімум ($\frac{\partial z}{\partial y} = 0$), то в точці $(x_0; y_0)$ немає ні максимуму, ні мінімуму, хоч обидві похідні дорівнюють нулю (в цьому випадку "стала" точка $(x_0; y_0)$ носить назву мінімакс). Тому умова $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ є тільки необхідною умовою.

Якщо $z = f(x, y)$ має неперервні похідні першого та другого порядків, то можемо знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і ввести позначення: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A$ в точці $(x_0; y_0)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B$ в точці $(x_0; y_0)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C$ в точці $(x_0; y_0)$.

Обчислимо визначник $\Delta = AC - B^2$. Якщо

1). $\Delta < 0$, то функція в точці $(x_0; y_0)$ екстремуму не має.

2). $\Delta > 0$, то екстремум існує, причому це максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$.

3). $\Delta = 0$, то функція може мати екстремуми, а може їх не мати. В цьому випадку потрібні додаткові дослідження.

Вказані ствердження про знак та величину Δ називаються достатньою умовою.

<u>Приклад:</u> Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$$

Розв'язання: Знаходимо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6.$$

Розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ 2y - x - 6 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи будуть числа $x = -4$, $y = 1$. Тобто критична точка має координати $M_0(-4;1)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_0:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0(-1;4)} = 2; \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0(-1;4)} = 2; \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0(-1;4)} = -1.$$

Тоді: $\Delta = A \cdot C - B^2 = 4 - 1 = 3$>0. Так як A>0, то існує мінімум функції в точці $M_0(-4;1)$, $z_{\min} = z(-4;1) = -1$.

Якщо для функції $z = f(x; y)$ в точці $(x_0; y_0)$ виконується умова:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases}$$, то точка $(x_0; y_0)$ називається особливою точкою.

Якщо ця точка перетворює функцію в нуль, але на кривій не лежить, то вона називається ізольованою точкою.

Умова $f(x,y)=0$ фактично перетворює функцію двох змінних в функцію однієї змінної в неявному вигляді, а особливі точки знаходимо з наслідків теорії функцій двох змінних (неявна функція $f(x,y)=0$ є частковим випадком функції двох змінних $z=f(x,y)$, коли $z=0$).

Приклад: дослідити функцію $y^2 - x(x-2)^2 = 0$.

Функція має неявний вигляд, тобто $z=0$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1\cdot(x-2)^2 - x\cdot 2(x-2)\cdot 1 = -(x-2)(3x-2)$. $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$.

Розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 - x(x-2)^2 = 0 \\ (x-2)(3x-2)=0 \\ \quad 2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ x=2 \end{array}\right. \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}.$$

Отримали особливу точку $(2;0)$.

Важливими є задачі на умовний екстремум, коли шукається екстремум функції $z=f(x;y)$ при умові, що змінні x та y зв’язані рівнянням зв’язку $\varphi(x;y)=0$. Така задача зводиться на дослідження на безумовний екстремум функції Лагранжа $L=(x,y,\lambda)$.

$L = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$, де число λ називається множником Лагранжа.

Після виключення λ досліджуємо на екстремум функцію Лагранжа, як функцію двох змінних $L=(x,y)$

Приклад: Дослідити на умовний екстремум функцію $z=x^2+y^2$, при $x+y=1$.

Розв’язання: Функція Лагранжа буде мати вигляд

$L=(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$.

Запишемо необхідні умови екстремуму:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda=0;\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda=0;\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y-1=0.$$

Звідки отримуємо $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. Тобто критична точка має координати $M_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\lambda=-1$.

$$L=(x,y)=x^2+y^2-(x+y-1).$$

Тоді частинні похідні першого та другого порядку дорівнюють: $L'_x=2x-1$, $L'_y=2y-1$, $L''_{xx}=2=A$, $L''_{yy}=2=C$, $L''_{xy}=0=B$.

$\Delta=A\cdot C-B^2=4>0$. Так як A>0, то існує мінімум функції: $z_{\min}=z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Дослідити на екстремум функції двох змінних:

8.81. $z=-800-x^2-y^2+40x+60y$;

8.82. $z=250-x^2-y^2+20x+100y$;

8.83. $z=-1800-x^2-y^2+80x+60y$;

8.84. $z=-2100-x^2-y^2+40x+100y$;

8.85. $z=-1700-x^2-y^2+40x+80y$;

8.86. $z=-1500-x^2-y^2+20x+80y$;

8.87. $z=-2000-x^2-y^2+100x+40y$;

Дослідити на умовний екстремум:

8.88. $z=x+y$; при $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}$;

8.89. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, при $x+y=2$;

8.90. $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$, при $x+y+3=0$.

Індивідуальне завдання

Дослідити на екстремум функції двох змінних $z=10n-x^2-y^2+nx+10ny$.

Запитання до розділу IIIV:

1. Що таке функція декількох змінних?
2. Що називається частинною похідною?
3. Яка функція називається неперервною?
4. Що таке частинний та повний приріст функції?
5. Що таке частинний та повний диференціал функції?

6. Як знаходиться похідна складеної функції?
7. Як знаходиться похідна неявної функції?
8. Що називається похідною вищого порядку?
9. Що таке мішана похідна?
10. Як знаходиться диференціал другого порядку?
11. Що таке максимум та мінімум функції двох змінних?
12. Що таке екстремуми?
13. Які точки називаються стаціонарними?
14. Яка достатня умова існування екстремуму?
15. Що таке особлива точка?